N. TEODORESCU

# METODE VECTORIALE IN FIZICA MATEMATICĂ

## II

EDITURA TEHNICĂ

Prof. N. TEODORESCU

# METODE VECTORIALE IN FIZICA MATEMATICĂ

## II

## ANALIZA VECTORIALA ŞI INTRODUCERE IN ANALIZA TENSORIALA

EDITURA TEHNICĂ
1954

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

# BAZELE ANALIZEI VECTORIALE. FUNCȚII SCALARE ȘI VECTORIALE

## § 140 Mărimi fizice variabile

Studiul fenomenelor fizice scoate în evidență caracterul variabil al mărimilor fizice. In fenomenele de mișcare mecanică, de exemplu în deplasările unui corp solid, în vibrațiile unei bare elastice, în scurgerea unui fluid, precum și în alte fenomene fizice ca propagarea căldurii, propagarea sunetului, luminii, etc., constatăm că mărimile caracteristice își modifică valorile, sunt variabile cu timpul sau cu locul unde sunt măsurate, variația fiind mai lentă sau mai rapidă după natura fenomenului.

Ce înseamnă modificarea, variabilitatea unei mărimi din punct de vedere matematic, vom putea înțelege dintr'un exemplu simplu.

Să considerăm un corp omogen având o masă $M$, un volum $V$ și o densitate $\rho$. Relația dintre aceste mărimi este

$$M=\rho V \qquad (1,V)$$

și exprimă măsura masei în funcție de măsurile densității și volumului. Dacă tăiem o bucată din acest corp, între masa $M_1$, volumul $V_1$ și densitatea $\rho$ va rămâne valabilă relația (1,V) sub forma

$$M_1=\rho V_1.$$

Repetând operația, fie prin extragere, fie prin adăugare, vom avea o nouă relație de forma

$$M_2=\rho V_2.$$

Considerând pe de o parte, valorile volumului $V_1$, $V_2$, ... și pe de altă parte, valorile masei $M_1$, $M_2$, ..., ele vor constitui două mulțimi de mărimi, care fac parte din două specii. Intre aceste mulțimi de mărimi există o *corespondență*, exprimată matematic de relația (1,V): la o mărime $V_1$ din prima mulțime corespunde o mărime $M_1$ din a doua. Când urmărim această corespondență, element cu element, spunem că $V$ variază luând diferite valori. Cum fiecărei valori $V_1$, $V_2$, ..., îi corespunde o valoare $M_1$, $M_2$, ..., a masei în mulțimea maselor considerate, spunem că și $M$ variază. Astfel, notăm cu $V$ și cu $M$, în general, elementele celor două mulțimi în corespondență și spunem că $V$ și $M$ sunt mărimi variabile.

Scanned with OKEN Scanner

Când între două mulțimi de mărimi, aparținând la două specii diferite sau unei aceleiași specii, se stabilește o corespondență, vom numi *mărime variabilă* elementul care parcurge una sau alta din aceste mulțimi de mărimi.

In cazul când la fiecare valoare a mărimii $A$ facem să corespundă una sau mai multe valori ale mărimii $B$, vom numi mărimea $A$ *variabilă independentă*. Mărimea $B$, ale cărei valori sunt determinate prin această corespondență, se va numi *variabilă dependentă*.

Corespondența între două mulțimi de mărimi, aparținând fiecare unei anumite specii se numește *funcție*.

Noțiunile de funcție și variabilă sunt legate între ele și presupun o corespondență între două mulțimi de mărimi, dar trebue să observăm că ele nu presupun o corespondență numerică.

Prin măsura mărimilor se stabilește o corespondență între fiecare mărime măsurată și o mulțime de numere, astfel încât măsura unei mărimi variabile se exprimă prin valori numerice, care formează mulțimi de numere.

Valorile luate de măsura mărimii $A$ sunt *valorile variabilei independente*, iar cele corespunzătoare, luate de măsura lui $B$, sunt *valorile variabilei dependente*.

Astfel, între măsurile masei și volumului există o relație de proporționalitate prin care se stabilește o corespondență între $M$ și $V$. La fiecare valoare a lui $V$ corespunde o valoare a lui $M$. Din cauza acestei corespondențe, spunem că masa este funcție de volum.

Dacă luăm un decimetru cub de fier de densitate $\rho = 7{,}8$ g/cm$^3$, masa sa va fi

$$M = 7{,}8 \times 1\,000 \text{ g} = 7\,800 \text{ g}.$$

Relația dintre masă și volum este dată de (1,V) și vom spune: orice masă de fier are o valoare numerică de 7,8 ori mai mare ca aceea a volumului corespunzător de apă distilată.

Dacă notăm pe două hârtii diferite valorile volumelor și ale maselor în patru experiențe, vom avea:

1 000; 500; 250; 125 cm$^3$ pentru volume și 7 800; 3 900; 1 950; 975 g pentru mase.

Dacă printr'o întâmplare aceste numere se vor amesteca pe cele două hârtii, apărând într'o ordine diferită, de exemplu: 500, 1 000, 250, 125 pe de o parte și 975, 7 800, 1 950, 3 900 pe de altă parte, relația (1,V), pe care o știm între volume și mase, ne va permite totuși să le asociem câte două, de exemplu 500 cu 3 900, 125 cu 975, etc. Aceasta arată că între numerele scrise pe cele două hârtii este o corespondență, exprimată prin termenul funcție. Printr'un abuz de limbaj, spunem că *variabila dependentă este funcție de variabila independentă*, dar înțelegem că mulțimea valorilor sale se obține prin corespondența cu mulțimea valorilor variabilei dependente.

Scriem

$$B = f(A), \qquad (2,V)$$

simbolul $f$ indicând funcția, adică acea lege de corespondență, prin care valorile lui $B$ se deduc din cele ale lui $A$, iar $f(A)$ indicând valoarea funcției pentru elementul $A$.

Mulțimea de valori, pe care le poate lua o variabilă, poate fi finită sau infinită.

Scanned with OKEN Scanner

Când vorbim de o mărime variabilă, este indispensabil să precizăm mulţimea valorilor sale: *mulţimea de definiţie a mărimii.*

Dacă o mărime $B$ este funcţie de alta, vom preciza mulţimea de definiţie a variabilei independente $A$, deoarece mulţimea corespunzătoare funcţiei este determinată prin însăşi corespondenţa $B=f(A)$.

In cazul considerat, mulţimea de definiţie este 125; 250; 500; 1000 pentru variabila independentă, iar mulţimea corespunzătoare prin funcţie este 975, 1950, 3900, 7800, pentru variabila dependentă. Aceste mulţimi de valori au un număr finit de elemente, în speţă patru.

Impărţirea porţiunii materiale poate fi însă continuată, astfel încât mulţimea valorilor luate de volum poate deveni infinită. Putem considera că măsura lui $V$ ia orice valoare între 0 şi 1000 $cm^3$, ceeace face ca măsurii lui $M$ să-i corespundă orice valoare între 0 şi 7800 g.

Mulţimea de definiţie a variabilei $V$ este în acest caz infinită şi este formată din mulţimea numerelor cuprinse între 0 şi 1000. Această mulţime de numere se reprezintă geometric prin punctele segmentului (0; 1000) la o scară convenabilă, iar mulţimea valorilor lui $M$ prin punctele segmentului (0; 7800) la o scară convenabilă.

Putem reprezenta geometric corespondenţa între $M$ şi $V$ cu ajutorul unui sistem de axe ortogonale, funcţia (1,V) fiind figurată printr'un segment de dreaptă.

In general, reprezentarea geometrică a relaţiilor fizice între mărimi aduce claritate şi simplifică raţionamentele. Cu atât mai mult ea devine necesară pentru acele mărimi fizice, care au ele însăşi un caracter spaţial şi sunt reprezentate prin mărimi geometrice, în particular pentru mărimile vectoriale.

## § 141. Mărimi scalare şi vectoriale variabile

In Algebra vectorială am considerat mărimile scalare şi vectoriale constante, deci ca elemente determinate odată într'un fenomen şi am stabilit între ele relaţii şi operaţii.

Dacă urmărim, însă, desfăşurarea fenomenelor, constatăm că aceste mărimi sunt variabile în cele mai multe cazuri. Astfel, poziţia unui punct în mişcare, definită printr'un vector de poziţie, variază cu timpul. Timpul, considerat ca mărime scalară, este o variabilă independentă, care variază continuu.

Vectorul de poziţie al punctului în mişcare este o variabilă dependentă de timp. Pentru a ne da seama de variaţia acestui vector, este necesar să-l raportăm la un sistem de referinţă, presupus fix. In acest caz, vom constata că la două momente diferite corespund doi vectori de poziţie diferiţi. Pentru a putea, însă, măsura modul de variaţie a vectorului în timp, *va trebui să comparăm cei doi vectori diferiţi şi să-i considerăm ca două valori ale aceleiaşi mărimi*, aşa cum comparăm în Analiză valorile unei variabile. Această variaţie trebue apoi raportată la variaţia timpului, pentru a ne da seama dacă este rapidă sau înceată.

Este deci natural să căutăm să extindem noţiunile fundamentale ale Analizei la mărimile vectoriale şi *scalare* folosindu-ne de reprezentarea lor geometrică şi interpretând geometric atât aceste noţiuni extinse, cât şi relaţiile dintre ele.

Scanned with OKEN Scanner

Folosirea unui sistem de referinţă este un auxiliar, necesar măsurătorilor făcute, însă *atât noţiunile, cât şi relaţiile obţinute din considerarea mărimilor scalare şi vectoriale variabile, trebue să fie independente de alegerea unui sistem de referinţă particular.*

Aceste mărimi şi relaţii, deduse din extinderea analizei scalare la mărimi fizice scalare şi vectoriale, trebue să aibă caracterul de generalitate cerut de principiile fizicei, mecanicei şi geometriei.

Vom distinge mărimi scalare variabile *independente*, cum a fost cazul volumului în relaţia (1,V) şi mărimi scalare variabile *dependente*, cum a fost masa în aceeaşi relaţie.

Vom avea deci *variabile scalare*, de care vor depinde mărimi scalare. Deasemenea vom avea şi mărimi vectoriale depinzând de mărimi scalare, cum sunt poziţia sau viteza unui punct în mişcare, care depind de timp.

Uneori, o mărime scalară sau vectorială poate depinde de mai multe mărimi scalare variabile. Astfel, dacă într'o conductă, în care circulă un lichid, se micşorează viteza de scurgere cu ajutorul unui dispozitiv, în faţa acestuia presiunea suferă o creştere şi în spatele acestuia, o descreştere. In acelaşi timp se produce o undă de presiune, care se propagă în conductă cu o viteză $a$, dată de formula

$$\frac{1}{a^2} = \rho\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{d}{E\delta}\right) \qquad (3,V)$$

unde $\rho$ este densitatea; $\epsilon$ — modulul de elasticitate al fluidului; $d$ — diametrul conductei; $E$ — modulul de elasticitate al materialului conductei; $\delta$ — grosimea peretelui conductei. Se vede că putem considera ca variabile pe $d$, $\rho$, $\delta$, astfel încât viteza de propagare depinde de trei variabile scalare.

In alte cazuri, întâlnim mărimi vectoriale variabile, care depind de alte *mărimi vectoriale variabile.*

Astfel, în scurgerea unui fluid incompresibil printr'un canal se poate realiza un regim permanent, în care trecerea particulelor printr'un punct fix $P$ se face la fiecare moment cu aceeaşi viteză.

Intre mulţimea punctelor $P$ ale canalului şi mulţimea vectorilor viteză ale particulelor fluide se stabileşte deci o corespondenţă univocă. In acelaşi timp, între mulţimea punctelor $P$ şi mulţimea vectorilor lor de poziţie, în raport cu un reper $O$, există o corespondenţă biunivocă.

Vom putea considera deci corespondenţa univocă între mulţimea vectorilor de poziţie şi mulţimea vectorilor viteză. Conform definiţiei, atât vectorul de poziţie oarecare $\bar{r}=\overline{OP}$, cât şi vectorul viteză oarecare $\bar{V}_P$ sunt mărimi variabile, iar vectorul viteză $\bar{V}_P$ este o funcţie de vectorul de poziţie $\bar{r}$, pe care o vom nota

$$\bar{V}_P = \bar{V}(\bar{r}) = \bar{V}(P).$$

Faptul că, prin introducerea unui sistem de referinţă, putem asocia punctelor spaţiului o specie de mărimi, de exemplu specia vectorilor contravarianţi, ne permite să considerăm corespondenţe univoce între mulţimi de mărimi şi mulţimi de puncte, deci între mărimi variabile şi puncte variabile şi, în consecinţă, *mărimi funcţii de punct.* Mulţimea de definiţie a acestor mărimi, este o mulţime de puncte din spaţiu.

Când mulţimea de definiţie este un domeniu din spaţiu, mulţimea mărimilor definite în fiecare punct al acestui domeniu se numeşte *câmp.*

Scanned with OKEN Scanner

Câmpurile iau denumirea speciei de mărimi respective: câmpuri scalare, vectoriale etc.; uneori chiar mai precis: câmpuri de viteze, de acceleraţii, de forţe, etc.

Mulţimea vitezelor $\overline{V}(P)$, definită în domeniul determinat de canalul considerat, constitue un *câmp vectorial.* Densitatea unui corp neomogen este o mărime scalară variabilă, definită în tot domeniul din spaţiu, format de corpul continuu considerat. Mulţimea densităţilor $\rho(P)$, definită în acest domeniu, constitue un *câmp scalar.*

Domeniile, pe care sunt definite câmpurile, se numesc *domenii de definiţie* ale câmpurilor.

Uneori, o mărime este definită numai în punctele unei curbe sau unei suprafeţe din spaţiu. Astfel, când un punct material $P$ descrie o trafectorie, viteza sa la fiecare moment este un vector variabil, definit în punctele curbei.

Aceste mărimi nu constitue *câmpuri în spaţiu,* domeniile lor de definiţie fiind uni- sau bidimensionale, nu tridimensionale, cum este o porţiune din spaţiu. Totuşi, dacă am considera, de exemplu, dreapta ca un spaţiu cu o dimensiune, o mărime scalară şi chiar o mărime vectorială, figurată printr'un vector de pe acea dreaptă, ar constitui câmpuri în acest spaţiu unidimensional. Deaceea, vom considera uneori *câmpuri definite pe o curbă sau pe o suprafaţă,* când mărimile respective pot fi definite numai în punctele acelei curbe sau suprafeţe.

De exemplu, în mişcarea unui fluid pe o suprafaţă, cum ar fi scurgerea unui râu pe suprafaţa pământului, sau mişcarea unui fluid în jurul unui obstacol, vitezele în punctele acelei suprafeţe sunt reprezentate prin vectori tangenţi la suprafaţă. Distribuţia acestor viteze este un câmp definit pe suprafaţă.

## § 142. Funcţii scalare şi vectoriale de o variabilă scalară

Mărimile scalare fiind măsurabile cu o singură unitate şi având măsura invariantă § 5, faţă de schimbarea sistemului de referinţă al spaţiului afin, există o corespondenţă biunivocă între o mulţime de mărimi scalare aparţinând unei specii date şi mulţimea de numere reale, care reprezintă măsurile lor.

*Putem deci înlocui mulţimea de definiţie a unei variabile scalare prin mulţimea măsurilor ei,* care este o mulţime de numere, cu condiţia de a păstra neschimbată unitatea.

Astfel, vom putea vorbi de o *variabilă scalară, definită într'un interval* $(a, b)$, înţelegând că măsura sa $u$ ia toate valorile cuprinse în intervalul $(a, b)$.

Fiind dată o mărime scalară variabilă $u$, variind continuu într'un interval $a \leq u \leq b$, dacă la fiecare valoare a lui $u$ corespunde o valoare $U$ pentru o altă mărime scalară $U$, corespondenţa între mulţimea valorilor lui $u$ şi mulţimea valorilor lui $U$ se va numi *funcţie scalară*, definită în intervalul $(a, b)$. Vom nota

$$U = f(u) \tag{4,V}$$

şi vom spune că $U$ este *funcţie scalară de scalarul u,* înţelegând că valorile lui $U$ se obţin din valorile lui $u$ prin corespondenţa $f$. Dacă unei valori $u$ îi corespunde o singură valoare $U$, vom spune că funcţia este *uniformă*; dacă unei valori $u$

îi corespund mai multe valori $U$, funcţia este *multiformă*. Astfel, în mişcarea uniform accelerată, dată de formula

$$s=4\,(t-t_0)^2,$$

spaţiul este funcţie uniformă de timp. Dacă, însă, exprimăm pe $t$ în funcţie de $s$, vom avea

$$t=t_0\pm\frac{\sqrt{s}}{2}.$$

Bineînţeles, vom lua $s\geqq 0$ şi vom observa că la o valoare a lui $s$ corespund două valori ale lui $t$, adică mobilul trece de două ori prin acelaşi punct, odată înainte de momentul $t_0$ şi odată după acest moment. Deci $t$ este o funcţie multiformă de $s$.

Când corespondenţa între valorile a două variabile $u$ şi $U$ este biunivocă, vom putea exprima şi pe $u$ ca funcţie uniformă de $U$:

$$u=g\,(U)$$

şi vom spune că $g$ este *inversa* funcţiei $f$.

Inversa unei funcţii este deci corespondenţa univocă în sens invers dintre valorile celor două variabile.

Dacă la fiecare valoare a unei mărimi scalare $u$, definită pe o mulţime dată, corespund una sau mai multe valori ale unei mărimi vectoriale variabile $\overline{V}$, corespondenţa între mulţimea de valori scalare $u$ şi mulţimea de valori vectoriale $\overline{V}$ este o *funcţie vectorială*. Vom scrie

$$\overline{V}=\overline{V}\,(u);\quad (a\leqq u\leqq b) \qquad (5,V)$$

şi vom spune că vectorul $\overline{V}$ este o *funcţie vectorială de scalarul u*. Când la o valoare $u$ corespunde un singur vector $\overline{V}\,(u)$, funcţia se va numi *uniformă*. Inafară de menţiuni speciale, *toate funcţiile considerate vor fi uniforme*.

Cele mai sugestive exemple de funcţii vectoriale de un parametru scalar provin din cinematica unei particule materiale, unde vectorul de poziţie $\overline{OM}=\overline{r}$ al unui punct $M$, centrul unei astfel de particule, variază cu timpul (fig. 127). Vom pune deci

$$\overline{r}=\overline{r}\,(t),$$

şi vom spune că *punctul M este o funcţie M (t)* de parametrul $t$.

Consideraţii de natură cinematică pun în evidenţă un al doilea vector variabil cu timpul, viteza, în fiecare punct $M$ la momentul $t$. Vom avea deci şi

$$\overline{V}=\overline{V}\,(t).$$

Variaţia vectorului de poziţie ne dă traiectoria mobilului, care este o curbă. Putem face abstracţie de faptul că $t$ este timpul şi considera curba în sine ca definită prin variaţia vectorului de poziţie $\overline{r}=\overline{r}\,(t)$. Putem chiar introduce un alt parametru, cum ar fi arcul curbei, măsurat dela o origine $I$ pe curbă. Studiul funcţiilor vectoriale de un parametru scalar are deci semnificaţie fizico-geometrică.

*Introducerea unui sistem de referinţă cartezian ne conduce la stabilirea unei legături între funcţiile scalare şi cele vectoriale.*

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, fie $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, trei vectori liniar independenţi, care definesc un triedru fundamental. Vom putea deci scrie

$$\bar{V}(t) = V_1(t)\,\bar{u} + V_2(t)\,\bar{v} + V_3(t)\,\bar{w}, \qquad (6,V)$$

fiecare componentă fiind o funcţie scalară de $t$ (de exemplu: $V_1(t) = \bar{V}\,\bar{u}'$).

Reprezentarea (6,V) permite extinderea proprietăţilor funcţiilor scalare la cele vectoriale, arătând că *o funcţiune vectorială de parametrul t este reprezentată printr'un sistem de trei funcţii scalare de acest parametru. Acest sistem exprimă măsura mărimii $\bar{V}(t)$ în raport cu o bază dată.*

Astfel, studiul unei funcţii vectoriale de parametrul $t$ înseamnă în fond, studiul unui sistem ordonat de trei funcţii scalare de $t$. Prin aceasta se deschide posibilitatea extinderii noţiunilor fundamentale ale Analizei scalare la funcţiile vectoriale.

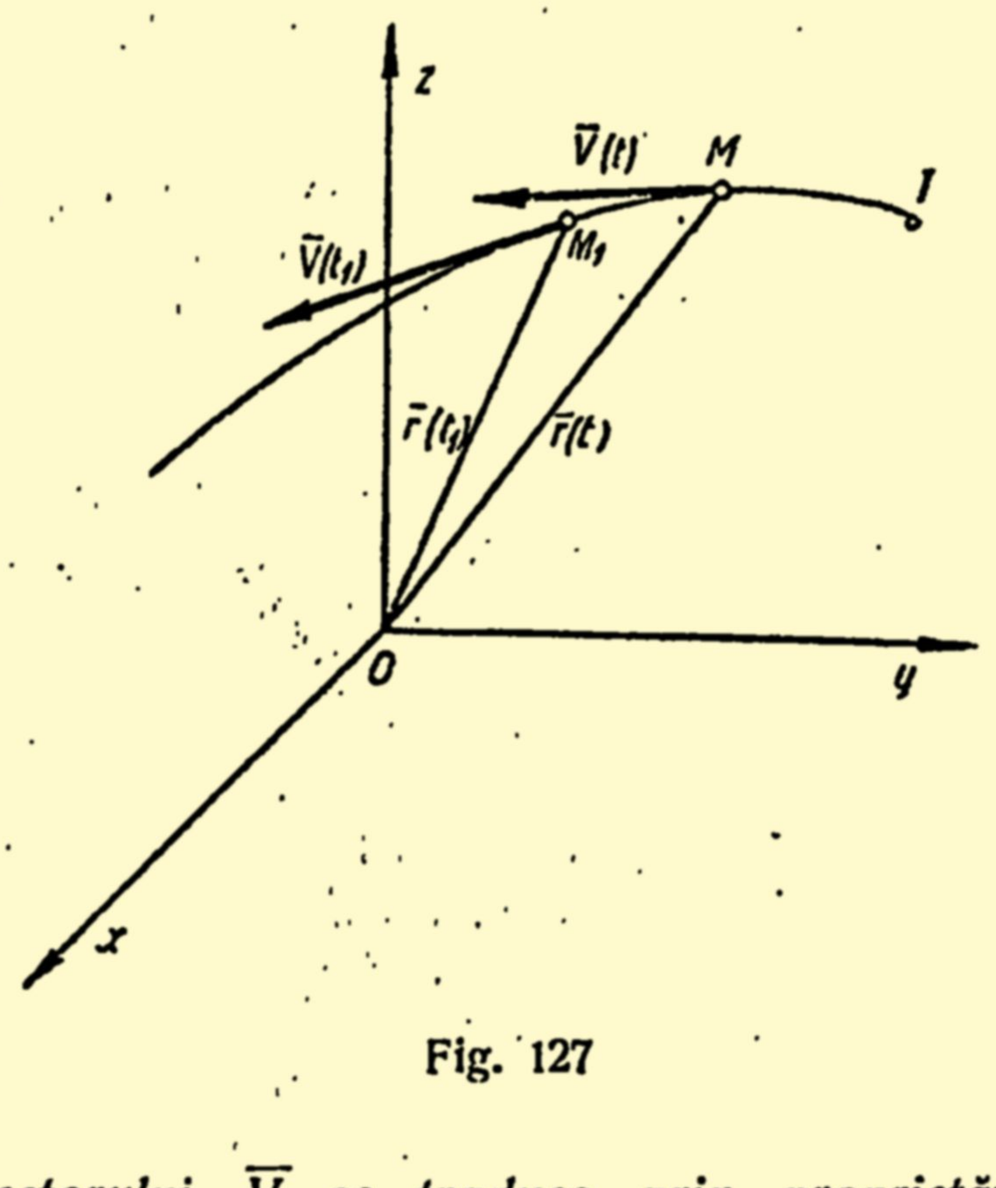


Fig. 127

Avem la dispoziţie două căi:

a) *Fiecare proprietate a componentelor scalare $V_1$, $V_2$, $V_3$ se traduce printr'o proprietate a vectorului $\bar{V}$, stabilită direct pentru vector.*

b) *Fiecare proprietate a vectorului $\bar{V}$ se traduce prin proprietăţi corespunzătoare ale componentelor sale, care se demonstrează pentru aceste componente $V_1$, $V_2$, $V_3$.*

Prima cale este conformă cu metoda simbolică, a doua cu metoda analitică în Calculul vectorial.

Vom utiliza de preferinţă prima cale, înafară de puţine excepţii şi numai pentru a evita desvoltări teoretice speciale. Prin aceasta, nu excludem metoda analitică, dar o socotim legată mai degrabă de calea, care duce dela Calculul vectorial la cel tensorial.

## § 143. Funcţii vectoriale şi scalare de mai multe variabile

Putem considera mai multe variabile scalare $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$, care variază în intervale date

$$a_1 \leqq t_1 \leqq b_1, \ldots, a_k \leqq t_k \leqq b_k, \ldots, a_n \leqq t_n \leqq b_n. \qquad (7,V)$$

Dacă la fiecare sistem de valori $t_1, t_2, \ldots, t_n$ corespunde o valoare determinată a unei mărimi scalare $u$, corespondenţa astfel stabilită între mulţimea valorilor luate de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi $u$ este o funcţie scalară.

Vom nota

$$u=u(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

şi vom spune că $u$ este o *funcţie scalară de variabilele scalare* $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Astfel, viteza de propagare a undei de presiune, definită prin formula (3,V), este o funcţie scalară de trei variabile scalare $d$, $\rho$, $\delta$.

In mod analog, dacă facem să corespundă fiecărui sistem de valori $t_1, t_2, \ldots, t_n$ din intervalele (7,V) un vector $\overline{V}$, obţinem o *funcţie vectorială de n variabile scalare.*

$$\overline{V}=\overline{V}(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

De exemplu, vectorul de poziţie $\bar{r}$ al unui punct $M$ din spaţiul cu trei dimensiuni, raportat la un sistem de coordonate polare $r$, $\theta$, $\varphi$, este o funcţie vectorială de variabilele scalare, $r$, $\theta$, $\varphi$ (fig. 128).

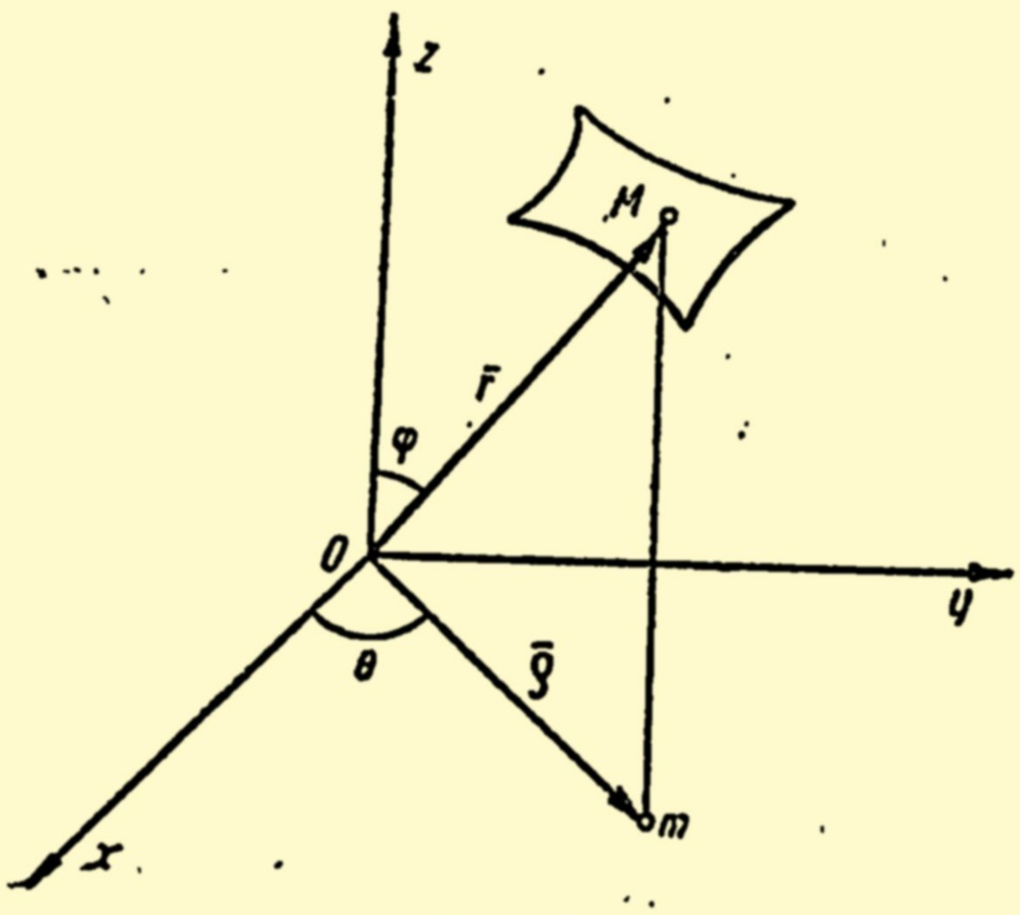



Fig. 128

Vom avea

$$x=r\cos\theta\sin\varphi;$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi;$$
$$z=r\cos\varphi.$$

Deci

$$\bar{r}=\bar{r}(r,\ \theta,\ \varphi)=\bar{i}r\cos\theta\sin\varphi+\bar{j}r\sin\theta\sin\varphi+\bar{k}r\cos\varphi.$$

Vectorul $\bar{\rho}=\overline{Om}$, obţinut prin proiecţia lui $\bar{r}$ pe planul $xOy$, are expresia

$$\bar{\rho}=\bar{i}\rho\cos\theta+\bar{j}\rho\sin\theta,$$

unde

$$\rho=r\sin\varphi.$$

Acest vector este o funcţie vectorială de două variabile scalare $\rho$, $\theta$. S'ar putea crede că $\bar{\rho}$ depinde de trei variabile, fiindcă $\rho=r\sin\varphi$. In realitate produsul $r\sin\varphi$ intervine ca o variabilă unică:

Dacă punctul $M$ descrie o suprafaţă de ecuaţie $f(x, y, z,)=0$, introducând coordonatele polare, vom avea

$$f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)=0,$$

ecuaţie care, rezolvată în raport cu $r$, ne va da

$$r=F(\theta, \varphi).$$

Deci, vectorul de poziţie al unui punct $M$ de pe această suprafaţă va fi o funcţie vectorială de două variabile scalare $\theta$ şi $\varphi$, deoarece $r$ este el însuşi o funcţie scalară de aceste variabile.

In sfârşit, dacă unui vector variabil $\bar{v}$ îi corespunde un scalar sau un vector, corespondenţa astfel stabilită este o *funcţie scalară, respectiv vectorială, de vectorul* $\bar{v}$,

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, modulul unui vector este o funcţie scalară de acel vector, deci

$$v = f(\bar{v}) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

dacă folosim un sistem de referinţă cartezian ortogonal.

Produsul scalar al unui vector constant $\bar{a}$ cu un vector variabil $\bar{v}$ este o funcţe scalară de vectorul $\bar{v}$:

$$u = \bar{a}\bar{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3.$$

Produsul vectorial al unui vector constant $\bar{a}$ cu un vector variabil $\bar{v}$ este un exemplu de funcţie vectorială de vectorul $\bar{v}$. Expresia acestei funcţii este

$$\bar{V} = \bar{a} \times \bar{v} = \bar{i}(a_2 v_3 - a_3 v_2) + \bar{j}(a_3 v_1 - a_1 v_3) + \bar{k}(a_1 v_2 - a_2 v_1).$$

Funcţiunile vectoriale şi scalare de un vector pot fi interpretate şi ca funcţii vectoriale, respectiv scalare, de trei variabile scalare, componentele vectorului $\bar{v}$. Această interpretare, deşi comodă uneori în calculele analitice, ascunde adevărata semnificaţie a funcţiei în aplicaţiile urmărite.

Când vectorul variabil $\bar{v}$ este vectorul de poziţie al unui punct $M$, vom numi funcţiile respective *funcţii scalare sau vectoriale de punct.*

In general, vom urmări în caracterizarea funcţiilor scalare sau vectoriale semnificaţia lor fizică sau geometrică, căutând să sintetizăm în aceste funcţii evoluţia fenomenelor. Deaceea, dacă o funcţie depinde de mai multe variabile scalare, vom cerceta natura acestor variabile pentru a descoperi eventuale afinităţi. Este uneori posibil ca trei variabile scalare să nu fie decât componentele unui aceluiaşi vector, iar funcţia respectivă să fie în consecinţă o funcţie de acel vector. In alte cazuri, funcţia este prin natura sa fizică o funcţie de mai multe variabile scalare.

**Exemplul ①** Forţa electrostatică exercitată de o sarcină $q_1$ asupra unei alte sarcini $q_2$ (măsurate în unităţi CGS) este

$$\bar{F} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \bar{r}_{12},$$

unde $\bar{r}_{12}$ este vectorul de poziţie al sarcinii $q_2$ faţă de sarcina $q_1$.

Aici $\bar{F}$ este o funcţie vectorială de $\bar{r}_{12}$. Pe de altă parte, alegând punctul în care se găseşte sarcina $q_1$ ca origine a unui sistem de coordonate polare şi folosind expresiile lui $x, y, z$ prin $r, \theta, \varphi$, forţa $\bar{F}$ poate fi scrisă ca o funcţie vectorială de trei variabile scalare $r, \theta, \varphi$, astfel

$$\bar{F} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}[\bar{i}\cos\theta\sin\varphi + \bar{j}\sin\theta\sin\varphi + \bar{k}\cos\varphi].$$

In această expresie intervin cinci variabile scalare $q_1, q_2, r, \theta$ şi $\varphi$, dintre care ultimele trei intervin astfel, încât ele pot fi considerate ca definind un vector.

**Exemplul ②** In alte cazuri, dimpotrivă, prezenţa unor variabile scalare arată imediat că ele definesc mărimi fizice de specii diferite.

De exemplu, formula

$$I = \frac{1}{\lambda^4} k^2 \frac{A^2 v^2}{r^4}. \qquad \textit{(legea lui Rayleigh)}$$

Scanned with OKEN Scanner

definește mărimea scalară $I$ ca funcțiune de variabilele scalare $\lambda, A, r$. Semnificația simbolurilor este următoarea:

$I$ este intensitatea luminii difuzate în punctul $P$, într'un mediu turbure format din particule în suspensie;
$r=MP$ — distanța dela un punct $M$ la un punct $P$ din mediu;
$v$ — un element de volum al mediului turbure;
$\lambda$ — lungimea de undă a vibrației luminoase;
$A$ — amplitudinea vibrației incidente în $M$;
$k$ — un coeficient depinzând de mediu.

Variabilele, care intră în această formulă, aparțin la specii de mărimi fizice diferite, deci nu vom încerca să asociem un vector mărimilor $\lambda, A, r$, deoarece acesta ar avea un caracter artificial, astfel încât formula definește o funcție scalară de variabile scalare.

**Exemplul ③** Forța magnetostatică exercitată de elementul de curent $I_1 d\bar{s}_1$ asupra elementului de curent $I_2 d\bar{s}_2$, situat la distanța $|\bar{R}_{12}|$, este (unități CGS)

$$\bar{F}_{12}=\frac{LI_2}{c^2R_{12}^3}\,d\bar{s}_2\times(d\bar{s}_1\times\bar{R}_{12})=\frac{\bar{i}_2\times(\bar{i}_1\times\bar{R}_{12})}{R_{12}^3},$$

unde $\bar{i}_1=\frac{I_1 d\bar{s}_1}{c}$ este elementul de curent în CGS e. m., deci o funcție vectorială de trei variabile vectoriale $d\bar{s}_1, d\bar{s}_2, \bar{R}_{12}$.

## § 144. Limite vectoriale

Analiza vectorială este bazată, ca și cea clasică, pe noțiunile de variabilă, funcție și limită. In cazul mărimilor scalare, definițiile și teoremele fundamentale sunt aceleași, iar din faptul că putem oricând raporta vectorii la un sistem de referință, rezultă imediat posibilitatea de a extinde aceste definiții și teoreme și la mărimile vectoriale. S'ar putea trage deci concluzia că o cercetare specială a modului în care se extind proprietățile fundamentale la mărimile vectoriale este inutilă. In realitate ea este indispensabilă deoarece, în primul rând, toate definițiile și operațiile Analizei vectoriale trebue să aibă caracterul invariant față de alegerea sistemului de referință, pe care l-am urmărit sistematic în Algebra vectorială, iar în al doilea rând nu trebue pierdut din vedere că vectorul trebue considerat ca o mărime unitară, componentele sale fiind doar mărimi scalare caracteristice, prin care poate fi determinat în diverse sisteme de referință. In același timp, extinderea noțiunilor și operațiilor de bază ale Analizei la vectori variabili pune în evidență semnificația geometrico-fizică a acestor noțiuni și operații și trebue efectuată în lumina acestei semnificații.

In cele ce urmează mărimile vor fi considerate în spațiul metric euclidian. Fiind dat un vector variabil $\bar{v}$, deci o mulțime de vectori aparținând unei specii date, vom putea considera vectorii $\bar{v}$ ca vectori de poziție în raport cu un punct de reper $O$, punând $\bar{v}=\overline{OM}$.

Din corespondența biunivocă între mulțimea tuturor vectorilor și mulțimea punctelor spațiului rezultă că vom putea reprezenta mulțimea de valori a vectorului variabil $\bar{v}$ printr'o mulțime de puncte $M$ din spațiu, pe care o vom presupune infinită (fig. 129).

Se știe că $A$ este un *punct limită* sau *punct de acumulare* al unei mulțimi de puncte $S$ din spațiu dacă, în orice sferă cu centrul în $A$ există cel puțin un punct, *diferit de* $A$, care aparține mulțimii $S$.

Scanned with OKEN Scanner

In acest caz, în orice sferă cu centrul în $A$ există o infinitate de puncte ale mulțimii $S$. Se poate chiar lua această proprietate ca definiție pentru punctul de acumulare: $A$ este un punct de acumulare, sau punct limită al mulțimii de puncte $S$ din spațiu, dacă orice sferă cu centrul în $A$ conține o infinitate de puncte ale mulțimii $S$.

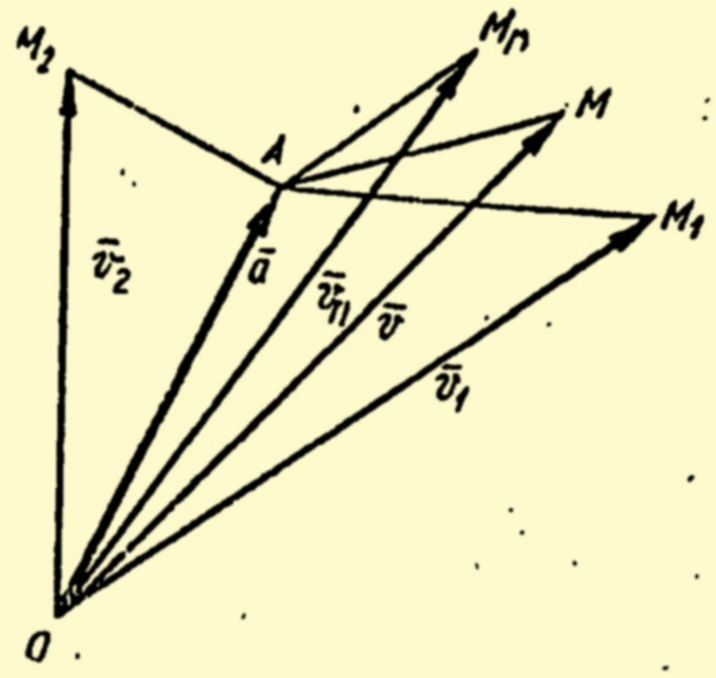


Fig. 129

Vectorial, vom putea exprima prima definiție astfel:

$A$ este un *punct de acumulare*, sau *punct limită* al mulțimii $S$ dacă, pentru orice $\epsilon>0$, există un punct $M\in S$, astfel încât

$$|\overline{MA}|\neq 0 \quad \text{şi} \quad |\overline{MA}|<\epsilon.$$

Însă

$$\overline{MA}=\overline{OA}-\overline{OM}=\bar{a}-v,$$

deci va trebui să avem

$$|\bar{a}-\bar{v}|<\epsilon \quad \text{şi} \quad \bar{a}-\bar{v}\neq 0.$$

Vom spune că vectorul dat $\bar{a}$ este vector limită al vectorului variabil $\bar{v}$, aparținând unei mulțimi $\sum$ de vectori, dacă punctul $A$ este punct limită al mulțimii $S$ de puncte reprezentative ale vectorilor $\bar{v}=\overline{OM}$.

Prin urmare; *vectorul $\bar{a}$ este un vector limită sau vector de acumulare al vectorului variabil $\bar{v}\in\sum$ dacă, pentru orice $\epsilon>0$ dat, există un vector $\bar{v}\in\sum$, diferit de $\bar{a}$ şi astfel încât*

$$|\bar{a}-\bar{v}|<\epsilon. \qquad (8,V)$$

Reprezentarea vectorilor prin vectori de poziție, numită *reprezentare hodografică*, reduce deci noțiunea de vector limită la aceea de punct limită.

In cazul când $A\in S$ şi există un număr pozitiv $\rho$, astfel încât orice sferă cu centrul în $A$ şi cu rază mai mică decât $\rho$ nu mai conține niciun punct al mulțimii înafară de $A$, atunci vom numi $A$ punct *izolat* al mulțimii $S$.

Putem sintetiza aceste considerații asupra relațiilor dintre punctele spațiului şi punctele unei mulțimi $S$ prin definiția următoare:

Un punct $A$ din spațiu, aparținând sau nu unei mulțimi de puncte $S$, se numeşte punct *aderent* al mulțimii $S$, dacă orice sferă cu centrul în $A$ conține cel puțin un punct al mulțimii.

Din cele spuse mai sus rezultă că un punct aderent al mulțimii $S$ este, sau un punct de acumulare (punct limită) al acestei mulțimi, *putând să-i aparțină sau nu*, sau un punct izolat al mulțimii.

Aceste definiții se transpun imediat pentru vectori, având în vedere corespondența biunivocă $v=\overline{OM}$ (în particular $\bar{a}=\overline{OA}$):

Dacă $\bar{a}\in\sum$ şi există un $\rho>0$, astfel încât în orice sferă de rază mai mică decât $\rho$, cu centrul în $A$, să nu mai existe nicio extremitate $M$ a unui vector $\bar{v}=\overline{OM}$, vom spune că vectorul $\bar{a}$ este izolat.

Un vector $\bar{a}$ din spațiu, aparținând sau nu mulțimii de vectori $\sum$, este *vector aderent* al acestei mulțimi, dacă punctul său reprezentativ $A$ este punct aderent al mulțimii $S$ de puncte reprezentative ale vectorilor $\bar{v}\in\sum$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă un vector variabil $\bar{v}$ are un vector limită $\bar{a}$, (fig. 129) putem extrage din mulţimea valorilor sale un şir de vectori

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_n, \ldots, \qquad (9,V),$$

astfel încât $\epsilon > 0$ fiind dat, să existe un întreg $N>0$, cu proprietatea următoare:

$$|\bar{a}-\bar{v}_n|<\epsilon, \quad \text{dacă} \quad n>N. \qquad (10,V),$$

Vom spune atunci că *şirul de vectori (9,V) tinde către vectorul* $\bar{a}$ *şi vom scrie*

$$\lim_{n\to\infty} \bar{v}_n = \bar{a}. \qquad (11,V),$$

Un vector variabil $v$ poate avea mai mulţi vectori limită, după cum o mulţime de puncte $S$ poate avea mai multe puncte limită, ceeace înseamnă că din mulţimea valorilor sale putem extrage mai multe şiruri, care tind către diferiţi vectori determinaţi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$

De exemplu, fie vectorul de poziţie variabil

$$\bar{r}_{mn} = \bar{i}\cos\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n} + \bar{j}\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n} + \bar{k}\cos\frac{\pi}{n},$$

unde $m, n = 1, 2, \ldots$

Vectorul

$$\bar{r}_n = \bar{i}\sin\frac{\pi}{n} + \bar{k}\cos\frac{\pi}{n},$$

este vector limită al vectorului $\bar{r}_{mn}$ şi se obţine făcând pe $m$ să tindă la infinit şi ţinând pe $n$ fix.

Deasemenea vectorul $\bar{k}$ este vector limită al lui $\bar{r}_{mn}$, obţinut făcând pe $n$ să tindă la infinit.

Dând lui $n$ diversele valori întregi posibile, $\bar{r}_n$ ia o infinitate de valori şi deci vectorul $\bar{r}_{mn}$ are o infinitate de vectori limită. Este, dealfel, uşor de figurat atât $\bar{r}_{mn}$, cât şi limitele sale, extremitatea sa fiind pe sfera unitate, cu centrul în origine.

Mulţimea tuturor punctelor spaţiului interioare unei sfere sau unui paralelipiped cu centrul într'un punct $A$ constitue o *vecinătate* a acestui punct [1]).

Orice punct $M$, aparţinând unei vecinătăţi $V_A$ a punctului $A$, se numeşte *vecin* cu $A$.

Punctele $M$, care satisfac condiţia $|\overline{MA}|<\epsilon$ sunt vecine cu $A$, iar acestor puncte le corespund vectori $\bar{v}$ care satisfac condiţia (8,V).

Vom spune că un vector $\bar{v}$ este *vecin* cu un vector $\bar{a}$, dacă punctul său reprezentativ $M$ este vecin cu punctul $A$, reprezentativ al lui $\bar{a}$.

Mulţimea tuturor vectorilor $\bar{v}$ din spaţiu, care îndeplinesc condiţia (8,V)..

$$|\bar{v}-\bar{a}|<\epsilon,$$

---

[1]) In general, vom numi vecinătate a unui punct $A$ orice mulţime *deschisă* de puncte $V_A$ care conţine punctul $A$. O mulţime este deschisă, dacă fiecare punct al ei este centrul unei sfere de rază nenulă, conţinută în întregime în ea.

Scanned with OKEN Scanner

formează o *vecinătate a vectorului* $\bar{v}$. In general, o vecinătate vectorială a unui vector dat $\bar{a}$ este formată din mulţimea tuturor vectorilor $v$ din spaţiu, vecini cu $\bar{a}$, deci ale căror extremităţi $M$ aparţin unei vecinătăţi a lui $A$.

*Când vectorul* $\bar{a}$ *este limita unui vector variabil* $\bar{v}$, *orice vecinătate* $V_{\bar{a}}$ *a lui* $\bar{a}$ *conţine o infinitate de vectori* $\bar{v}$. *De exemplu, există o infinitate de vectori* $v \in \sum$, *care satisfac condiţia* (8,V), *deci ale căror extremităţi* $M$ *sunt cuprinse în sfera de rază* $\epsilon$, *cu centrul în* $A$.

In adevăr, dacă în această sferă ar exista numai un număr finit de puncte $M$, extremităţi ale vectorilor $\bar{v}$, putem să le determinăm şi să trasăm apoi o sferă cu o rază suficient de mică $\rho < \epsilon$, care să nu mai conţină niciun punct $M$, excluzând eventual punctul $A$ însuşi. In acest caz, punctul $A$ nu ar mai fi limita punctelor $M$, contrar ipotezei.

*Mulţimea tuturor vectorilor din spaţiu, al căror modul este mai mic decât un număr dat* $\epsilon > 0$, *constitue o vecinătate a vectorului nul.*

In adevăr, dacă $|\bar{v}| < \epsilon$, vom putea scrie

$$|\bar{v} - \bar{0}| < \epsilon$$

deci condiţia (8,V) este îndeplinită, aceşti vectori admit vectorul nul ca vector limită şi mulţimea lor este o vecinătate a vectorului nul.

Vom numi *vector infinit mic* orice element dintr'o mulţime de vectori vecini cu vectorul nul, dacă $|\bar{v}| < \epsilon$.

Prin urmare, *un vector infinit mic nu este un anumit vector având un modul foarte mic*, ci un element dintr'o mulţime de vectori aparţinând oricărei vecinătăţi a vectorului nul.

*Un vector infinit mic este un vector variabil, având modulul mai mic decât orice număr* $\epsilon > 0$, deci care îndeplineşte condiţia

$$|\bar{v}| < \epsilon.$$

Introducerea acestor noţiuni în teoria mărimilor fizice, cu toată înfăţişarea lor abstractă, este necesară pentru a înţelege proprietăţile mărimilor fizice care caracterizează o porţiune arbitrar de mică dintr'un mediu fizic într'un fenomen, deci pentru a se putea stabili *relaţiile locale* între mărimile fizice caracteristice unui fenomen.

Vectorul

$$\Delta\bar{v} = \bar{a} - v, \text{ cu } |\Delta\bar{v}| < \epsilon, \qquad (12,V)$$

care exprimă diferenţa vectorială între un vector variabil $\bar{v}$ şi limita sa $\bar{a}$, este un vector infinit mic. Termenul vector infinit mic (ca însăşi noţiunea de infinit mic), constitue o locuţiune pentru a exprima faptul că mulţimea valorilor unui vector variabil $\bar{v}$ are ca vector limită vectorul nul.

*Un vector infinit mic nu este un vector determinat, extrem de mic, ci un element variabil al unei mulţimi de vectori* $\bar{v}$, *pentru care* $|\bar{v}| < \epsilon$; *de exemplu, al unui şir de vectori* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \ldots$, *care tinde către vectorul nul:*

$$\lim_{n \to \infty} \bar{v}_n = 0.$$

Dacă notăm

$$\bar{v} = \bar{v}_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + \bar{v}_3 \bar{k}$$

Scanned with OKEN Scanner

un vector variabil infinit mic, vom avea, $\epsilon > 0$ fiind dat,

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} < \epsilon,$$

de unde

$$|v_1| < \epsilon, \ |v_2| < \epsilon, \ |v_3| < \epsilon.$$

*Componentele unui vector infinit mic sunt infinit mici şi reciproc.*

Proprietăţile fundamentale ale limitelor scalare se regăsesc şi la limitele vectoriale.

De exemplu: *Limita sumei unui număr finit de vectori variabili este egală cu suma limitelor acestor vectori.*

In adevăr, fie $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p$, $p$ vectori variabili având respectiv ca limite vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p$. Vom scrie deci:

$$|\bar{v}_k - \bar{a}_k| < \frac{\epsilon}{p}; \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{13,V}$$

$\epsilon$ fiind dat, adică din mulţimea de valori luate de $\bar{v}_k$ putem extrage una care îndeplineşte inegalitatea (13,V). Adunând membru cu membru aceste inegalităţi pentru $k = 1, 2, \ldots, p$, vom avea:

$$|\bar{v}_1 - \bar{a}_1| + |\bar{v}_2 - \bar{a}_2| + \cdots + |\bar{v}_p - \bar{a}_p| < \frac{\epsilon}{p} + \frac{\epsilon}{p} + \cdots + \frac{\epsilon}{p} = \epsilon.$$

Aplicând proprietatea modulului sumei de a fi mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor, deducem:

$$|\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \cdots + \bar{v}_p - (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_p)| < \epsilon,$$

deci proprietatea enunţată.

In mod analog se stabilesc proprietăţile limitelor produsului scalar sau vectorial a doi vectori variabili, etc. (Exerciţii).

## § 145. Limite de funcţii de o variabilă scalară

Noţiunea de variabilă este legată de aceea de corespondenţă între două mulţimi. Când spunem că $x$ variază în intervalul (0,1), punem în corespondenţă un element oarecare $x$ din mulţimea punctelor acestui interval cu un număr real din mulţimea numerelor cuprinse între 0 şi 1. Când spunem că $x$ ia un şir de valori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dintr'un interval $(a, b)$, punem în corespondenţă un element oarecare $x_n$ al acestei mulţimi de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, cu numărul $n$ din mulţimea numerelor naturale,

Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru vectori variabili. Ea a fost folosită în reprezentarea vectorilor ca vectori de poziţie, deci prin extremităţile $M$ ale vectorilor $\overline{OM} = \bar{v}$. Un vector variabil pune astfel în corespondenţă o mulţime de vectori $\bar{v}$ cu o mulţime de puncte $M$ din spaţiu. Un şir de vectori $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n, \ldots$, pune în corespondenţă mulţimea acestor vectori cu mulţimea numerelor naturale şi putem considera vectorul $\bar{V}_n$ ca o funcţie de $n$.

Scanned with OKEN Scanner

*Putem extinde această noţiune de variabilă şi la mulţimi formate din alte mărimi, de exemplu, la mulţimi de tensori. Deasemenea, putem extinde convenabil şi noţiunea de limită*, procedând prin analogie cu limitele vectoriale sau folosind măsura mărimilor, etc.

Dacă între două mulţimi de mărimi $A$ şi $B$, există o corespondenţă

$$B = f(A)$$

şi dacă $A$ are o limită $A_0$, atunci valorile lui $B$, corespunzătoare lui $A$, pot avea şi ele o limită $B_0$. In acest caz, *corespondenţa între $A$ şi $B$ ne conduce să nu considerăm limita $B_0$ a lui $B$ independent de limita $A_0$ a lui $A$, ci să punem în corespondenţă aceste limite* (presupunând definită noţiunea de limită pentru mărimile considerate).

Spunem, de exemplu, că şirul de valori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tinde către $x$ atunci când facem ca şirul de numere $1, 2, \ldots, n, \ldots$ să tindă către $\infty$.

In cele ce urmează, vom considera *limite de funcţii vectoriale şi scalare*, adică limite de mărimi vectoriale şi scalare, care sunt funcţii de alte mărimi, în particular de o mărime scalară sau de o variabilă numerică, definită într'un interval.

Fiind dată o funcţie vectorială $\overline{V}(t)$, definită într'un interval $(a, b)$, şi $t_0$ un punct din $(a, b)$, vom spune că vectorul $\overline{a}$ este *o limită valorilor a acestei funcţii, când $t$ tinde către $t_0$*, dacă pentru orice $\epsilon > 0$ dat, există un $\eta > 0$, astfel încât

$$|\overline{V}(t) - \overline{a}| < \epsilon, \quad \text{dacă} \quad |t - t_0| < \eta. \tag{14,V}$$

Vom scrie atunci

$$\lim_{t \to t_0} \overline{V}(t) = \overline{a}$$

Se vede că vectorii $\overline{V}(t)$ fac parte din vecinătatea vectorului $\overline{a}$, corespunzătoare sferei de rază $\epsilon$, de îndată ce $t$ diferă de $t_0$ cu mai puţin decât $\eta$, adică de îndată ce $t$ intră în intervalul cu centrul în $t_0$ şi de amplitudine $2\eta$.

O definiţie analoagă se aplică şi funcţiunilor scalare.

Scalarul $p$ este o *limită a valorilor funcţiei scalare* $\sigma(t)$, când $t$ tinde către $t_0$, dacă, pentru orice $\epsilon > 0$ dat, există un $\eta > 0$, astfel ca

$$|\sigma(t) - p| < \epsilon, \quad \text{dacă} \quad |t - t_0| < \eta.$$

Vom scrie atunci

$$\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = p.$$

Fiind dat un număr $N > 0$, oricât de mare, dacă există un $\eta > 0$, astfel încât

$$|\overline{V}(t)| > N \quad \text{pentru} \quad |t - t_0| < \eta,$$

spunem că $|\overline{V}(t)|$ tinde spre infinit, când $t$ tinde către $t_0$, sau că $\overline{V}(t)$ tinde în modul spre infinit.

O funcţie vectorială $\overline{V}(t)$ este *mărginită* în intervalul $a \leqq t \leqq b$, dacă există un număr $N > 0$, astfel încât

$$|\overline{V}(t)| < N \quad \text{pentru} \quad a \leqq t \leqq b.$$



Scanned with OKEN Scanner

Se poate ca o funcţie vectorială $\overline{V}(t)$ să tindă către o limită, numai pentru valori ale lui $t$ *crescătoare* către $t_0$, sau să obţinem limite diferite pentru $t$ crescător sau descrescător. Vom spune că vectorul $\overline{L}^+$ este *limita la dreapta* pentru $t=t_0$ a unei funcţii vectoriale $\overline{V}(t)$, dacă

$$|\overline{V}(t)-\overline{L}^+|<\epsilon \text{ pentru } |t-t_0|<\eta, \text{ cu } t>t_0, \qquad (15,V)$$

deci când $t$ tinde spre $t_0$ numai prin valori descrescătoare. Deasemenea, vectorul $\overline{L}^-$ este *limită la stânga* pentru $t=t_0$ a unei funcţii vectoriale $\overline{V}(t)$, dacă

$$|\overline{V}(t)-\overline{L}^-|<\epsilon \text{ pentru } |t-t_0|<\eta, \text{ cu } t<t_0. \qquad (16,V)$$

Pe scurt, vom exprima aceste definiţii scriind

$$\overline{L}^+=\lim_{t\to t_0+0}\overline{V}(t);\quad \overline{L}^-=\lim_{t\to t_0-0}\overline{V}(t)$$

Din fig. 130 se vede că $\overline{V}(t)$ admite atât o limită la stânga

$$\overline{L}^-=\overline{OA}^-,$$

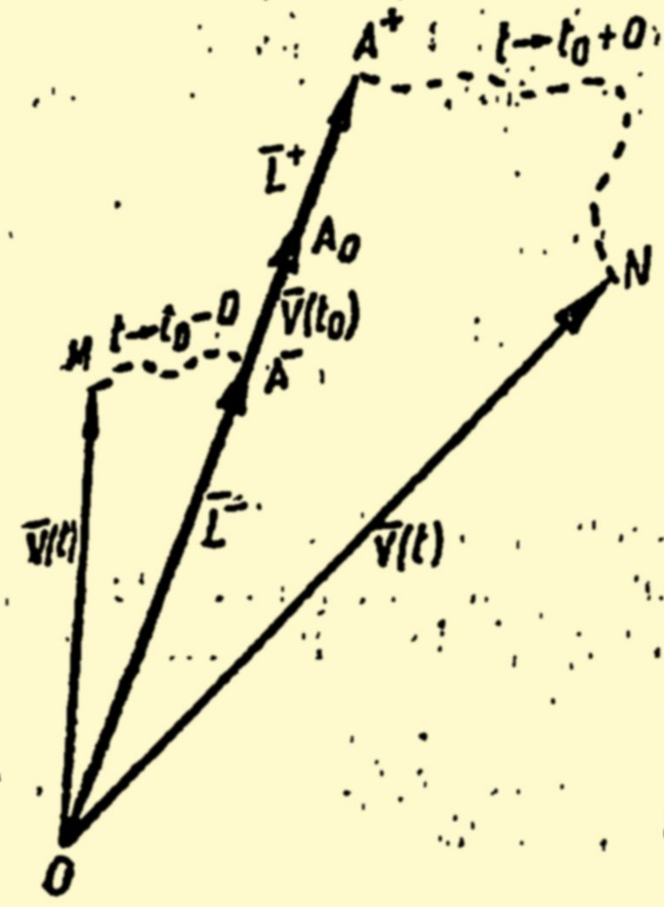


Fig. 130

cât şi o limită la dreapta

$$\overline{L}^+=\overline{OA}^+.$$

Deaseménea, $\overline{V}(t)$ este determinată şi pentru $t=t_0$, luând valoarea

$$\overline{V}(t_0)=\overline{OA}_0.$$

Cele două limite $\overline{L}^+$ şi $\overline{L}^-$ sunt diferite între ele şi diferite de valoarea funcţiei în punctul $t=t_0$.

Dacă limitele $\overline{L}^+$ şi $\overline{L}^-$ există şi sunt diferite între ele, atunci una, cel puţin, diferă de valoarea $\overline{V}(t_0)$ a funcţiei $\overline{V}(t)$ în $t=t_0$, dacă $\overline{V}(t)$ este definită în $t_0$.

Se poate chiar ca $\overline{L}^+$ şi $\overline{L}^-$ să existe şi să avem

$$\overline{L}^+=\overline{L}^-\neq\overline{V}(t_0).$$

In sfârşit, este posibil ca $\overline{V}(t)$ să nu tindă către nicio limită, când $t$ tinde spre $t_0$, deşi valoarea funcţiei $\overline{V}(t_0)$ este determinată, sau ca $\overline{L}^+$ şi $\overline{L}^-$ să existe, dar $\overline{V}(t_0)$ să nu fie determinată.

Aceste proprietăţi, întâlnite şi la funcţiile scalare, deşi par teoretice, îşi găsesc aplicaţii în studiul unor fenomene fizice şi în geometria diferenţială.

Scanned with OKEN Scanner

## § 146. Continuitatea şi discontinuitatea funcţiilor vectoriale

O funcţie vectorială $\overline{V}(t)$ fiind definită într'un interval $a<t<b$, fie $t_0$ un punct aparţinând intervalului $(a, b)$. Spunem că $\overline{V}(t)$ este continuă pentru $t=t_0$ dacă, $\epsilon>0$ fiind dat, există un $\eta>0$, astfel încât

$$|\overline{V}(t)-\overline{V}(t_0)|<\epsilon, \text{ când } |t-t_0|<\eta. \qquad (17,V)$$

Comparând această definiţie cu (14,V), se vede că:

*O funcţie $\overline{V}(t)$ este continuă într'un punct $t_0$, dacă valoarea sa $\overline{V}(t_0)$ în acest punct este limita valorilor funcţiei, când $t$ tinde către $t_0$.*

In adevăr, vom avea în cazul continuităţii

$$\overline{a}=\overline{V}(t_0), \text{ deci } \lim_{t\to t_0}\overline{V}(t)=\overline{V}(t_0). \qquad (18,V)$$

O funcţie vectorială, continuă în fiecare punct aparţinând intervalului $(a, b)$, se numeşte *continuă în intervalul $(a, b)$*. Studiul proprietăţilor funcţiilor vectoriale cere precizarea noţiunilor utilizate. Astfel, vom spune că un interval este *deschis*, dacă este considerat fără extremităţile sale $a$, $b$. In acest caz îl vom nota $(a, b)$, iar un punct oarecare $t$ al acestui interval deschis va fi definit prin dubla inegalitate $a<t<b$.

Un interval este *închis*, dacă va conţine şi extremităţile sale $a$, $b$. Atunci îl vom nota $[a, b]$, iar un punct oarecare din $[a, b]$ va fi definit de $a\leq t\leq b$. Se spune că un punct $t$ este „interior" unui interval închis $[a, b]$, dacă aparţine intervalului deschis $(a, b)$, deci dacă $a<t<b$.

Uneori, este necesar să considerăm intervalele închise la o extremitate şi deschise la cealaltă: Vom spune că un interval este *închis la stânga*, dacă va conţine extremitatea stângă $a$ şi vom nota $[a, b)$. In acest caz orice punct al său este definit de inegalitatea $a\leq t<b$. Deasemenea, intervalul $(a, b]$ este *închis la dreapta*, dacă va conţine extremitatea $b$, orice punct al său fiind definit de $a<t\leq b$.

Dacă o funcţie $\overline{V}(t)$ nu este continuă în punctul $t_0$, vom spune că este *discontinuă* în acel punct.

Ţinând seamă de definiţia continuităţii, o funcţie $\overline{V}(t)$ este discontinuă în $t_0$, dacă nu îndeplineşte condiţia (18,V), deci dacă

$$\lim_{t\to t_0}\overline{V}(t)\neq\overline{V}(t_0);$$

*în cazul când limita există*, dar se poate şi ca limita să nu existe. Dacă limitele la dreapta şi la stânga există, vom nota

$$\overline{L}^{+}=\lim_{t\to t_0+0}\overline{V}(t)=\overline{V}(t_0+0);$$

$$\overline{L}^{-}=\lim_{t\to t_0-0}\overline{V}(t)=\overline{V}(t_0-0).$$

Un punct în care $\overline{V}(t)$ admite o limită la dreapta şi o limită la stânga, una cel puţin din aceste limite fiind diferită de valoarea funcţiei în $t_0$, se numeşte *punct de discontinuitate de prima specie*.

Scanned with OKEN Scanner

Intr'un astfel de punct avem deci cel puţin una din relaţiile

$$\overline{V}(t_0+0)\neq\overline{V}(t_0),\quad \overline{V}(t_0-0)\neq\overline{V}(t_0).$$

Orice punct de discontinuitate, care nu este de prima specie, se numeşte *de a doua specie.*

Astfel, dacă de exemplu $|\overline{V}(t_0-0)|$ sau $|\overline{V}(t_0+0)|$ sunt infinite, sau dacă nu există limite la dreapta, ori la stânga, discontinuitatea este de a doua specie.

Intr'un punct de discontinuitate de prima specie vom numi vectorul

$$\Delta^+\overline{V}(t_0)=\overline{V}(t_0+0)-\overline{V}(t_0),$$

*saltul la dreapta* al funcţiei $\overline{V}(t)$ în $t_0$. In mod analog, vectorul

$$\Delta^-\overline{V}(t_0)=\overline{V}(t_0)-\overline{V}(t_0-0)$$

defineşte *saltul la stânga* al lui $\overline{V}(t)$ în $t_0$.

*Dacă într'un punct* $t_0$

$$\overline{V}(t_0+0)=\overline{V}(t_0-0)=\overline{V}(t_0),$$

*funcţia este continuă în acel punct.*

In adevăr, pentru $t>t_0$

$$|\overline{V}(t)-\overline{V}(t_0)|=|\overline{V}(t)-\overline{V}(t_0+0)|<\epsilon,\ \text{dacă}\ |t-t_0|<\eta,$$

iar pentru $t<t_0$

$$|\overline{V}(t)-\overline{V}(t_0)|=|\overline{V}(t)-\overline{V}(t_0-0)|<\epsilon,\ \text{dacă}\ |t-t_0|<\eta.$$

Prin urmare

$$\lim_{t\to t_0}\overline{V}(t)=\overline{V}(t_0)$$

şi funcţia este continuă în $t_0$, conform definiţiei. Să observăm că, dacă

$$\overline{V}(t_0+0)=\overline{V}(t_0-0)\neq\overline{V}(t_0),$$

funcţia $\overline{V}(t)$ nu este continuă în $t_0$, ci are o discontinuitate de prima specie.

Dacă într'un interval $(a,b)$ o funcţie $\overline{V}(t)$ este continuă, înafară de un număr finit de puncte $t_1,t_2,\ldots,t_n$ unde admite discontinuităţi de prima specie, vom zice că este o funcţie *continuă pe porţiuni* în $(a,b)$.

Din cele de mai sus rezultă că proprietăţile de bază ale funcţiilor continue scalare se extind la funcţiile vectoriale de o variabilă scalară.

Se poate arăta că aceste proprietăţi se extind şi la funcţiile de două, trei sau $n$ variabile, folosind un limbaj geometric în plan, în spaţiu sau în spaţiul cu $n$ dimensiuni.

*Funcţiile vectoriale de un parametru scalar t se pot reprezenta geometric considerând vectorul* $\overline{V}(t)$ *ca un vector de poziţie.*

Locul geometric al extremităţii $M$ a vectorului $\overline{OM}=\overline{V}(t)$ constituie *hodograful* funcţiei vectoriale $\overline{V}(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

In cazul funcţiilor continue, hodograful este deobicei o curbă continuă ca în fig. 131, dar el se poate reduce şi la un punct pentru un vector $\overline{V}(t)$ constant, sau la suportul vectorului $\overline{OM}$ pentru un vector de direcţie constantă.

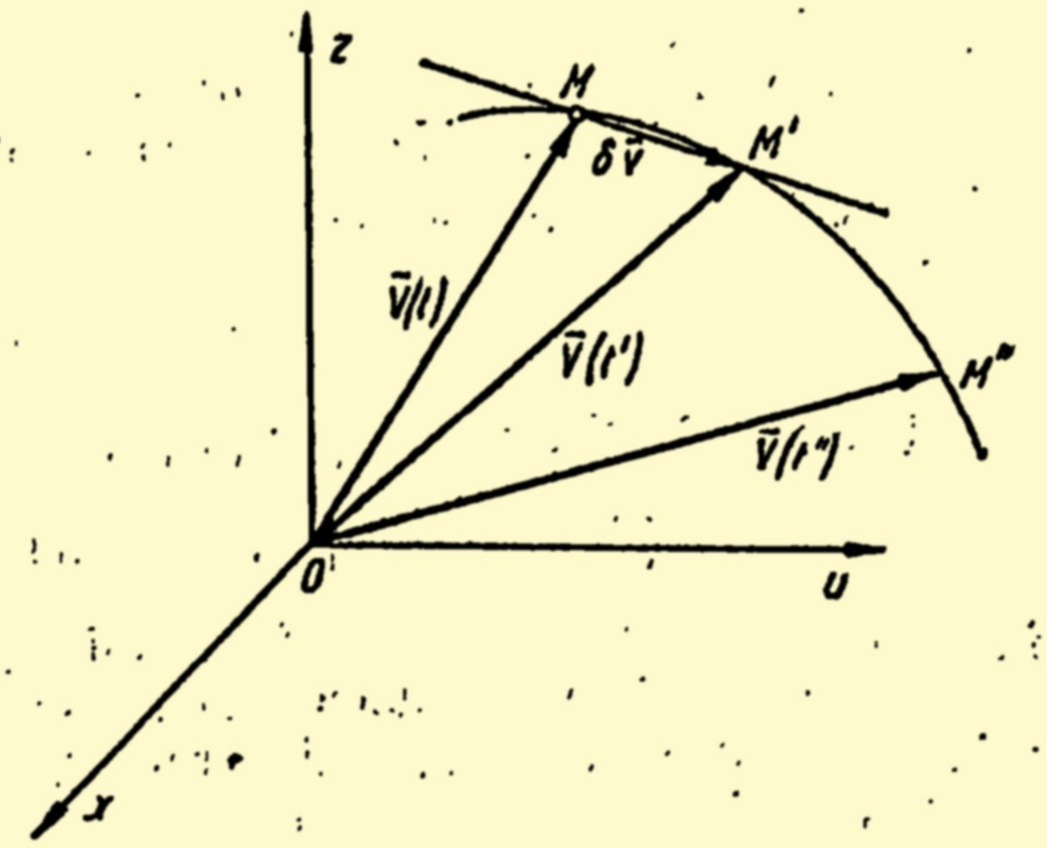



Fig. 131

Reprezentarea hodografică este foarte sugestivă şi permite apropierea între studiul curbelor şi al funcţiilor vectoriale $\overline{V}(t)$.

In cazul unei funcţii continue pe porţiuni, fig. 132 arată ce înfăţişare ia hodograful într'un punct de discontinuitate de prima specie $M$. Se vede că

$$\overline{V}(t_0-0)=\overline{OM}^{-}\neq\overline{V}(t_0+0)=\overline{OM}^{+}$$

şi că

$$\overline{OM}^{-}\neq\overline{OM};\quad \overline{OM}^{+}\neq\overline{OM}.$$

In punctul $N$, avem

$$\overline{V}(t^0-0)=\overline{ON}^{-};$$
$$\overline{V}(t_0+0)=\overline{ON}^{+},$$

iar

$$\overline{ON}=\frac{\overline{ON}^{-}+\overline{ON}^{+}}{2}.$$

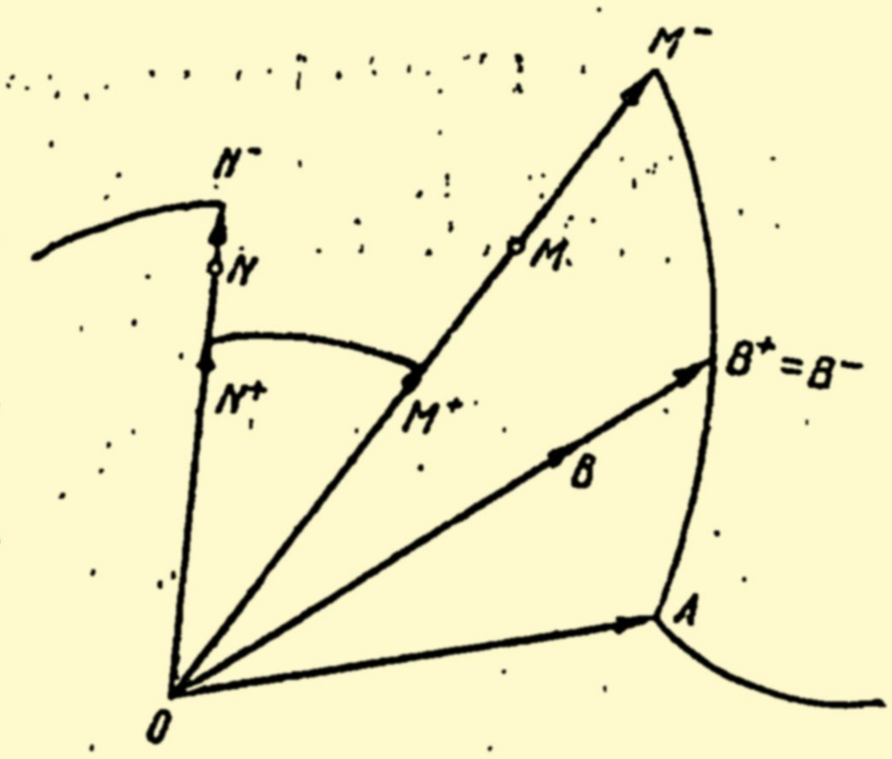



Fig. 132

Uneori, în punctele de discontinuitate funcţia nu este definită, deoarece este definită pe porţiuni, adică pe intervalele deschise pe care e continuă. In acest caz vom complecta definiţia acestei funcţii, dându-i în aceste puncte valori arbitrare, când consideraţii de ordin teoretic sau fizic nu impun alegerea unor anumite valori.

Astfel, în general, într'un punct de discontinuitate de prima specie, în unele aplicaţii, se alege ca valoare a funcţiei semisuma valorilor la stânga şi la dreapta, punând

$$\overline{V}(t)=\frac{\overline{V}(t-0)+\overline{V}(t+0)}{2}.$$

Pe hodograf, aceasta revine la a lua $N$ la mijlocul lui $\overline{N^{-}N^{+}}$. In sfârşit în punctul $B$ se prezintă o discontinuitate de prima specie, în care saltul este nul, dar funcţia ia o valoare $\overline{OB}$, diferită de limitele sale la stânga şi la dreapta $\overline{OB}^{+}=\overline{OB}^{-}$.

Introducerea hodografului ne permite să considerăm şi puncte variabile ca funcţii de un parametru.

Scanned with OKEN Scanner

Un punct $M$, funcţie continuă de $t$, defineşte o traiectorie, o curbă (fig. 131). Luând un punct de reper $O$, dacă punctului $M(t)$ îi asociem vectorul de poziţie $\overline{OM}=\overline{V}(t)$, curba descrisă de $M$ va fi hodograful lui $\overline{V}(t)$. Deşi vectorul $\overline{V}(t)$ depinde de alegerea lui $O$, curba este independentă de acest punct de reper. Vom putea preciza geometric noţiunea de *punct, funcţie continuă de t*, observând că diferenţa $M(t')-M(t)$ a valorilor funcţiei $M(t)$ pentru două valori vecine $t$ şi $t'$ se reprezintă pe hodograf prin vectorul $\overline{MM'}$. Vom pune deci:

$$M(t')-M(t)=\overline{MM'}=\overline{V}(t')-\overline{V}(t).$$

Vectorul $\overline{MM'}$ este independent de alegerea lui $O$ şi vom putea scrie

$$|M(t')-M(t)|=|\overline{V}(t')-\overline{V}(t)|<\epsilon, \text{ dacă } |t'-t|<\eta,$$

în cazul când $\overline{V}(t)$ este o funcţie continuă.

Cu alte cuvinte, un punct $M(t)$ este o funcţie continuă de $t$, în intervalul $(a,b)$, dacă, $\epsilon>0$ fiind dat arbitrar, există un $\eta>0$, astfel încât

$$|\overline{MM'}|<\epsilon, \quad \text{dacă} \quad |t'-t|<\eta$$

pentru orice $t$ din $(a,b)$.

## § 147. Derivata unui vector variabil $\overline{V}(t)$

Dacă $\overline{V}(t)$ este un vector liber, funcţie continuă de o variabilă scalară în intervalul $(a,b)$, (fig. 133), diferenţa

$$\delta\overline{V}=\overline{V}(t+\delta t)-\overline{V}(t) \qquad (19,V)$$

a valorilor sale pentru $t$ şi $t+\delta t$ este un vector, în fiecare punct $t$.

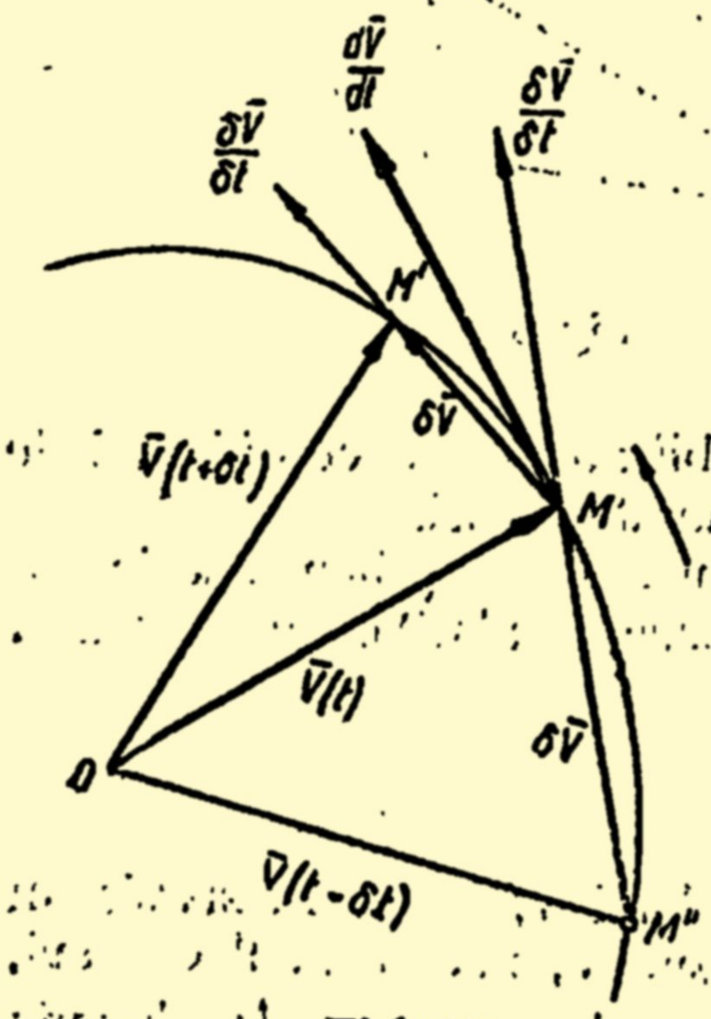



Fig. 133.

Dacă $\epsilon>0$ este dat arbitrar, există un $\eta>0$, astfel încât

$$|\delta\overline{V}|=|\overline{V}(t+\delta t)-\overline{V}(t)|<\epsilon,$$

când $|\delta t|<\eta$.

Pe de altă parte, raportul

$$\frac{\delta\overline{V}}{\delta t}=\frac{1}{\delta t}\delta\overline{V}$$

este un vector, pe care hodograful ne permite să-l reprezentăm prin vectorul $\frac{1}{\delta t}\overline{MM'}$ proporţional cu $\overline{MM'}$, în punctul $M$.

Când $\epsilon>0$ este ales destul de mic, $\overline{MM'}$ va fi deasemenea destul de mic, Dacă alegem pe $\delta t$ suficient de mic, ceeace putem face din momentul ce $\eta$ este determinat, vectorul $\frac{\delta\overline{V}}{\delta t}$ poate avea un modul destul de mare, deoarece $\frac{1}{\delta t}$ este un număr mare.

Scanned with OKEN Scanner

Când $\delta t$ tinde către zero, raportul $\frac{\delta \overline{V}}{\delta t}$, care este un vector variabil cu $\delta t$, poate tinde către o limită, care este un vector.

*Vom numi derivata vectorului $\overline{V}(t)$ în punctul $t$, vectorul*

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overline{V}(t+\delta t) - \overline{V}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \overline{V}}{\delta t}, \qquad (20,V)$$

*în cazul când această limită există.*

Prin urmare, ţinând seamă de definiţia limitei vectoriale, formula (20,V) exprimă relaţiile:

$$\left| \frac{\delta \overline{V}}{\delta t} - \frac{d\overline{V}}{dt} \right| < \epsilon, \quad \text{când} \quad |\delta t| < \eta. \qquad (21,V)$$

In reprezentarea hodografică, vectorul derivată $\frac{d\overline{V}}{dt}$ este limita vectorului $\frac{1}{\delta t}\overline{MM'}$, aşezat pe coarda $\overline{MM'}$, când $M'$ tinde către $M$. Prin urmare:

*Derivata unui vector variabil $\overline{V}(t)$ este un vector tangent la hodograful lui $\overline{V}(t)$ în punctul $M$.*

Existenţa derivatei înseamnă deci existenţa unei tangente unice şi bine determinate la curba hodograf a lui $\overline{V}(t)$, în punctul considerat.

*Vectorul derivat $\frac{d\overline{V}}{dt}$ este orientat în sensul deplasării punctului mobil $M$ pe hodograf, corespunzător creşterii parametrului $t$.*

In adevăr, fie $M'$ un punct vecin lui $M$ corespunzând parametrului $t+\delta t$, cu $\delta t > 0$.

Vectorul $\frac{1}{\delta t}\delta \overline{V}$ are orientarea lui $\overline{MM'}$, deci este orientat în sensul deplasării lui $M$.

Dacă, dimpotrivă $M''$ este un punct înainte de $M$, corespunzător lui $t+\delta t$ cu $\delta t < 0$, vectorul $\frac{1}{\delta t}\delta \overline{V}$ are orientarea opusă lui $\delta \overline{V} = \overline{MM''}$, deci este orientat în sensul deplasării lui $M$.

Trecând la limită, dacă facem pe $M'$, $M''$ să tindă către $M$, raportul îşi păstrează orientarea şi deci $\frac{d\overline{V}}{dt}$ are sensul deplasării lui $M$ pe hodograf.

Relaţia (21,V) arată că vectorul

$$\bar{\epsilon}(t) = \frac{\delta \overline{V}}{\delta t} - \frac{d\overline{V}}{dt}$$

poate fi făcut în modul mai mic decât $\epsilon$, dacă $|\delta t| < \eta$. Deducem imediat egalitatea

$$\delta \overline{V} = \frac{d\overline{V}}{dt}\delta t + \bar{\epsilon}(t)\delta t,$$

unde

$$|\bar{\epsilon}(t)| < \epsilon, \quad \text{când} \quad |\delta t| < \eta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul $\delta\overline{V}$ fiind infinit mic în sensul definiţiei date mai sus, deci fiind unul oarecare dintr'o mulţime de vectori, de module mai mici decât orice număr $\epsilon>0$, vom nota *partea sa principală* cu $d\overline{V}$:

$$d\overline{V}=\frac{d\overline{V}}{dt}\,\delta t$$

Vom numi $d\overline{V}$ *diferenţiala vectorului* $\overline{V}(t)$.

Cum, pe de altă parte, diferenţiala variabilei independente este chiar creşterea sa, vom putea pune

$$\delta t=dt$$

şi expresia diferenţialei $d\overline{V}$ va deveni

$$d\overline{V}=\frac{d\overline{V}}{dt}\,dt=\overline{V}'(t)\,dt, \qquad (22,V)$$

dacă vom folosi notaţia $\overline{V}'(t)$ pentru derivate ca în Analiza scalară.

*Relaţia* (22,V) *ne permite să considerăm derivata ca un raport de diferenţiale*, deoarece simplificând prin $dt$ în membrul al doilea, ea devine o identitate.

*Vom putea deci trece dela derivate la diferenţiale şi invers, înmulţind şi împărţind prin dt.*

Semnificaţia geometrică a diferenţialei rezultă imediat din fig. 133. Deoarece $\overline{V}'(t)$ reprezintă un vector tangent la hodograf, *diferenţiala* $d\overline{V}$ *reprezintă un vector elementar tangent la hodograful lui* $\overline{V}(t)$ *în punctul M, orientat în sensul deplasării acestui punct când t creşte.*

Pin *vector elementar* vom înţelege un vector de direcţie determinată şi având modulul arbitrar de mic, deci un vector infinit mic în sensul definiţiei date, având o direcţie determinată.

## § 148. Reprezentarea cartezlană a derivatei şi diferenţialei

Raportând vectorul $\overline{V}(t)$ la un sistem de referinţă cartezian, definit prin vectorii de bază $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, vom putea scrie

$$\overline{V}(t)=V_1(t)\,\overline{u}+V_2(t)\,\overline{v}+V_3(t)\,\overline{w}.$$

Din definiţia derivatei vectoriale, deducem imediat formula

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{dV_1}{dt}\,\overline{u}+\frac{dV_2}{dt}\,\overline{v}+\frac{dV_3}{dt}\,\overline{w}, \qquad (23,V)$$

deci: *Componentele derivatei* $\frac{d\overline{V}}{dt}$ *sunt egale cu derivatele componentelor vectorului* $\overline{V}(t)$ *pe cele trei direcţii fundamentale.*

In particular, când triedrul este definit prin versorii ortogonali $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, vom avea

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{dV_1}{dt}\,\overline{i}+\frac{dV_2}{dt}\,\overline{j}+\frac{dV_3}{dt}\,\overline{k}, \qquad (24,V)$$

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentarea hodografică arată că $\frac{dV_1}{dt}$, $\frac{dV_2}{dt}$, $\frac{dV_3}{dt}$ *sunt componentele vectorului tangent la hodograf în M.*

In acelaşi timp, diferenţiala $d\bar{V}$ se exprimă prin formula

$$d\bar{V}=dV_1\bar{u}+dV_2\bar{v}+dV_3\bar{w}, \qquad (24',V)$$

deci $dV_1$, $dV_2$, $dV_3$ sunt componentele vectorului elementar tangent la hodograf în $M$.

Deoarece

$$dV_1=V_1'dt;\ dV_2=V_2'dt;\ dV_3=V_3'dt$$

se vede şi pe această cale că vectorul elementar, având componentele proporţionale cu $V_1'$; $V_2'$, $V_3'$ este determinat ca direcţie.

Să considerăm, în particular, vectorul de poziţie $\bar{r}(t)$ al unui punct variabil, care descrie o traiectorie $C$ şi să presupunem că această traiectorie este o curbă având o tangentă unică în fiecare punct.

Derivata $\frac{d\bar{r}}{dt}$ va reprezenta un vector tangent la $C$, orientat în sensul mişcării şi vom avea:

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k};$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\bar{i}+\frac{dy}{dt}\bar{j}+\frac{dz}{dt}\bar{k}. \qquad (25,V)$$

Prin urmare:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},$$

*sunt componentele unui vector tangent la curba*

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

In cazul când $t$ reprezintă timpul, Cinematica arată că $\frac{d\bar{r}}{dt}$ reprezintă vectorul viteză în mişcarea punctului $M$ pe traiectoria $C$.

In reprezentarea carteziană nu este obligatoriu să se folosească triedrul ortogonal $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Aplicaţiile arată chiar că, uneori, este indicată alegerea unui sistem de referinţă oblic.

**Exemplu:** *Să se studieze vectorul variabil*

$$\bar{V}(t)=\bar{a}\cos t+\bar{b}\sin t,$$

*unde* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *sunt vectori constanţi.*

Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt liniar dependenţi, vom pune

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}$$

şi vom avea

$$\bar{V}(t)=\bar{a}(\cos t+\lambda\sin t).$$

Vectorul $\bar{V}(t)$ are direcţia fixă a lui $\bar{a}$, deci nu variază decât în modul

$$\bar{V}'(t)=\bar{a}(\lambda\cos t-\sin t),$$

deci derivata este un vector paralel cu vectorul dat.

Scanned with OKEN Scanner

Cum, orice expresie de forma $p\cos t+q\sin t$ se poate pune sub forma

$$p\cos t+q\sin t=k\cos(t+\varphi),$$

unde $k$ și $\varphi$ sunt doi parametri, vom putea scrie

$$\bar{V}(t)=k\bar{a}\cos(t+\varphi).$$

Dacă alegem ca axă $Ox$ direcția versorului lui $\bar{a}$, vârful vectorului $\bar{V}(t)$ va descrie pe această axă o mișcare vibratorie dată de formula

$$\bar{V}(t)=k\bar{a}\cos(t+\varphi),$$

iar vârful lui $\bar{V}'(t)$ va exprima în fiecare moment $t$ viteza în această mișcare.

In cazul general, când $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt liniar independenți, vectorul $\bar{V}(t)$ rămâne paralel cu planul definit de $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Hodograful vectorului $\bar{V}(t)$ este o curbă în planul $(\bar{a}, \bar{b})$. Dacă alegem ca vectori fundamentali pe $\bar{a}$ și $\bar{b}$ în acest plan (fig. 134), vom putea considera pe $\bar{V}(t)$ ca vector de poziție și vom avea

$$\bar{V}(t)=x\bar{a}+y\bar{b}=\bar{a}\cos t+\bar{b}\sin t,$$

de unde

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

dacă $a$, $b$ reprezintă modulele lui $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Hodograful este o elipsă raportată la doi diametri conjugați, ceeace se poate deduce din reprezentarea parametrică obținută. Se poate, însă, obține același rezultat pe cale vectorială. In adevăr, să considerăm punctul $M_1$ corespunzător unei valori $t$ a parametrului și punctul $M_2$ corespunzător valorii $t+\frac{\pi}{2}$. Vectorii de poziție vor fi

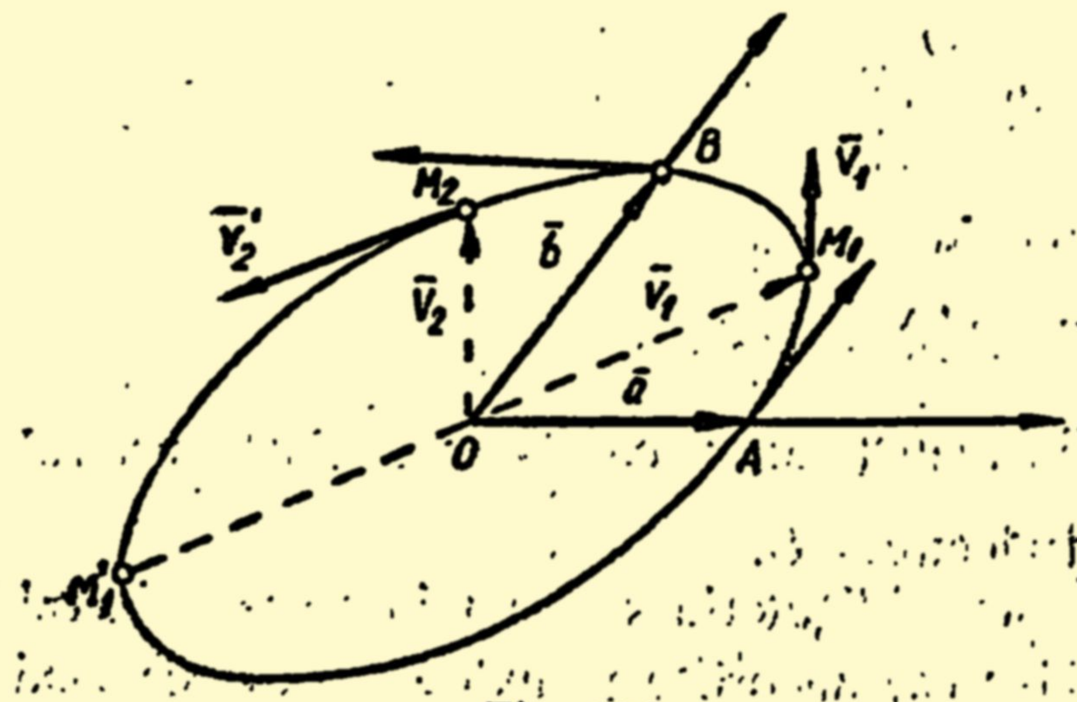


Fig. 134

$$\bar{V}_1(t)=\bar{a}\cos t+\bar{b}\sin t;$$
$$\bar{V}_2(t)=-\bar{a}\sin t+\bar{b}\cos t.$$

Vectorii tangenți corespunzători fiind

$$\bar{V}_1'(t)=-\bar{a}\sin t+\bar{b}\cos t;$$
$$\bar{V}_2'(t)=-\bar{a}\cos t-\bar{b}\sin t,$$

se vede că tangentele în $M_1$ și $M_2$ la hodograf sunt paralele respectiv cu $\overline{OM}_2$ și $\overline{OM}_1$.

Pe de altă parte, fiecărui punct $M_1$ îi corespunde un punct $M_1'$, care este vârful vectorului opus lui $\overline{OM}_1$, având ca parametru $t+\pi$.

Deci, curba descrisă are punctele simetrice, două câte două, față de $O$, iar $\overline{OM}_1$ și $\overline{OM}_2$ sunt diametri conjugați.

Cum pe de altă parte vectorul $\bar{V}(t)$ este finit, pentru orice valoare a lui $t$, curba este o elipsă.

Punctele $A$ și $B$, capetele vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, se obțin pentru $t=0$ și $t=\frac{\pi}{2}$, deci $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt diametri conjugați. Alegerea sistemului de referință oblic $\bar{a}$, $\bar{b}$ este indicată în acest exemplu de însăși expresia vectorului $\bar{V}(t)$. Prin raportarea la două axe perpendiculare ar fi fost greu de observat că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt diametri conjugați ai elipsei.

Scanned with OKEN Scanner

## § 149. Extensiunea regulilor de derivare

Proprietăţile fundamentale ale derivatelor funcţiilor scalare se extind imediat la funcţiile vectoriale.

Astfel, operaţia de derivare este distributivă faţă de adunarea vectorială. Vom avea

$$\frac{d}{dt}[\overline{U}(t)+\overline{V}(t)]=\frac{d\overline{U}}{dt}+\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{d\overline{W}}{dt}. \qquad (26,V)$$

Demonstraţia este imediată. Presupunând vectorii $\overline{U}(t)$ şi $\overline{V}(t)$ derivabili în punctul $t$, vom putea scrie

$$\delta\overline{W}=\overline{U}(t+\delta t)+\overline{V}(t+\delta t)-\overline{U}(t)-\overline{V}(t)=\overline{U}(t+\delta t)-\overline{U}(t)+\overline{V}(t+\delta t)-\overline{V}(t),$$

în baza comutativităţii şi asociativităţii adunării vectoriale. Impărţind apoi prin scalarul $\delta t$ şi aplicând proprietăţile limitelor vectoriale, vom avea

$$\frac{d\overline{W}}{dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\overline{W}}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\overline{U}(t+\delta t)-\overline{U}(t)}{\delta t}+\lim_{\delta t\to 0}\frac{\overline{V}(t+\delta t)-\overline{V}(t)}{\delta t}=\frac{d\overline{U}}{dt}+\frac{d\overline{V}}{dt}.$$

Deasemenea, derivata produsului unui vector printr'un scalar se obţine pe aceeaşi cale. Fie

$$\overline{W}(t)=\lambda(t)\,\overline{V}(t)$$

produsul dintre un scalar $\lambda(t)$ şi un vector $\overline{V}(t)$, ambii derivabili în punctul $t$.

Vom putea scrie

$$\overline{V}(t+\delta t)-\overline{V}(t)=\delta\overline{V},$$

deci

$$\overline{V}(t+\delta t)=\overline{V}(t)+\delta\overline{V}$$

şi în mod analog

$$\lambda(t+\delta t)=\lambda(t)+\delta\lambda,$$

de unde

$$\delta\overline{W}=\lambda(t+\delta t)\overline{V}(t+\delta t)-\lambda(t)\overline{V}(t)=[\lambda(t)+\delta\lambda][\overline{V}(t)+\delta\overline{V}]-\lambda(t)\overline{V}(t)]=$$

$$=\lambda(t)\delta\overline{V}+\delta\lambda\overline{V}(t)+\delta\lambda\delta\overline{V},$$

deci

$$\frac{d\overline{W}}{dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\overline{W}}{\delta t}=\lambda(t)\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\overline{V}}{\delta t}+\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\lambda}{\delta t}\overline{V}(t)+\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\lambda}{\delta t}\lim_{\delta t\to 0}\delta\overline{V},$$

$$\frac{d\overline{W}}{dt}=\lambda(t)\frac{d\overline{V}}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}\overline{V}(t), \qquad (27,V)$$

deoarece limita ultimului termen este un vector nul.

Scanned with OKEN Scanner

In acelaşi mod se extind regulile de derivare ale produselor scalare şi vectoriale, precum şi ale produselor multiple de vectori, astfel încât vom putea da formulele:

$$\frac{d}{dt}(\bar{U}\bar{V})=\frac{d\bar{U}}{dt}\bar{V}+\bar{U}\frac{d\bar{V}}{dt};$$

$$\frac{dt}{dt}[\bar{U}\times\bar{V}]=\left(\frac{d\bar{U}}{dt}\times\bar{V}\right)+\left(\bar{U}\times\frac{d\bar{V}}{dt}\right);$$

$$\frac{d}{dt}[\bar{U}\bar{V}\bar{W}]=\frac{d\bar{U}}{dt}\bar{V}\bar{W}+\bar{U}\frac{d\bar{V}}{dt}\bar{W}+\bar{U}\bar{V}\frac{d\bar{W}}{dt}; \qquad (28,V)$$

$$\frac{d}{dt}[\bar{U}\times(\bar{V}\times\bar{W})]=\frac{d\bar{U}}{dt}\times(\bar{V}\times\bar{W})+\bar{U}\times\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\times\bar{W}\right)+\bar{U}\times\left(\bar{V}\times\frac{d\bar{W}}{dt}\right).$$

Deoarece derivatele vectoriale se obţin ca limite de mărimi vectoriale, regulile Algebrei vectoriale sunt valabile şi pentru derivate. Astfel, ordinea vectorilor în expresia derivatei unui produs vectorial *nu poate fi schimbată*. Sunt importante în aplicaţii cazurile particulare ale vectorilor constanţi, de modul constant, sau de direcţie constantă.

Vom considera constant un vector $\bar{V}(t)$ într'un interval $(t_1, t_2)$, când pentru orice $t$ din $(t_1, t_2)$ ia aceeaşi valoare

$$\bar{V}(t)=\bar{a},$$

unde $\bar{a}$ este un vector determinat.

In acest caz

$$\delta\bar{V}=\bar{V}(t+\delta t)-\bar{V}(t)=\bar{a}-\bar{a}=0$$

şi deci

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\bar{V}}{\delta t}=\bar{0}.$$

Astfel: *derivata unui vector constant este vectorul nul.*

Un vector constant are hodograful redus la un punct, iar atât direcţia, cât şi modulul, precum şi sensul său sunt constante pentru orice $t$ din intervalul $(t_1, t_2)$.

Se poate însă ca un vector variabil să aibă direcţia constantă. In acest caz, el se poate pune sub forma

$$\bar{V}(t)=\lambda(t)\bar{a},$$

unde $\bar{a}$ este un vector constant, de exemplu un versor.

Aplicând atunci regula de derivare (28,V) avem

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\bar{a}+\lambda\frac{d\bar{a}}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\bar{a}.$$

Se vede că *derivata unui vector de direcţie constantă este paralelă cu vectorul. Hodograful vectorului se reduce la o dreaptă, care este şi hodograful derivatei.*

Scanned with OKEN Scanner

Putem, deasemenea, considera un vector variabil de modul constant, al cărui hodograf este deci un arc de curbă trasată pe o sferă având ca rază modulul vectorului.

Dacă modulul $V$ al vectorului $\overline{V}(t)$ este constant, vom putea scrie

$$\overline{V}\,\overline{V}=V^2=\text{const.}$$

Derivând această egalitate scalară și aplicând regula de derivare a produsului scalar în primul membru, deducem

$$\frac{d\overline{V}}{dt}\overline{V}+\overline{V}\frac{d\overline{V}}{dt}=2\,V\frac{dV}{dt}=0,$$

de unde

$$\frac{d\overline{V}}{dt}\overline{V}=0.$$

Prin urmare: *Derivata unui vector variabil de modul constant este un vector perpendicular pe acel vector. In particular, un versor variabil este perpendicular pe derivata sa.*

Putem complecta regulile de derivare prin extensiunea derivatei funcțiilor de funcții. In aplicații, este posibil ca un vector variabil să depindă de parametrul $t$ prin intermediul unui alt parametru $u$, care este funcție de $t$.

Fie deci $\overline{V}(u)$ un vector funcție de scalarul $u$, care la rândul său este o funcție scalară

$$u=u(t).$$

Presupunând $\overline{V}(u)$ derivabil în raport cu $u$ într'un interval $(u_1, u_2)$, iar $u(t)$ deasemenea derivabil în raport cu $t$ în intervalul $(t_1, t_2)$, corespunzător lui $(u_1, u_2)$, vom putea scrie

$$\delta\overline{V}(u)=\overline{V}(u+\delta u)-\overline{V}(u);$$

$$\frac{\delta\overline{V}(u)}{\delta t}=\frac{\delta\overline{V}(u)}{\delta u}\,\frac{\delta u}{\delta t},$$

de unde, aplicând proprietățile limitelor, obținem

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\overline{V}(u)}{\delta t}=\lim_{\delta u\to 0}\frac{\delta\overline{V}(u)}{\delta u}\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta u}{\delta t},$$

deci

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{d\overline{V}}{du}\cdot\frac{du}{dt}, \tag{29,V}$$

formulă care este analoagă celei din Analiza scalară și arată că derivata vectorului $\overline{V}(u)$ în raport cu $t$ este un vector proporțional cu derivata lui $\overline{V}(u)$ în raport cu $u$.

## § 150. Aplicații ale derivatei unei funcții vectoriale

**1. Expresia vectorială a derivatei modulului și versorului unui vector.** Se poate da derivatei $V'(t)$ a modulului unui vector $\overline{V}(t)$ o expresie vectorială. In adevăr, derivând identitatea

$$V^2=\overline{V}\,\overline{V}$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$2VV' = 2\overline{V}\,\overline{V}',$$

de unde

$$V' = \frac{\overline{V}\,\overline{V}'}{V} \qquad (30,V)$$

Deasemenea, notând versorul lui $\overline{V}(t)$ prin $\overline{v}(t)$, vom avea

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{V}}{V}\right) = \frac{\overline{V}'V - \overline{V}V'}{V^2}$$

și ținând seamă de (30,V)

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{\overline{V}'(\overline{V}V) - \overline{V}(\overline{V}\overline{V}')}{V^3} = \frac{\overline{V}\times(\overline{V}'\times V)}{V^3}, \qquad (31,V)$$

*Formula (31,V) exprimă derivata versorului $\overline{v}(t)$ sub forma unui dublu produs vectorial.*

In cazul când $\overline{V}(t)$ este un vector de direcție constantă, discuția formulei (31,V) arată că vectorul este paralel cu derivata sa, deoarece versorul $\overline{v}(t)$ este un vector constant, deci are derivata nulă.

Deasemenea, dacă $\overline{V}(t)$ este paralel cu $\overline{V}'(t)$, vom avea $\overline{V}'\times\overline{V}=0$ și deci $\overline{v}'(t)=0$; versorul $\overline{v}(t)$ va fi constant, ceeace arată că $\overline{V}(t)$ va fi de direcție constantă. Deducem deci: *Condiția necesară și suficientă, ca un vector să aibă direcția constantă, este ca el să fie paralel cu derivata sa.*

Cazul particular, când $\overline{V}(t)$ este un vector constant, este inclus în acest rezultat.

2. **Derivata unui determinant de ordinul al treilea.** Formula de derivare a produselor mixte ne permite să stabilim expresia derivatei unui determinant de ordinul al treilea. In adevăr, raportând vectorii $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ la un triedru oarecare $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$, vom avea

$$\overline{U}(t) = U_1\overline{p} + U_2\overline{q} + U_3\overline{r};$$
$$\overline{V}(t) = V_1\overline{p} + V_2\overline{q} + V_3\overline{r};$$
$$\overline{W}(t) = W_1\overline{p} + W_2\overline{q} + W_3\overline{r}$$

și deci

$$\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{W} = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix} [\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}].$$

Aplicând formula de derivare a produsului mixt, în ipoteza că cei trei vectori sunt derivabili, un termen ca $\left[\frac{d\overline{U}}{dt}, \overline{V}, \overline{W}\right]$ se va scrie sub forma

$$\left[\frac{d\overline{U}}{dt}\,\overline{V}\,\overline{W}\right] = \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dt} & V_1 & W_1 \\ \frac{dU_2}{dt} & V_2 & W_2 \\ \frac{dU_3}{dt} & V_3 & W_3 \end{vmatrix} [\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}];$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât vom deduce imediat formula

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dt} & V_1 & W_1 \\ \frac{dU_2}{dt} & V_2 & W_2 \\ \frac{dU_3}{dt} & V_3 & W_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1 & \frac{dV_1}{dt} & W_1 \\ U_2 & \frac{dV_2}{dt} & W_2 \\ U_3 & \frac{dV_3}{dt} & W_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & \frac{dW_1}{dt} \\ U_2 & V_2 & \frac{dW_2}{dt} \\ U_3 & V_3 & \frac{dW_3}{dt} \end{vmatrix}$$

care reprezintă regula de derivare a determinanților de ordinul al treilea. Invers, fiind dat un determinant de ordinul al treilea, având ca elemente funcții derivabile, dacă îi asociem convenabil un produs mixt, regăsim aceeași regulă, care poate fi extinsă la un determinant oarecare, considerând vectori în spațiul cu $n$ dimensiuni și produsul exterior corespunzător.

3. **Componentele derivatei.** Din observația că un vector variabil, dar de modul sau direcție constantă, are derivata perpendiculară pe el, respectiv paralelă cu el, se poate deduce o descompunere a unui vector variabil după direcția sa și după o direcție perpendiculară pe el.

In adevăr, punând în evidență modulul și versorul unui vector $\overline{V}(t)$, vom scrie

$$\overline{V}(t) = V(t)\,\overline{v}(t)$$

și derivând vom avea

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\,\overline{v} + V\frac{d\overline{v}}{dt}. \qquad (32,V)$$

Deoarece $\overline{v}$ este versor, $\frac{d\overline{v}}{dt}$ va fi perpendicular pe $\overline{v}$ și cum putem scrie

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{1}{V}\frac{d\overline{V}}{dt} - \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\overline{v},$$

vectorul $\frac{d\overline{v}}{dt}$ fiind o combinație liniară între $\frac{d\overline{V}}{dt}$ și $\overline{v}$, se va găsi în planul format de $\overline{V}(t)$ și derivata sa $\overline{V}'(t)$.

Formula (32,V) dă deci expresia derivatei $\overline{V}'(t)$, descompusă după direcția vectorului $\overline{V}(t)$ și după o direcție perpendiculară pe $\overline{V}(t)$, situată în planul format de vector și derivată. Pentru a calcula mărimea componentelor, vom determina modulul lui $\frac{d\overline{v}}{dt}$. Fie $(h)$ hodograful lui $\overline{v}(t)$, care este o curbă sferică pe sfera de rază unitate. Vom avea $\delta\overline{v} = \overline{AA'}$ (fig. 135, *a*). Dacă notăm cu $\delta\varphi$ unghiul format de $\overline{v}(t)$ cu $\overline{v}(t+\delta t)$, din triunghiul isoscel $OAA'$, deducem

$$|\delta\overline{v}| = |\overline{AA'}| = 2\sin\frac{\delta\varphi}{2} \cong \delta\varphi,$$

ținând seamă că $\delta\varphi$ poate fi făcut arbitrar de mic pentru un $\delta t$ convenabil. Deci

$$\left|\frac{d\overline{v}}{dt}\right| = \lim_{\delta t\to 0}\left|\frac{\delta\overline{v}}{\delta t}\right| = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\omega}{\delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul $\varphi(t)$ este de fapt arcul hodografului $(h)$, măsurat dela o origine determinată. Vom nota cu $\omega(t)$ derivata funcţiei scalare $\varphi(t)$ şi cu $\bar{\tau}(t)$ versorul lui $\frac{d\bar{v}}{dt}$. Vom avea deci

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \omega(t)\,\bar{\tau}(t).$$

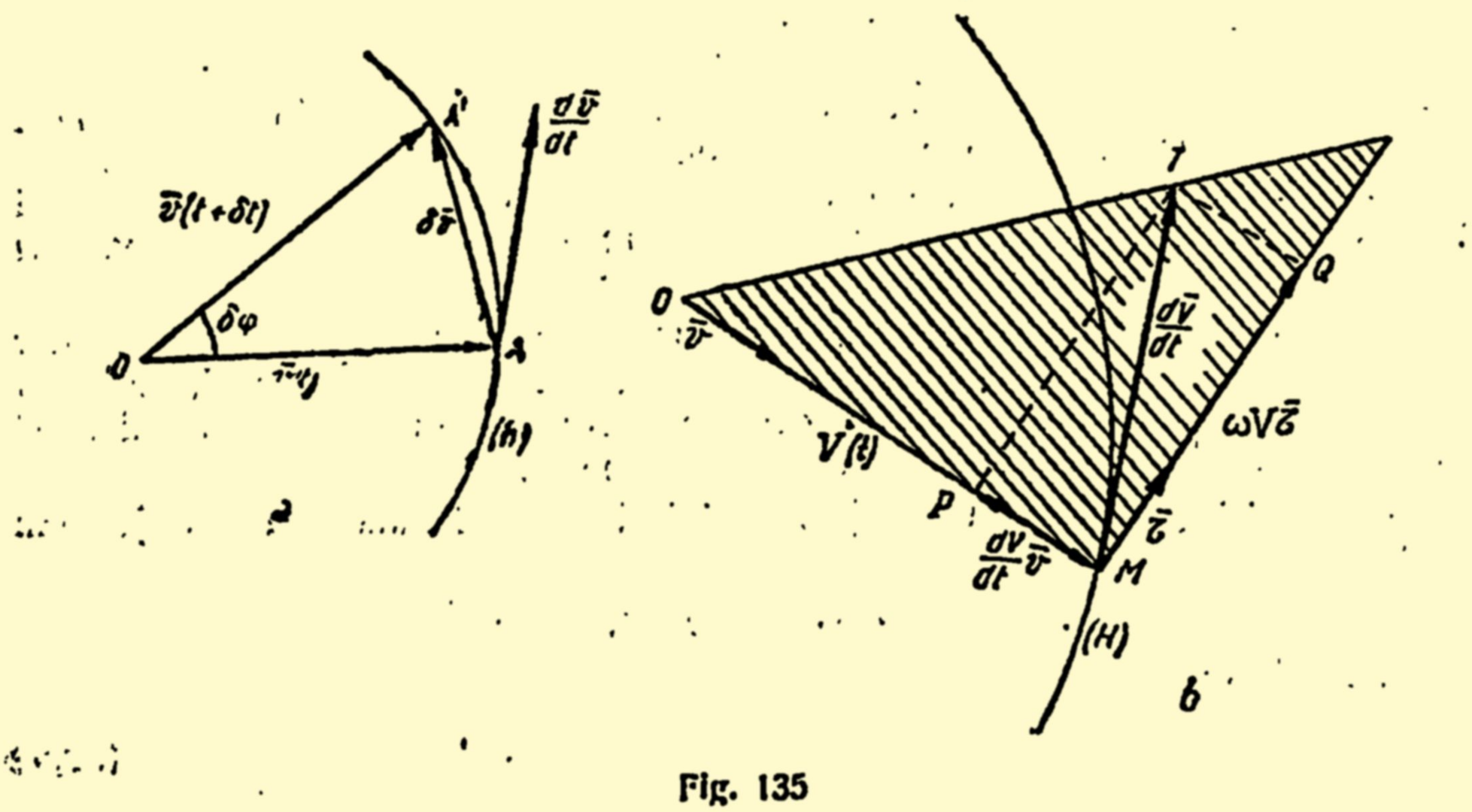



Fig. 135

Formula (32,V) devine

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{v} + \omega V\bar{\tau} \qquad (33,V)$$

Componentele derivatei $\frac{d\bar{V}}{dt}$ (fig. 135, *b*) pe direcţiile versorului $\bar{v}$ şi perpendicularei $\bar{\tau}$ pe acest versor, vor fi reprezentate prin

$$\frac{dV}{dt}\bar{v} = \overline{MP} \quad \text{şi} \quad \omega V\bar{\tau} = \overline{MQ}$$

pe hodograful $(H)$ al lui $\bar{V}(t)$.

Această descompunere a vectorului $\bar{V}(t)$, pusă în evidenţă în mod natural de modulul şi versorul său, îşi găseşte aplicaţie în mişcarea plană a unui punct material pe o traiectorie.

Luând modulele în ambii membri ai formulei (33,V), avem

$$\left|\frac{d\bar{V}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \omega^2 V^2}, \qquad (34,V)$$

formulă care ne arată că *modulul derivatei unui vector nu este egal cu derivata modulului vectorului.*

Formula (33,V) cuprinde cazurile particulare ale vectorilor de modul sau direcţie constantă pentru

$$\frac{dV}{dt} = 0; \quad \omega = 0.$$

Facem în plus observaţia că dacă alegem ca parametru $t$ chiar unghiul $\varphi$ măsurat în radiani, vom avea

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega = 1,$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\varphi} = \bar{\tau}$$

şi deci $\frac{d\bar{V}}{d\varphi}$ este un versor, astfel încât putem scrie

$$d\bar{v} = \bar{\tau} d\varphi. \qquad (35,V)$$

Putem interpreta această formulă astfel: *modulul diferenţialei versorului unui vector variabil este egal cu unghiul făcut de două poziţii vecine ale vectorului.*

## § 151. Derivate vectoriale succesive

Derivata unui vector $\bar{V}(t)$ fiind un vector funcţie de $t$, poate fi la rândul său derivată, dacă vectorul $\bar{V}'(t)$ este deasemenea derivabil în punctul $t$.

Vom nota

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{V}}{dt^2} = \bar{V}''(t),$$

numind vectorul $\frac{d^2\bar{V}}{dt^2}$ *derivata a doua* a vectorului $\bar{V}(t)$ în punctul $t$. In ipoteza că şi derivata a doua este derivabilă, putem defini în mod analog derivata de ordinul al treilea. In general, dacă un vector este derivabil de $n$ ori, derivata sa de ordinul $n$ se defineşte astfel

$$\frac{d^n\bar{V}}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}\bar{V}}{dt^{n-1}}\right) = \bar{V}^{(n)}(t). \qquad (36,V)$$

Aceste derivate succesive intervin în aplicaţiile geometrice şi fizice ale Analizei vectoriale. Ele conduc şi la extensiunea diferenţialelor succesive ale unui vector variabil. Vom avea, de exemplu:

$$d^2\bar{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)dt^2 = \bar{V}''dt^2;$$

$$d^n\bar{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}\bar{V}}{dt^{n-1}}\right)dt^n = \bar{V}^n dt^n.$$

Vectorii $\bar{V}''dt^2$, $\bar{V}^n dt^n$, deci diferenţialele vectoriale $d^2\bar{V}$, $d^n\bar{V}$ reprezintă *vectori elementari, având direcţii determinate şi module arbitrar de mici.*

**Aplicaţie.** *Condiţia necesară şi suficientă ca hodograful unui vector să fie o curbă plană.*

Am văzut că pentru ca un vector să păstreze o direcţie fixă, deci ca hodograful său să fie o dreaptă, este necesar şi suficient ca vectorul să fie paralel cu prima sa derivată.

Pentru ca hodograful să fie o curbă plană, va trebui ca $\bar{V}(t)$ să rămână, pentru orice valoare a lui $t$ din intervalul $(t_1, t_2)$, perpendicular pe normala $\bar{n}$ a planului hodografului.

Vom avea deci relaţia

$$\bar{n}\bar{V} = 0,$$



Scanned with OKEN Scanner

pe care derivând-o, ținând seama că $\bar{n}$ este un versor fix, obținem

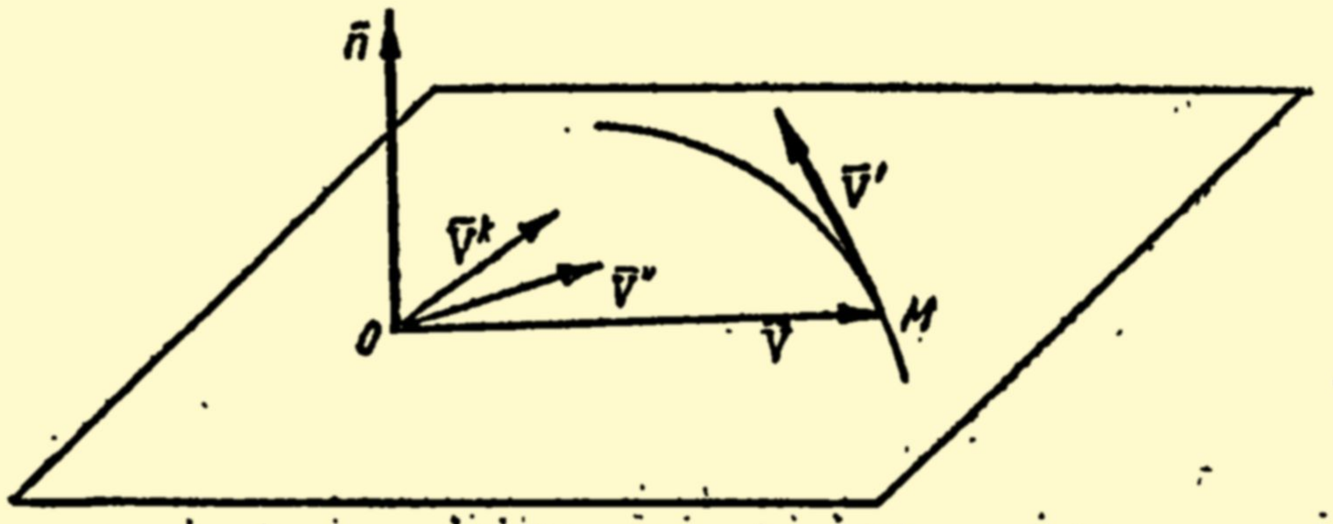


Fig. 136

$$\frac{d\bar{n}}{dt}\bar{V}+\bar{n}\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{n}\frac{d\bar{V}}{dt}=0.$$

Deci, $\bar{V}'$ este în planul hodografului, cum era de așteptat. Dacă însă derivăm din nou, obținem relațiile succesive

$$\bar{n}\frac{d^2\bar{V}}{dt^2}=0 \ldots \bar{n}\frac{d^k V}{dt^k}=0.$$

Prin urmare, *derivatele succesive ale vectorului* $\bar{V}(t)$ *sunt în planul hodografului* (fig. 136).

Cum $\bar{V}$, $\bar{V}'$ și $\bar{V}''$ sunt coplanari, va trebui deci să avem condiția necesară

$$\left[\bar{V}\bar{V}'\bar{V}''\right]=0.$$

Această condiție este și suficientă pentru ca hodograful să fie o curbă plană.

In adevăr, dacă produsul mixt $\left[\bar{V}, \bar{V}', \bar{V}''\right]$ este nul, vectorii $\bar{V}$, $\bar{V}'$, și $\bar{V}''$ vor fi coplanari pentru orice $t$. Planul format de ei va avea ca vector normal $\bar{V}\times\bar{V}'$, care în general nu este un versor. Acest vector va avea o direcție fixă, dacă va fi paralel cu derivata sa, deci dacă

$$(\bar{V}\times\bar{V}')\times(\bar{V}\times\bar{V}')'=0.$$

Insă

$$(\bar{V}\times\bar{V}')'=\bar{V}\times\bar{V}'',$$

deci

$$(\bar{V}\times\bar{V}')\times(\bar{V}\times\bar{V}')'=(\bar{V}\times\bar{V}')\times(\bar{V}\times\bar{V}'')=\bar{V}(\bar{V}\bar{V}'\bar{V}'')-\bar{V}''(\bar{V}\bar{V}'\bar{V})=\bar{V}(\bar{V}\bar{V}'\bar{V}'')=0,$$

în virtutea ipotezei făcute.

Prin urmare, normala planului format de $\bar{V}$, $\bar{V}'$, $\bar{V}''$ este de direcție constantă și cum, în particular, $\bar{V}(t)$ rămâne în acest plan, hodograful său va fi o curbă plană.

## § 152. Formula lui Taylor

Presupunând că vectorul $\bar{V}(t)$ admite derivate succesive continue, într'un interval de definiție $(t_1, t_2)$, se poate extinde formula lui Taylor printr'un raționament analog celui din Analiza scalară, obținând următorul rezultat:

*Dacă vectorul* $\bar{V}(t)$ *admite în intervalul* $t_1<t<t_2$ *derivate succesive continue până la ordinul* $n+1$, *vom avea formula:*

$$\bar{V}(t+h)=\bar{V}(t)+\frac{h}{1!}\bar{V}'(t)+\frac{h^2}{2!}\bar{V}''(t)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\bar{V}^n(t)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[\bar{V}^{(n+1)}(t)+\bar{\epsilon}\right] \quad (37,V)$$

*dacă* $t+h$ *este în intervalul* $(t_1\ t_2)$ *iar* $\bar{\epsilon}$ *reprezintă un vector, al cărui modul tinde către zero odată cu* $h$.

Pentru demonstrație, este suficient să considerăm vectorul raportat la un triedru oarecare, de exemplu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, punând

$$\bar{V}(t)=X(t)\bar{i}+Y(t)\bar{j}+Z(t)\bar{k}.$$

In ipotezele admise, vom putea desvolta după formula lui Taylor componentele $X$, $Y$, $Z$. Vom avea, de exemplu:

$$X(t+h)=X(t)+\frac{h}{1}X'(t)+\frac{h^2}{2!}X''(t)+\cdots+\frac{h^n}{n!}X^n(t)+$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}X^{(n+1)}(t+\theta_1 h),$$

iar desvoltările analoage pentru $Y(t+h)$ şi $Z(t+h)$ vor avea termeni rest de forma

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}Y^{(n+1)}(t+\theta_2 h), \quad \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}Z^{(n+1)}(t+\theta_3 h).$$

Este suficient să amplificăm succesiv cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ şi să sumăm expresiile respective pentru a obţine formula (37, V).

Vom face observaţia că în termenul rest nu putem introduce un vector $\bar{V}^{n+1}(t+\theta h)$ ca în cazul funcţiilor scalare, deoarece $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sunt diferiţi între ei. Deaceea vom folosi termeni rest de forma

$$X^{(n+1)}(t)+\epsilon_1(t), \quad Y^{(n+1)}(t)+\epsilon_2(t), \quad Z^{(n+1)}(t)+\epsilon_3(t),$$

unde

$$\epsilon_1(t)=X^{(n+1)}(t+\theta_1 h)-X^{(n+1)}(t), \text{ etc.}$$

Din continuitatea derivatelor de ordinul $n+1$ deducem că $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_2(t)$ şi $\epsilon_3(t)$ vor tinde către zero când $h$ tinde către zero. Vectorul $\bar{\epsilon}(t)$ va fi de forma

$$\bar{\epsilon}(t)=\epsilon_1\bar{i}+\epsilon_2\bar{j}+\epsilon_3\bar{k}.$$

In cazul când componentele $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ *sunt funcţii analitice* de $t$ în intervalul $(t_1, t_2)$, desvoltarea (37, V) se poate înlocui printr'o serie uniform convergentă în orice interval închis interior lui $(t_1, t_2)$, de forma

$$\bar{V}(t+h)=\bar{V}(t)+\frac{h}{1}\bar{V}'(t)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\bar{V}^n(t)+\cdots, \qquad (38,V)$$

care extinde seria lui Taylor la funcţiile vectoriale de un parametru scalar.

In general, vom numi *funcţie vectorială analitică de t* orice vector $\bar{V}(t)$, definit printr'o desvoltare în serie uniform convergentă într'un interval închis, conţinut în $(t_1, t_2)$, de forma

$$\bar{V}(t)=\bar{a}_0+(t-t_0)\bar{a}_1+(t-t_0)^2\bar{a}_2+\cdots+(t-t_0)^n\bar{a}_n+\cdots, \qquad (39,V)$$

unde $t_0$ este un punct fix din intervalul $(t_1, t_2)$, iar $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, ..., $a_n$, ... sunt vectori constanţi.

Vom spune că vectorul $\bar{V}(t)$ este *analitic* în domeniul lui $t_0$. In acest caz deducem că un vector analitic în domeniul lui $t_0$ admite derivate de orice ordin în acel punct, date de relaţiile

$$\bar{V}(t_0)=\bar{a}_0; \quad \bar{V}'(t_0)=\bar{a}_1, \ldots, \quad \bar{V}_n(t_0)=n!\,\bar{a}_n,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar formula (39,V) devine:

$$\overline{V}(t)=\overline{V}(t_0)+\frac{\overline{V}'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\cdots+\frac{\overline{V}^n(t_0)}{n!}(t-t_0)^n+\cdots \qquad (40,V)$$

și reprezintă desvoltarea tayloriană a lui $\overline{V}(t)$ în jurul lui $t_0$.

În cazul când $t_0=0$, formula (40,V) extinde formula lui Mac-Laurin și vom avea:

$$\overline{V}(t)=\overline{V}(0)+\frac{\overline{V}'(0)}{1!}t+\cdots+\frac{\overline{V}^n(0)}{n!}t^n+\cdots$$

**Aplicație.** *Desvoltări reduse.* O expresie de forma

$$\overline{V}(t)=\bar{a}_0+\bar{a}_1 t$$

este ușor de interpretat. Ea reprezintă un vector, al cărui hodograf este o dreaptă, care trece prin extremitatea vectorului $\overline{OA}=\bar{a}_0$ și are direcția vectorului $\bar{a}_1$ (fig. 137, *a*).

Deasemenea, o expresie de forma

$$\overline{V}(t)=\bar{a}_0+\bar{a}_1 t+\bar{a}_2 t^2$$

reprezintă un vector, al cărui hodograf este o curbă plană din planul care trece prin extremitatea $A_0$ a vectorului. $\overline{OA}_0=\bar{a}_0$ și este determinat de vectorii $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$, considerați liniar independenți (fig. 137, *b*). Dacă alegem în acest plan ca vectori de bază pe $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$, hodograful poate fi pus sub forma

$$x=a_1 t,\quad y=a_2 t^2,$$

unde $a_1$ și $a_2$ sunt modulele lui $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$. Se vede atunci că el reprezintă o parabolă de ecuație

$$y=\frac{a_2}{a_1^2}x^2,$$

în axele oblice $\bar{a}_1, \bar{a}_2$.

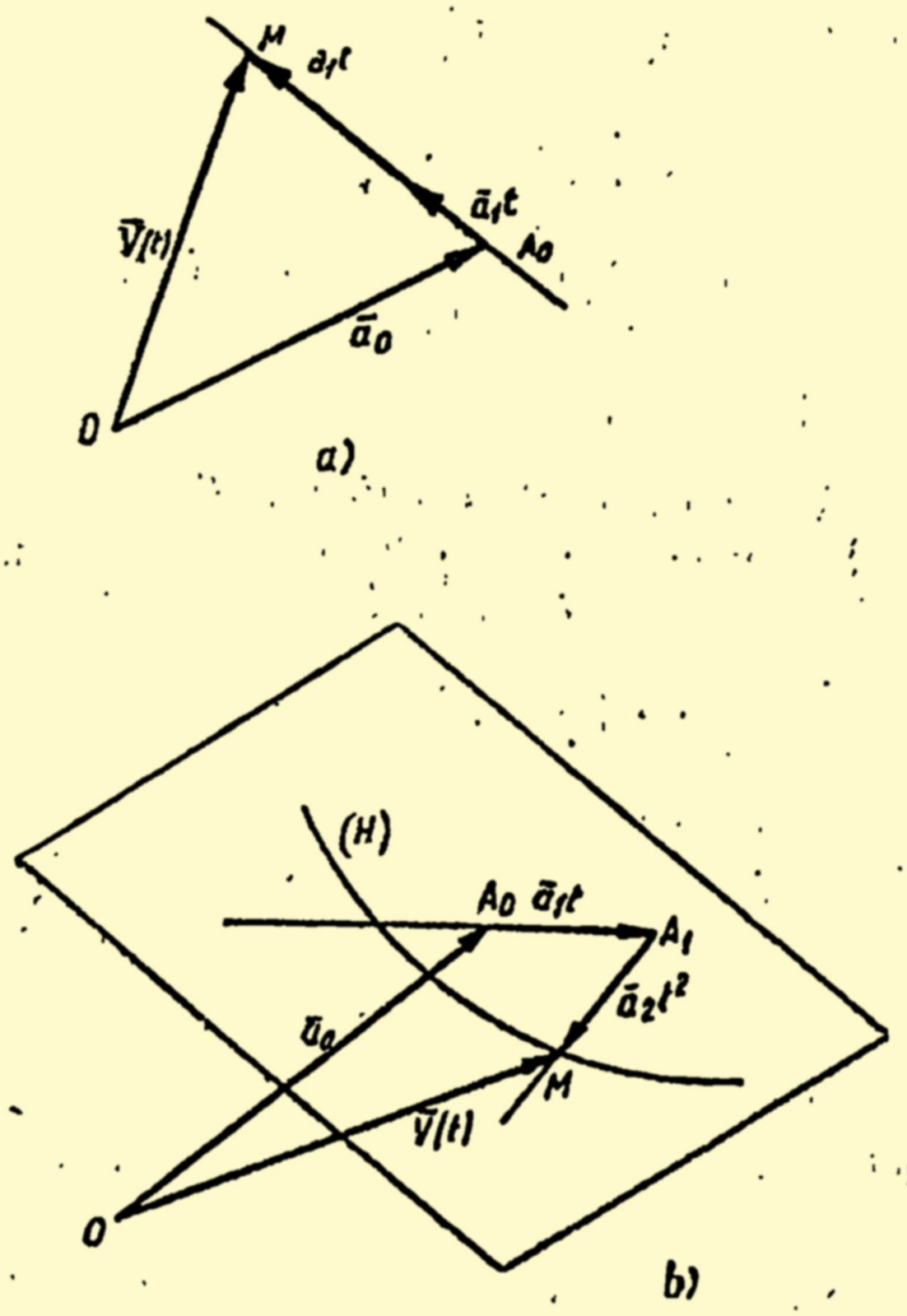



Fig. 137

## § 153. Funcții vectoriale de mai multe variabile scalare

Aplicațiile geometrice și fizice conduc la necesitatea de a introduce și funcții vectoriale de mai mulți parametri scalari, care variază independent în anumite intervale.

Uneori, vom interpreta acești parametri ca fiind coordonatele unui punct într'un spațiu cu $n$ dimensiuni.

Scanned with OKEN Scanner

Fie, de exemplu, un vector $\overline{V}(u, v)$, funcţie continuă de parametrii $u$ şi $v$. Dacă raportăm spaţiul la un triedru ortogonal $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, punând

$$\overline{V}(u, v) = \overline{X}(u, v)\,\bar{i} + Y(u, v)\,\bar{j} + Z(u, v)\,\bar{k}$$

şi considerăm $\overline{V}(u, v)$ ca vector de poziţie al unui punct $M$, vom putea scrie

$$x = X(u, v); \quad y = Y(u, v); \quad z = Z(u, v).$$

Punctul $M$, depinzând de doi parametri, va descrie o porţiune de suprafaţă, care va reprezenta, prin analogie cu cazul funcţiilor de o variabilă $t$, hodograful vectorului.

Pe de altă parte, putem reprezenta fiecare pereche de valori $u, v$ printr'un punct $P(u, v)$ dintr'un plan.

Vectorul $\overline{V}(u, v)$ este o funcţie vectorială de punctul $P$. Un exemplu asemănător se obţine considerând un punct $M$ din spaţiu atras de un centru $O$ cu o forţă proporţională cu distanţa $OM$. Forţa $\overline{F}$ este un vector funcţie de punctul $M$, care poate fi uşor determinat.

Vom pune $\overline{OM} = \bar{r}$ şi deci

$$\overline{F} = -\omega^2 \bar{r},$$

unde

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

iar $\omega$ este un factor de proporţionalitate.

Componentele $X$, $Y$, $Z$ ale forţei $\overline{F}$ vor avea expresiile

$$X = -\omega^2 x, \quad Y = -\omega^2 y, \quad Z = -\omega^2 z,$$

ceeace arată că vectorul $\overline{F}$ este o funcţie de parametrii $x$, $y$, $z$, coordonatele punctului $M$, deci o funcţie de punctul $M$.

Continuitatea funcţiilor vectoriale de mai multe variabile se defineşte ca şi pentru funcţiile de o variabilă. Fie, de exemplu, $\overline{V}(u, v, w)$ o funcţie vectorială de variabilele $u$, $v$, $w$, definită în intervalele

$$u_1 < u < u_2; \quad v_1 < v < v_2; \quad w_1 < w < w_2.$$

Vom folosi limbajul geometric al Analizei, considerând $u$, $v$, $w$, ca fiind coordonatele unui punct din spaţiul cu trei dimensiuni. Cele trei intervale definesc un paralelipiped, sau un *interval tridimensional*, în care variază punctul $M$ $(u, v, w.)$

Vom spune că funcţia $\overline{V}(u, v, w)$ este continuă în punctul $M(u, v, w)$ dacă:

$\epsilon > 0$ *fiind dat arbitrar, există un* $\eta > 0$, *astfel încât*

$$|\delta\overline{V}| = |\overline{V}(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w) - \overline{V}(u, v, w)| < \epsilon,$$

dacă

$$|\delta u| < \eta, \quad |\delta v| < \eta, \quad |\delta w| < \eta.$$

Vectorul

$$\delta\overline{V} = \overline{V}(u+\delta u, \quad v+\delta v, \quad w+\delta w) - \overline{V}(u, v, w) \qquad (41,V)$$

reprezintă variaţia lui $\overline{V}$ când punctul $M$ se deplasează într'un punct $M'$ $(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w)$.

Vom spune că $M'$ este vecin cu $M$, dacă este interior unui cub cu centrul în $M$, paralel cu axele şi de dimensiuni $2\eta$, unde $\eta$ poate fi ales oricât de mic (fig. 138 *a*).

Reprezentând vectorul $\overline{V}(u, v, w)$ printr'un vector de poziţie, definiţia continuităţii poate fi interpretată geometric astfel:

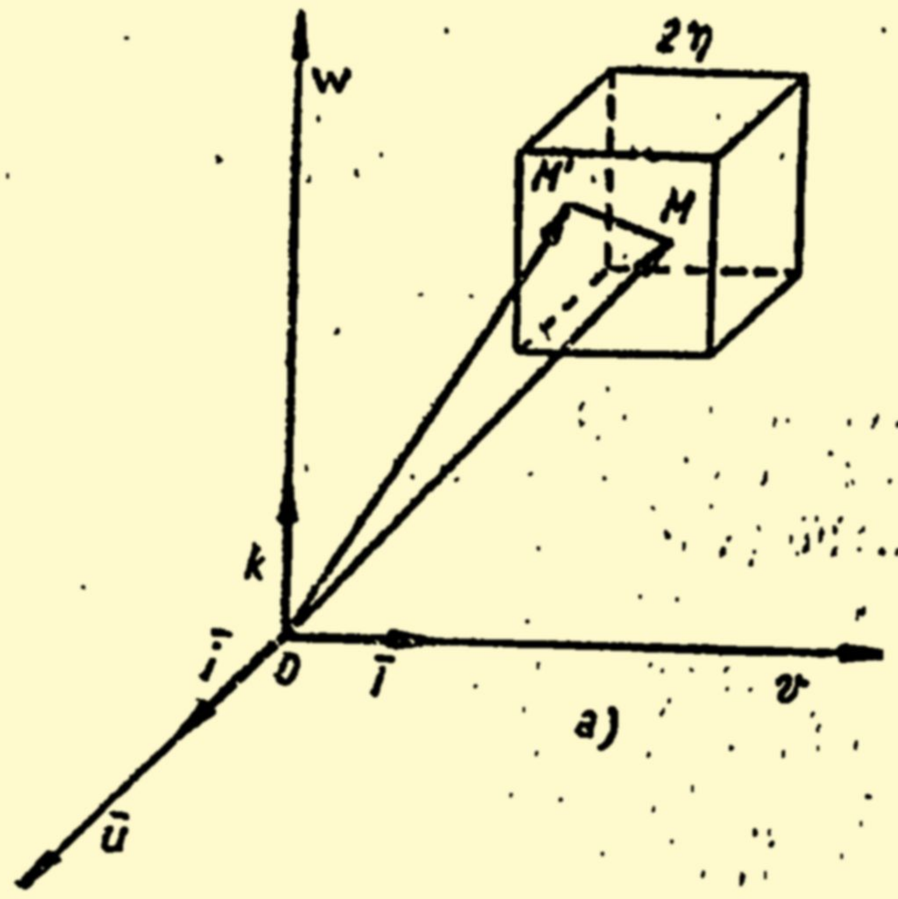



Fig. 138

Vectorul $\overline{V}(u, v, w)$ este o *funcţie continuă de punctul M*, dacă se poate determina un cub cu centrul în $M$, astel încât extremitatea $P'$ a vectorului $\overline{V}(M')$ să se găsească într'un cub cu centrul în $P$ şi de muchie $2\epsilon$ oricât de mică, de îndată ce $M'$ se găseşte în cubul cu centrul în $M$ şi de muchie $2\eta$ (fig. 138, *a, b*).

In expresia (41,V) a lui $\delta\overline{v}$, dacă presupunem variabilele independente, putem considera în particular că nu variază decât $u$. Vom numi atunci expresia

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial u} = \lim_{\delta u \to 0} \frac{\overline{V}(u+\delta u, v, w) - \overline{V}(u, v, w)}{\delta u}$$

*derivata parţială a vectorului* $\overline{V}(u, v, w)$ *în raport cu* $u$ *în punctul* $M(u, v, w)$, în cazul când limita există.

Derivatele parţiale

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial w},$$

sunt vectori. Dacă aceste derivate există în orice punct $M$ din intervalul tridimensional, sau cubul de definiţie, spunem că vectorul *admite derivate parţiale în acest interval*.

Deasemenea, vom spune că un vector $\overline{V}(u, v, w)$ este *diferenţiabil* într'un punct $M$, dacă variaţia sa $\delta\overline{V}$ se poate pune sub forma

$$\delta\overline{V} = \overline{A}\delta u + \overline{B}\delta v + \overline{C}\delta w + \overline{\epsilon}_1\delta u + \overline{\epsilon}_2\delta v + \overline{\epsilon}_3\delta w. \qquad (42,V)$$

Scanned with OKEN Scanner

În această expresie vectorii $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ sunt independenţi de creşterile $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$, iar vectorii $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\epsilon_3$, tind către zero în modul, când $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$ tind către zero în mod independent.

*Orice vector diferenţiabil într'un punct admite derivate parţiale finite în acel punct.*

In adevăr, dacă în formula (42,V) considerăm $\delta v = 0$ şi $\delta w = 0$, apoi împărţim în ambii membri prin $\delta u$, vom avea

$$\frac{\delta \overline{V}}{\delta u} = \overline{A} + \overline{\epsilon}.$$

Trecând la limită, ţinând seama de ipotezele făcute, vom putea deduce

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial u} = \overline{A}.$$

Prin urmare, vectorul admite sigur o derivată parţială în raport cu $u$ şi în mod analog, va admite derivate şi în raport cu celelalte două variabile.

Această teoremă precizează definiţia vectorilor diferenţiabili prin faptul că determină cei trei vectori $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$. Vom numi *diferenţială totală* a vectorului $\overline{U}(u, v, w)$ în punctul $M(u, v, w)$, unde este diferenţiabil, expresia

$$d\overline{U} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial u} du + \frac{\partial \overline{V}}{\partial v} dv + \frac{\partial \overline{V}}{\partial w} dw, \qquad (43,V)$$

deci *partea principală* a variaţiei sale $\delta V$, în care am înlocuit $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$, prin $du$, $dv$, $dw$ conform cu teorema din Analiza scalară: diferenţiala variabilei independente este chiar creşterea sa.

In aplicaţii, noţiunea de diferenţială a unui vector apare mai naturală decât aceea de derivată parţială, fiind legată de variaţia vectorului, corespunzătoare unor variaţii ale parametrilor.

Se poate arăta că un vector poate admite derivate parţiale fără a fi diferenţiabil.

In aplicaţii, *vom presupune, în general, că derivatele parţiale ale vectorilor sunt continue,* ceeace are drept consecinţă că vectorul este diferenţiabil. (Exerciţiu).

Noţiunile de derivată parţială de ordinul $n$, diferenţială de ordinul $n$, funcţie compusă de una sau mai multe variabile se extind deasemenea imediat. Astfel, vom putea defini derivate parţiale vectoriale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial v^2},$$

cu proprietatea de permutabilitate

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial v \partial u},$$

în cazul când aceste derivate sunt continue în punctul considerat. Diferenţiala a doua $d^2\overline{V}$, pentru un vector, funcţie de două variabile, se va putea scrie

$$d^2\overline{V} = d(dV) = \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial v^2} dv^2, \qquad (44,V)$$

dacă $u$ şi $v$ sunt variabile independente.

Scanned with OKEN Scanner

Regulile de derivare se extind şi la derivatele parţiale vectoriale. Vom avea de exemplu:

$$\frac{\partial}{\partial u}[\bar{U}+\bar{V}]=\frac{\partial \bar{U}}{\partial u}+\frac{\partial \bar{V}}{\partial u};$$

$$\frac{\partial}{\partial v}[\bar{U}\times\bar{V}]=\frac{\partial \bar{U}}{\partial v}\times\bar{V}+\bar{U}\times\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}.$$

Pentru a defini funcţiile vectoriale compuse, este suficient să presupunem că parametrii $u$, $v$, $w$ de care depinde vectorul $\bar{V}(u, v, w)$ sunt la rândul lor funcţii de alţi parametri scalari.

## § 154. Funcţii vectoriale compuse. Derivate totale

Dacă un vector este *funcţie compusă* de un parametru $t$ prin intermediul mai multor variabile scalare $u, v, w, \ldots$, vom putea defini *derivata totală* a vectorului în raport cu $t$.

Fie $\bar{V}[u(t), v(t), w(t)]$ un vector, care depinde de $t$ prin funcţiile

$$u=u(t);\quad v=v(t);\quad w=w(t).$$

Presupunând vectorul diferenţiabil în raport cu $u, v, w$ într'un interval tridimensional, definit prin marginile inferioare şi superioare ale funcţiilor $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, când $t$ variază în intervalul $(t_1, t_2)$, deci prin inegalităţile

$$m_1<u<M_1;\quad m_2<v<M_2;\quad m_3<w<M_3,$$

*vectorul $\bar{V}$, considerat ca funcţie de $t$, va fi diferenţiabil în intervalul $(t_1, t_2)$* şi vom avea

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial \bar{V}}{\partial w}\frac{dw}{dt}, \qquad (45,V)$$

formulă care dă derivata totală a vectorului $\bar{V}$ în raport cu $t$, când este funcţie compusă de $t$.

Această formulă este foarte importantă în aplicaţii. Aplicând proprietatea diferenţialei unui vector, deci scriind

$$d\bar{V}=\frac{d\bar{V}}{dt}\,dt,$$

vom deduce

$$d\bar{V}=\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}du+\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}dv+\frac{\partial \bar{V}}{\partial w}dw \qquad (46,V)$$

obţinând următorul rezultat important:

*Dacă un vector $\bar{V}(u, v, w)$ este diferenţiabil în raport cu variabilele scalare $u, v, w$ şi dacă aceste variabile sunt funcţii diferenţiabile de un parametru $t$, diferenţiala vectorului $\bar{V}$, considerat ca funcţie compusă de $t$, se exprimă prin aceeaşi formulă ca şi în cazul când variabilele $u, v, w$ ar fi independente* [1]).

---

[1]) Stabilirea proprietăţilor funcţiilor vectoriale de mai multe variabile se face pe baza proprietăţilor analoage ale componentelor lor scalare. Pentru tot ce priveşte aceste proprietăţi, a se vedea de exemplu, *Miron Nicolescu*: Calculul diferenţial şi integral, vol. I, Bucureşti, 1949.

Scanned with OKEN Scanner

Această proprietate de *invarianţă* a diferenţialei totale de ordinul întâi se extinde şi la cazul funcţiilor compuse de mai multe variabile, dar ea nu se mai regăseşte la diferenţialele următoare.

Astfel, în cazul funcţiilor compuse vom avea:

$$d^2\bar{V}=\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}d^2u+\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}d^2v=$$

$$=\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}du+\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}d^2u+\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}d^2v, \qquad (47,V)$$

folosind notaţia simbolică obişnuită în Analiza scalară. Se observă apariţia ultimilor termeni în $d^2u$ şi $d^2v$, care provin din faptul că $u$ şi $v$ sunt la rândul lor funcţii de unu sau mai mulţi parametri.

*Expresia derivatei totale a unei funcţii de trei variabile arată că ea este o combinaţie liniară de cei trei vectori derivate parţiale* $\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}$, $\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}$, $\frac{\partial\bar{V}}{\partial w}$ —

Dacă aceşti vectori sunt liniar independenţi, putem considera atunci în ormula (45,V) că $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ sunt componentele derivatei totale $\frac{d\bar{V}}{dt}$ în raport cu triedrul format de $\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}$, $\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}$, $\frac{\partial\bar{V}}{\partial w}$. Va trebui deci să avem:

$$\left[\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}\frac{\partial\bar{V}}{\partial w}\right]\neq 0.$$

Raportând vectorul $\bar{V}(u, v, w)$ la un triedru oarecare $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, vom scrie

$$\bar{V}=X\bar{p}+Y\bar{q}+Z\bar{r}$$

şi deci

$$\left[\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}\frac{\partial\bar{V}}{\partial w}\right]=\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial u}&\frac{\partial X}{\partial v}&\frac{\partial X}{\partial w}\\ \frac{\partial Y}{\partial u}&\frac{\partial Y}{\partial v}&\frac{\partial Y}{\partial w}\\ \frac{\partial Z}{\partial u}&\frac{\partial Z}{\partial v}&\frac{\partial Z}{\partial w}\end{vmatrix}[\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}]=\frac{D(X,Y,Z)}{D(u,v,w)}[\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}], \qquad (48,V)$$

$$J=\frac{D(X,Y,Z)}{D(u,v,w)}$$

fiind determinantul funcţional sau Jacobianul funcţiilor $X$, $Y$, $Z$ de $u$, $v$, $w$.

Invers, putem interpreta determinantul funcţional $J$ ca produsul mixt a trei vectori prin formula (48,V), dacă $[\bar{p}\bar{r}\bar{q}]=1$.

*Condiţia necesară şi suficientă, ca cele trei derivate parţiale* $\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}$, $\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}$, $\frac{\partial\bar{V}}{\partial w}$ *să fie trei vectori liniar independenţi, este ca cele trei componente* $X$, $Y$, $Z$ *ale vectorului* $\bar{V}(u, v, w)$ *să fie trei funcţii diferenţiabile continuu de* $u$, $v$, $w$, *independente în intervalul de definiţie.*

Aceasta rezultă din expresia (48,V) a produsului mixt $\left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial w}\right]$, care trebue să fie diferit de zero, ceeace revine la

$$J=\frac{D(X,Y,Z)}{D(u,v,w)}\neq 0,$$

care este condiţia ca $X, Y, Z$ să fie independente.

Invers, dacă $J\neq 0$, atunci şi produsul mixt este diferit de zero şi derivatele parţiale sunt liniar independente. Reciproc, pentru ca $X, Y, Z$ să formeze un sistem de trei funcţii diferenţiabile continuu, independente, este necesar şi suficient ca vectorii $\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{V}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{V}}{\partial w}$ să fie liniar independenţi.

## § 155. Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

Folosind derivatele parţiale succesive, putem extinde şi formula lui Taylor la funcţiile vectoriale de două sau mai multe variabile.

Fie, de exemplu, un vector $\bar{V}(u,v)$ diferenţiabil continuu până la ordinul $n+1$ inclusiv, deci admiţând derivate parţiale continue până la acest ordin.

Componentele sale având aceeaşi proprietate, vom putea scrie pentru $X(u,v)$ desvoltarea

$$X(u+h, v+k)=X(u,v)+\left(h\frac{\partial X}{\partial u}+k\frac{\partial X}{\partial v}\right)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial X}{\partial u}+k\frac{\partial X}{\partial v}\right)^{(2)}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial X}{\partial u}+k\frac{\partial X}{\partial v}\right)^{(n)}+R_n,$$

unde

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[\left(h\frac{\partial X}{\partial u}+k\frac{\partial X}{\partial v}\right)^{(n+1)}+\epsilon_1\right],$$

punctul $(u+h, v+k)$ fiind în intervalul de definiţie.

Procedând ca şi în cazul unei singure variabile, deci repetând formula şi pentru componentele $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ şi adunându-le după înmulţirea cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, obţinem formula lui Taylor

$$\bar{V}(u+h, v+k)=\bar{V}(u,v)+\left(h\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}+k\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\right)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}+k\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\right)^{(2)}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}+k\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\right)^{(n)}+\frac{1}{(n+1)!}\left[\left(h\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}+k\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\right)^{(n+1)}+\bar{\epsilon}\right], \qquad (49,V)$$

unde

$$\bar{\epsilon}=\epsilon_1\bar{i}+\epsilon_2\bar{j}+\epsilon_3\bar{k}$$

este un vector al cărui modul tinde către zero, odată cu $h$ şi $k$.

In cazul când componentele $X, Y, Z$ sunt funcţii analitice de $u$ şi $v$ în intervalul bidimensional de definiţie, suma (49,V) devine o serie uniform convergentă, în orice interval bidimensional închis, interior celui dat.

Scanned with OKEN Scanner

Vectorii, funcţii de două variabile independente, îşi găsesc aplicaţii la studiul suprafeţelor în care formula lui Taylor are un rol important.

Evident, această formulă se extinde şi la funcţii de trei sau mai multe variabile.

Punând

$$h=u;\quad k=v;\quad u=0;\quad v=0$$

în formula lui Taylor, obţinem desvoltarea lui Mac-Laurin

$$\bar{V}(u,v)=\bar{V}(0,0)+\left[u\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}\right)_0+v\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}\right)_0\right]+\cdots+\frac{1}{n!}\left[u\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}\right)_0+v\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}\right)_0\right]^{(n)}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left\{\left[u\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial u}\right)_0+v\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial v}\right)_0\right]^{(n+1)}+\bar{\epsilon}\right\}\qquad(50,V)$$

Dacă numim vector analitic în domeniul punctului $u=0$, $v=0$ un vector definit prin desvoltarea în serie uniform convergentă

$$\bar{V}(u,v)=\bar{a}_0+\bar{a}_1u+\bar{b}_1v+\bar{a}_2u^2+2\bar{b}_2uv+\bar{c}_2v^2+\cdots$$

într'un interval închis cu centrul în $u=0$, $v=0$, vectorii constanţi $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$,... se exprimă prin derivatele parţiale ale lui $\bar{V}$ în $u=0, v=0$ şi desvoltarea revine la seria Mac-Laurin.

**Aplicaţie.** *Desvoltări reduse.* Oprindu-ne la termenii de gradul întâi, obţinem un vector de forma

$$\bar{V}(u,v)=\bar{a}_0+\bar{a}_1u+\bar{b}_1v$$

care, considerat ca vector de poziţie, are ca extremitate un punct $M$, ce descrie planul care trece prin extremitatea lui $\bar{a}_0$ şi este determinat de vectorii $\bar{a}_1$ şi $\bar{b}_1$.

Reţinând termenii până la ordinul al doilea, obţinem un vector a cărui extremitate descrie o suprafaţă de gradul al doilea.

## § 156. Integrale vectoriale

Operaţia de derivare a unui vector variabil, funcţie de un parametru scalar, conducând la un nou vector, admite şi o operaţie inversă, analoagă cu găsirea funcţii primitive a unei funcţii continue date.

Fiind dat vectorul $\bar{v}\ (t)$, continuu în intervalul $(t_1, t_2)$, vom numi vectorul $\bar{V}(t)$, care admite pe $\bar{v}(t)$ ca derivată în punctul $t$, *funcţia primitivă vectorială* a lui $\bar{v}\ (t)$.

Vom putea deci defini vectorul $\bar{V}(t)$ prin relaţia:

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{v}(t).\qquad(51,V)$$

Existenţa unei funcţii primitive se dovedeşte imediat, dacă raportăm vectorii $\bar{v}(t)$ şi $\bar{V}(t)$ la un triedru $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$.

Vom pune

$$\bar{v}(t)=a(t)\,\bar{p}+b(t)\,\bar{q}+c(t)\,\bar{r};$$

$$\bar{V}(t)=X(t)\,\bar{p}+Y(t)\,\bar{q}+Z(t)\,\bar{r}.$$

Egalând componentele în relaţia (51, V), obţinem relaţiile

$$\frac{dX}{dt}=a(t);\quad \frac{dY}{dt}=b(t);\quad \frac{dZ}{dt}=c(t), \tag{52,V}$$

care formează un sistem de ecuaţii diferenţiale, integrabile imediat prin formulele:

$$X(t)=\int a(t)dt+\alpha;\quad Y(t)=\int b(t)dt+\beta;\quad Z(t)=\int c(t)dt+\gamma, \tag{53,V}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma$ sunt trei constante arbitrare.

Punând apoi

$$\bar{\lambda}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r},$$

expresia lui $\bar{V}(t)$ devine

$$\bar{V}(t)=\bar{p}\int a(t)\,dt+\bar{q}\int b(t)\,dt+\bar{r}\int c(t)\,dt+\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r}=$$
$$=\int(a\bar{p}+b\bar{q}+c\bar{r})dt+(\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\bar{\gamma}\bar{r}),$$

deci, sub formă condensată,

$$\bar{V}(t)=\int\bar{v}(t)\,dt+\bar{\lambda}. \tag{54,V}$$

Formula (54,V), astfel obţinută, exprimă *convenţional* vectorul $\bar{V}(t)$, determinat prin componentele sale $X, Y, Z$, definite de ecuaţiile diferenţiale (52,V) şi calculate prin formulele (53,V).

Vom spune că *funcţia primitivă a vectorului* $\bar{v}(t)$ este vectorul $\bar{V}(t)$, definit prin operaţia (54,V), pe care o vom numi *integrală indefinită vectorială*, prin analogie cu integrala indefinită scalară.

*Pentru a calcula o astfel de integrală, vom putea recurge, ca mai sus, la integralele componentelor vectorului* $\bar{v}(t)$, *sau vom putea găsi direct o primitivă*, folosind chiar relaţia de definiţie (51,V), care este o *ecuaţie diferenţială vectorială.*

In cazul când am obţinut o primitivă, *vom avea soluţia cea mai generală, adăugându-i un vector constant arbitrar* $\bar{\lambda}$.

Este uşor de arătat că *ambele căi conduc la aceeaşi soluţie.* In adevăr, fie $\bar{V}_0(t)$ o primitivă a vectorului $\bar{v}(t)$, găsită direct, deci o funcţie care verifică relaţia

$$\frac{d\bar{V}_0}{dt}=\bar{v}(t).$$

căzând-o, membru cu membru, din ecuaţia (51,V), vom avea

$$\frac{d(\bar{V}-\bar{V}_0)}{dt}=0.$$

Ori, singurii vectori, care au derivata nulă, sunt vectorii constanţi, cum se poate deduce uşor din formula (32,V) de descompunere a derivatei unui vector în componente pe direcţia vectorului şi a unei perpendiculare pe el. (Exerciţiu).

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\overline{V}-\overline{V}_0=\overline{\lambda};\quad \overline{V}=\overline{V}_0+\overline{\lambda},$$

unde $\overline{\lambda}$ este un vector constant.

Soluţia obţinută direct diferă deci de cea calculată prin formula (54,V), printr'un vector constant arbitrar.

**Exemplu.** Să se determine primitiva vectorului

$$\overline{v}(t)=\overline{a}\,e^t(t+1)+\overline{b}e^t\frac{t-1}{t^2}.$$

unde $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt vectori constanţi.

Vom scrie

$$\overline{V}(t)=\overline{a}\int e^t(t+1)\,dt+\overline{b}\int e^t\frac{t-1}{t^2}\,dt+\overline{\lambda}=\overline{a}te^t+\overline{b}\,\frac{e^t}{t}+\overline{\lambda},$$

Ecuaţia diferenţială de definiţie este

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=\overline{a}e^t(t+1)+\overline{b}e^t\frac{t-1}{t^2}.$$

Noţiunea de *integrală definită* poate fi extinsă, deasemenea, la funcţiile vectoriale continue, fie cu ajutorul componentelor, fie direct prin analogie cu integralele scalare. Fiind dat vectorul $\overline{v}(t)$ continuu în intervalul $[t_1, t_2]$, vom împărţi, pentru un $n$ dat, acest interval în $n$ intervale parţiale $\delta\tau_1, \delta\tau_2, \ldots, \delta\tau_n$, astfel încât cel mai mare din aceste intervale să tindă către zero, când $n$ tinde către infinit. In aceste intervale vom lua punctele $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ şi vom calcula suma vectorială

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{v}(\tau_i)\delta\tau_i,$$

care reprezintă un vector.

Prin definiţie, vom avea

$$\int_{t_1}^{t_2}\overline{v}(\tau)\,d\tau=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{v}(\tau_i)\,\delta\tau_i. \qquad (55,V)$$

Raţionamente analoage cu cele utilizate pentru stabilirea existenţei integralei definite scalare pentru o funcţiune continuă într'un interval dat, conduc la demonstraţia existenţei limitei sumei vectoriale (55,V). Evident, se poate folosi aceeaşi descompunere în componente, ceeace reduce problema la cazul integralei scalare. Odată obţinută *integrala definită*, se poate arăta că dacă limita superioară este variabilă, expresia

$$\overline{V}(t)=\int_{t_1}^{t}\overline{v}(\tau)\,d\tau$$

defineşte o funcţie $\overline{V}(t)$, continuă în raport cu $t$, derivabilă în orice punct $t$ din intervalul $(t_1, t_2)$ şi a cărei derivată este chiar vectorul $\overline{v}(t)$:

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=\overline{v}(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

**Integralele vectoriale au proprietăţi analoage cu cele scalare.**

**Astfel,**

$$\int_{t_1}^{t_2} [\overline{u}(\tau)+\overline{v}(\tau)]\,d\tau=\int_{t_1}^{t_2}\overline{u}(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t_2}\overline{v}(\tau)\,d\tau;$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\lambda\overline{v}(\tau)\,d\tau=\lambda\int_{t_1}^{t_2}\overline{v}(\tau)\,d\tau\,;$$

$$\int_{t_1}^{t_2}[\overline{a}\times\overline{v}(\tau)]\,d\tau=\overline{a}\times\int_{t_1}^{t_2}\overline{v}(\tau)\,d\tau,$$

**unde $\lambda$ este un scalar constant, iar $\overline{a}$ un vector constant,**

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\overline{v}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}|\overline{v}(\tau)|\,d\tau.$$

**In aplicaţii, apar şi integrale scalare a unor expresii vectoriale ca**

$$\int_{t_1}^{t_2}\overline{u}(\tau)\,\overline{v}(\tau)\,d\tau;\quad\int_{t_1}^{t_2}[\overline{u}(\tau)\,\overline{v}(\tau),\,\overline{w}(\tau)]\,d\tau.$$

**Derivarea sub semnul integral.** *Dacă vectorul $\overline{v}$ depinde şi de un parametru $\alpha$, fiind o funcţie $\overline{v}(t,\alpha)$ derivabilă continuu în raport cu $\alpha$, se poate extinde formula de derivare sub semnul integral.*

Fie

$$\overline{V}[t_1(\alpha),t_2(\alpha),\alpha]=\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)}\overline{v}(\tau,\alpha)\,d\tau. \qquad (56,V)$$

Vom avea

$$\frac{d\overline{V}}{d\alpha}=\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)}\frac{\partial\overline{v}(\tau,\alpha)}{\partial\alpha}d\tau+\overline{v}(t_2(\alpha),\alpha)\frac{dt_2}{d\alpha}-\overline{v}(t_1(\alpha),\alpha)\frac{dt_1}{d\alpha} \qquad (57,V)$$

In adevăr, vectorul $\overline{V}$, definit prin integrala (56,V), este o funcţie compusă de $\alpha$ prin limitele de integrare $t_1(\alpha)$, $t_2(\alpha)$ şi prin $\overline{v}(\tau,\alpha)$.

Se arată că, dacă $\alpha$ nu intervine decât în $\overline{v}(\tau,\alpha)$, avem

$$\frac{d\overline{V}}{d\alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\overline{v}}{d\alpha}\,d\tau.$$

Pe de altă parte, derivata totală a lui $\overline{V}[t_1(\alpha),t_2(\alpha),\alpha]$ este:

$$\frac{d\overline{V}}{d\alpha}=\frac{\partial\overline{V}}{\partial t_1}\frac{dt_1}{d\alpha}+\frac{\partial\overline{V}}{\partial t_2}\frac{dt_2}{d\alpha}+\frac{\partial\overline{V}}{\partial\alpha}.$$

Cum însă

$$\frac{\partial\overline{V}}{\partial t_2}=\overline{v}(t_2,\alpha);\quad\frac{\partial\overline{V}}{\partial t_1}=-\overline{v}(t_1,\alpha),$$

expresia derivatei totale devine imediat cea dată de formula (57,V). Noţiunea de integrală vectorială poate fi extinsă şi la integralele curbilinii, de suprafaţă

Scanned with OKEN Scanner

sau de volum. Aceste integrale, ce își găsesc numeroase aplicații fizice, necesitând cunoașterea unor noțiuni de teoria curbelor strâmbe și a suprafețelor, vor fi introduse ulterior în teoria câmpurilor.

**Exemplul 1.** In problema calculului forței medii, care apare între două elemente de curent, parcurse de curent alternativi, expresia forței este:

$$\overline{F}_{12}=\frac{\overline{i}_2\times(\overline{i}_1\times\overline{r}_{12})}{r_{12}^3}.$$

Elementele de curent alternativ pot fi scrise (separând dependența de timp):

$$\overline{i}_1=\overline{I}_1\sin\omega t;\quad \overline{i}_2=\overline{I}_2\sin(\omega t+\varphi),$$

unde $\varphi$ este defazajul celor doi curenți, iar $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ amplitudinile celor două elemente de curent.

Forța va avea o perioadă egală cu aceea a curenților, iar valoarea medie a acestei forțe este

$$\overline{F}_{12\,med}=\frac{1}{T}\int_0^T\overline{F}_{12}(t)\,dt.$$

în cazul nostru

$$\overline{F}_{12\,med}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\overline{i}_2\times(\overline{i}_1\times\overline{r}_{12})}{r_{12}^3}\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\overline{I}_1\times(\overline{I}_2\times\overline{r}_{12})}{r_{12}^3}\cdot\sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{I}_1\times(\overline{I}_2\times\overline{r}_{12})}{r_{12}^3}\sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,d(\omega t)=$$

$$=\frac{\overline{I}_1\times(\overline{I}_2\times\overline{r}_{12})}{r_{12}^3}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,d(\omega t)=$$

$$=\frac{\overline{I}_2\times(\overline{I}_1\times\overline{r}_{12})}{r_{12}^3}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\omega t\cos\varphi\,d(\omega t)=\frac{\overline{I}_2\times(\overline{I}_1\times\overline{r}_{12})}{2r_{12}^3}\cdot\cos\varphi.$$

**Exemplul 2.** Integralele vectoriale intervin și atunci când vrem să desvoltăm o funcțiune vectorială periodică în serie *Fourier*. Astfel, funcțiunea vectorială $\overline{F}(t)$, periodică, de perioadă $2\pi$, și netedă pe porțiuni, poate fi desvoltată în seria Fourier

$$\overline{F}(t)=\frac{\overline{a}_0}{2}+\sum_1^\infty\overline{a}_n\cos nt+\overline{b}_n\sin nt,$$

seria fiind uniform convergentă în toate punctele de continuitate.
Expresiile vectoriale ale coeficienților Fourier sunt

$$\overline{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F}(\tau)\cos n\tau d\tau,$$

$$\overline{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F}(\tau)\sin n\tau d\tau.$$

Această serie vectorială este echivalentă cu trei serii scalare obţinute, fie descompunând după versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ expresiile lui $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$, fie desvoltând în serie componentele lui $\bar{F}(t)$.

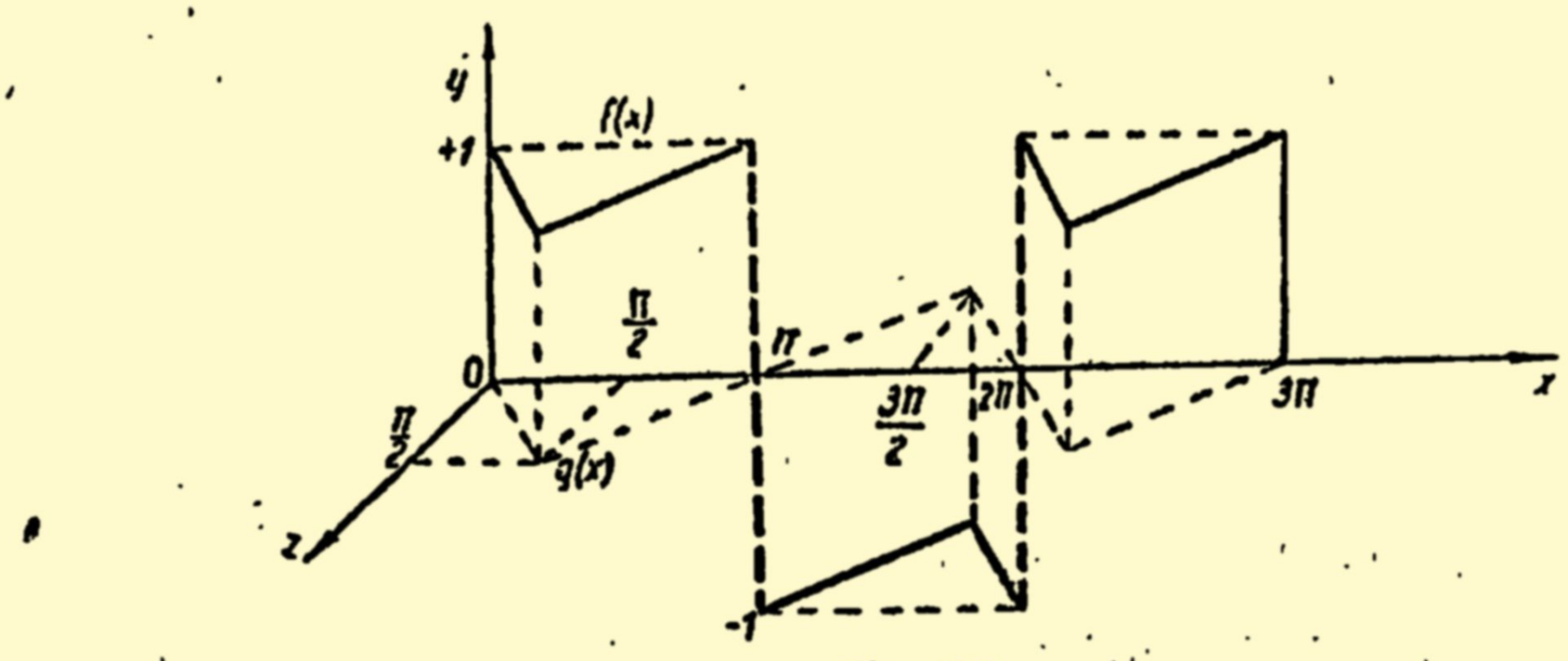



Fig. 139

Astfel curba din fig 139 (desenată în perspectivă) este discontinuă în punctele $y=n\pi$. Pentru a o reprezenta parametric, vom folosi desvoltările Fourier ale proiecţiilor pe planele $zOy$ şi $xOy$. Luând pe $x$ ca parametru, curba are expresia

$$\bar{r}(x)=\bar{i}x+\bar{j}f(x)+\bar{k}g(x),$$

unde

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ pentru } & 0<x<\pi;\\ -1 \text{ pentru } & \pi<x<2\pi;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x & \text{pentru } 0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2};\\ \pi-x & \text{pentru } \dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{2};\\ x-2\pi & \text{pentru } \dfrac{3\pi}{2}\leqq x\leqq 2\pi.\end{cases}$$

Rezultatul desvoltării este următorul

$$\bar{r}(x)=\bar{i}x+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)}\left(\bar{j}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)}+\bar{k}\right).$$

## § 157. Ecuaţii diferenţiale vectoriale

Noţiunea de funcţie primitivă vectorială permite unele extensiuni ale ecuaţiilor diferenţiale scalare, mai precis integrarea pe cale vectorială a unor ecuaţii diferenţiale, în care funcţiile necunoscute constitue componentele unuia sau mai multor vectori.

Deşi metodele utilizate nu reuşesc să constitue o teorie sistematică, cazurile ce se prezintă, justifică pe deplin examinarea lor, deoarece provin din aplicaţii fizice sau geometrice importante, a căror tratare pe cale vectorială pune în evidenţă noţiunile legate direct şi firesc de problemele din care provin.

In general, *o ecuaţie vectorială reprezintă sub formă condensată un sistem de ecuaţii scalare cu mai multe necunoscute.*

Scanned with OKEN Scanner

**Exemplul 1:** Ecuația

$$\bar{V} \times \frac{d\bar{V}}{dt} = 0 \qquad (58, V)$$

condensează sistemul de trei ecuații diferențiale scalare

$$Y\frac{dZ}{dt} - Z\frac{dY}{dt} = 0; \quad Z\frac{dX}{dt} - X\frac{dZ}{dt} = 0; \quad X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt} = 0,$$

care se poate pune și sub forma

$$\frac{dX}{X} = \frac{dY}{Y} = \frac{dZ}{Z} = d\tau = \varphi(t)\, dt$$

și se integrează imediat. Obținem

$$X = \alpha e^{\tau}; \qquad Y = \beta e^{\tau}; \qquad Z = \gamma e^{\tau}; \qquad \bar{V} = \bar{\omega} e^{\tau},$$

unde

$$\bar{\omega} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}$$

este un vector constant arbitrar. Se vede că soluția este un vector de direcție constantă.

Aceeași ecuație se poate integra vectorial ținând seamă de formula (32, V) de descompunere a derivatei după două direcții. Punând

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{v} + V\frac{d\bar{v}}{dt}; \quad \bar{V} = V\bar{v}$$

ecuația (58,V) devine

$$V^2\bar{v} \times \frac{d\bar{v}}{dt} = 0.$$

Excluzând soluția evidentă $V=0$, deci $\bar{V}=\bar{0}$, nu vom putea avea

$$\bar{v} \times \frac{d\bar{v}}{dt} = 0$$

decât dacă

$$\bar{v} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = 0,$$

deoarece $\bar{v}$ și $\frac{d\bar{v}}{dt}$ sunt perpendiculari.

Prima soluție revine la $\bar{V}=\bar{0}$, iar a doua la

$$\bar{v} = \bar{a} = \text{const}; \quad \bar{V} = V(t)\,\bar{a},$$

deci $\bar{V}$ este un vector de direcție constantă.

Printr'o alegere convenabilă a parametrului $t$, soluția coincide cu cea găsită pe cale scalară.

**Exemplul 2.** Ecuația

$$\bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt} = 0$$

reprezintă o singură ecuație diferențială scalară cu trei necunoscute

$$X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt} + Z\frac{dZ}{dt} = 0,$$

care se integrează deasemenea imediat, prin relația

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = d^2 = \text{const}$$

între cele trei necunoscute, din care deci, două rămân arbitrare.

Scanned with OKEN Scanner

Pe cale vectorială se ajunge la același rezultat, observând că

$$2\bar{V}\cdot\frac{d\bar{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{V}\cdot\bar{V})=\frac{d}{dt}V^2=0,$$

de unde

$$V^2=d^2=\text{const.}$$

*Integrarea pe cale vectorială justifică operațiile făcute pentru a se ajunge la o formă cunoscută, operații care uneori par artificiale în metodele scalare.*

**Exemplul 3.** Ecuația

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{r}, \qquad (59, V)$$

unde $\bar{\omega}$ este un vector constant, reprezintă ecuația vectorială de mișcare a unui punct, sub forma unei relații între viteză și vectorul de poziție. Dacă punem

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k};$$

$$\bar{\omega}=\omega_1\bar{i}+\omega_2\bar{j}+\omega_3\bar{k},$$

ecuația (59, V) se transformă în sistemul scalar

$$\frac{dx}{dt}=\omega_2 z-\omega_3 y;$$

$$\frac{dy}{dt}=\omega_3 x-\omega_1 z; \qquad (60, V)$$

$$\frac{dz}{dt}=\omega_1 y-\omega_2 x,$$

având trei ecuații și trei necunoscute.

Pentru integrare prin metode scalare vom căuta *combinații integrabile*, deci expresii care sunt diferențiale exacte, din care deducem integrale prime. Inmulțind respectiv cu $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ cele trei ecuații (60, V) și adunând membru cu membru, deducem

$$\omega_1\frac{dx}{dt}+\omega_2\frac{dy}{dt}+\omega_3\frac{dz}{dt}=0,$$

de unde obținem integrala primă

$$\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z=a=\text{const.} \qquad (61, V)$$

Deasemenea, înmulțind ecuațiile (60, V) respectiv cu $x$, $y$, $z$ și adunând membru cu membru, deducem combinația integrabilă

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0$$

și deci integrala primă

$$x^2+y^2+z^2=b^2=\text{const.} \qquad (62, V)$$

In sfârșit, ridicând la pătrat ecuațiile (60, V) și adunându-le membru cu membru, ținând seama de identitatea lui Lagrange, vom avea

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(\omega_2 z-\omega_3 y)^2+(\omega_3 x-\omega_1 z)^2+(\omega_1 y-\omega_2 x)^2=$$

$$=(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)(x^2+y^2+z^2)-(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)^2.$$

Punând

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2$$

Scanned with OKEN Scanner

și ținând seama de cele două integrale prime (61, V) și (62, V), vom avea

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \omega^2 b^2 - a^2 = \text{const.} \qquad (63, V)$$

Folosind rezultatele obținute, deducem că mișcarea se face într'un plan definit prin integrala primă (61, V), perpendicular pe vectorul

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{i} + \omega_2 \bar{j} + \omega_3 \bar{k}.$$

Din formula (62, V) deducem că punctul mobil este pe sfera de rază $b$ (fig. 140) cu centrul în origine, deci mișcarea va fi circulară.

Din formula (63, V) deducem că viteza va fi constantă, deci mișcarea este circulară uniformă.

Distanța dela $O$ la planul cercului fiind

$$OP = \frac{a}{\omega},$$

vom avea

$$\rho^2 = \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2 = b^2 - \frac{a^2}{\omega^2} = \frac{b^2\omega^2 - a^2}{\omega^2}.$$

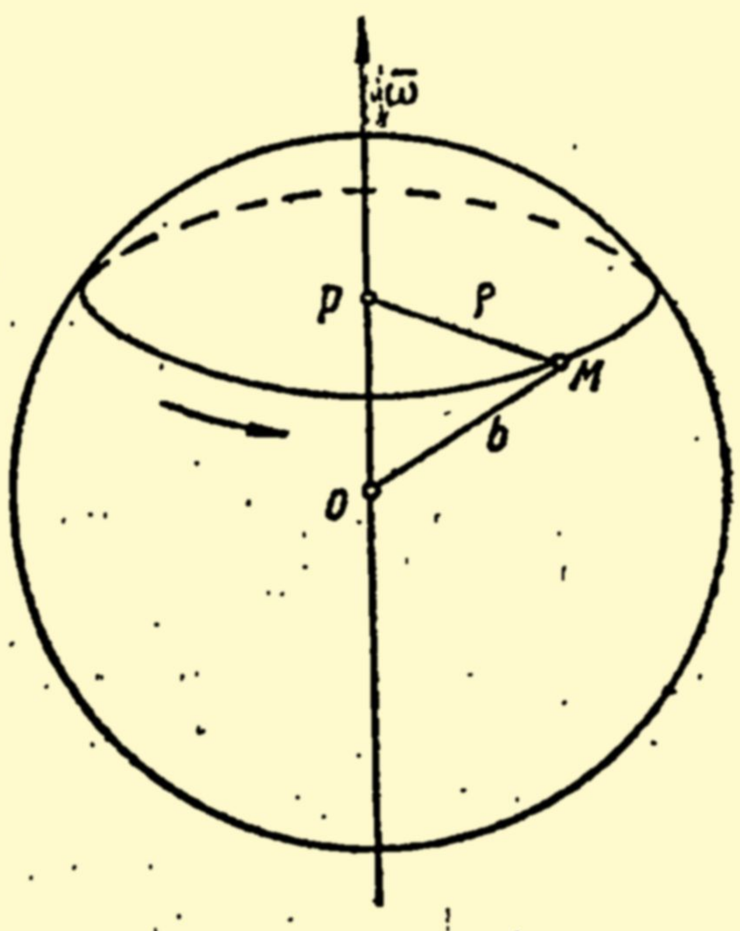


Fig. 140

Ținând seama de (63, V) expresia vitezei va fi $v^2 = \omega^2\rho^2$, deci $v = \omega\rho$, ceeace arată că $\omega$ reprezintă viteza unghiulară constantă. Dacă folosim pentru integrarea aceleiași ecuații (59, V) o metodă vectorială, vom regăsi aceleași rezultate, dar pe o cale mai simplă și mai naturală.

In adevăr, pornind dela intenția de a obține integrale prime, vom căuta diferențiale vectoriale nule, care apoi ne vor conduce la primitive constante.

Două astfel de diferențiale sunt vizibile imediat, dacă înmulțim scalar ambii membri ai ecuației (59, V) prin $\bar{\omega}$, respectiv $\bar{r}$. Vom avea astfel:

$$\bar{\omega}\frac{d\bar{r}}{dt} = 0 \quad \text{și} \quad \bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt} = 0,$$

de unde

$$\bar{\omega}\bar{r} = a \quad \text{și} \quad \bar{r}^2 = b^2,$$

deci integralele prime (61, V) și (62, V).

Ținând atunci seama că în produsul vectorial $\bar{\omega} \times \bar{r}$ ambii factori au modulul constant, suntem conduși să evaluăm $|\bar{\omega} \times \bar{r}|$. Vom avea deci

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = \bar{\omega}^2\bar{r}^2 - (\bar{\omega}\bar{r})^2 = \omega^2 b^2 - a^2 = \text{const}$$

și vom deduce toate concluziile anterioare din integralele prime vectoriale obținute.

Este suficient să comparăm etapele integrării pentru a înțelege avantajele metodei vectoriale. Dacă integralele prime (61, V) și (62, V) se puteau deduce fără eforturi, relația (63, V) nu era sugerată decât de amintirea identității lui Lagrange și de formele celor două integrale prime, pe când în metoda vectorială este natural să se evalueze $v^2$, deoarece însăși ecuația (59, V) exprima viteza liniară ca un produs vectorial, în care $\bar{\omega}$ apare ca un vector ce reprezintă viteza unghiulară.

*Din același exemplu se poate deduce rolul și posibilitățile metodelor vectoriale în integrarea ecuațiilor diferențiale.*

Scanned with OKEN Scanner

Un sistem de ecuații, pus sub formă vectorială, exprimă relații între mărimi fizice sau geometrice, caracteristice unui fenomen sau unei configurații geometrice, independent de alegerea unui anumit sistem de referință.

*Metodele de integrare efectivă a sistemelor diferențiale nu au caracter general* decât pentru anumite clase de sisteme, cum sunt de exemplu, sistemele liniare cu coeficienți constanți. Deaceea, *ele se bazează pe găsirea integralelor prime* prin care se reduc dificultățile de integrare.

Ori, o integrală primă este o relație diferențială de un ordin mai redus decât cel inițial, sau chiar o relație între mărimi finite, al cărei prim membru rămâne constant pe curbele integrale, respectiv în evoluția fenomenului.

O astfel de relație are, deasemenea, un carecter invariant și exprimă o proprietate a fenomenului sau configurației studiate. *Este deci natural ca integralele prime să aibă forma vectorială și în consecință ele pot fi găsite mai ușor și mai natural pe cale vectorială.*

Aplicațiile geometrice și fizice pun, dealtfel, în evidență importanța integralelor prime, chiar în cazurile când integrarea nu poate fi realizată complect prin cuadraturi.

Folosirea metodelor vectoriale în integrarea ecuațiilor diferențiale nu exclude, dealtfel, utilizarea unui sistem de referință. Dimpotrivă, uneori alegerea convenabilă a unui sistem legat de problema urmărită ușurează considerabil integrarea, lăsând rezultatelor toată generalitatea, deoarece alegerea sistemului de referință nu particularizează mărimile, care intervin în ecuații, printr'o situație specială accidentală.

**Exemplul 4.** Vom da un exemplu teoretic pentru a sublinia considerațiile făcute. Fie ecuația liniară de ordinul întâi

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\lambda(t)\bar{V}(t)+\bar{\mu}(t), \qquad (64,V)$$

unde $\lambda(t)$ este o funcție scalară continuă, și $\bar{\mu}(t)$ un vector continuu, dat într'un interval $(t_1, t_2)$.

Sistemul diferențial scalar, echivalent cu (64,V), este

$$\frac{dX}{dt}=\lambda X+\alpha;\quad \frac{dY}{dt}=\lambda Y+\beta;\quad \frac{dz}{dt}=\lambda Z+\gamma,$$

format din trei ecuații liniare de ordinul întâi, neomogene, care se pot integra separat.

Procedând vectorial, vom considera întâi ecuația omogenă

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\lambda\bar{V}. \qquad (65,V)$$

Nu vom putea urmia calea obișnuită din Analiza scalară, fiindcă nu putem împărți prin $\bar{V}$ în ambii membri.

Vom pune deci

$$\bar{V}=V\bar{v},$$

unde $\bar{v}$ este versorul lui $\bar{V}$ și vom avea

$$\left(\frac{dV}{dt}-\lambda V\right)\bar{v}+V\frac{d\bar{v}}{dt}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\bar{v}$ și $\frac{d\bar{v}}{dt}$ sunt perpendiculari, dacă $\frac{d\bar{v}}{dt} \neq \bar{0}$, acești vectori sunt liniar independenți și va trebui să avem

$$\frac{dV}{dt} - \lambda V = 0; \quad V = 0,$$

deci $\bar{V} = \bar{0}$. Excluzând această soluție banală, va trebui ca

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \quad \bar{v} = \bar{a} = \text{const.}$$

și deci

$$\frac{dV}{dt} - \lambda V = 0,$$

de unde

$$V = ce^{\int \lambda(t)\,dt}, \quad \text{deci} \quad \bar{V} = \bar{a}e^{\int \lambda(t)dt} \qquad (66,V)$$

înglobând constanta $c$ în vectorul constant arbitrar $\bar{a}$.

Soluția obținută verifică ecuația omogenă (65,V), dar nu și ecuația inițială neomogenă (64,V). Deaceea, vom aplica metoda variației constantelor, presupunând vectorul $\bar{a}$ variabil și impunând soluției (66,V) să verifice ecuația (64,V). Obținem imediat ecuația

$$\frac{d\bar{a}}{dt} e^{\int \lambda(t)dt} = \bar{\mu}(t),$$

de unde

$$\bar{a} = \int e^{-\int \lambda(t)dt} \bar{\mu}(t)\,dt + \bar{b}$$

$b$ fiind un vector constant arbitrar.

Integrala generală a ecuației (64,V) va fi deci

$$\bar{V} = e^{\int \lambda(t)\,dt} \left[ \bar{b} + \int e^{-\int \lambda(t)dt} \bar{\mu}(t)\,dt \right],$$

expresie care pune în evidență o integrală vectorială.

**Aplicație.** *Mișcarea unui electron într'un câmp electromagnetic.* Dacă notăm cu $m$ masa, cu $e$ sarcina electrică a unui electron, cu $c$ viteza luminii, cu $\bar{E}$ și $\bar{H}$ câmpurile electric și magnetic, ecuația vectorială de mișcare este

$$m\ddot{\bar{r}} = -e\bar{E} - \frac{e}{c}\left(\dot{\bar{r}} \times \bar{H}\right), \qquad (67,V)$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție.

Vom presupune că electronul pleacă din origine cu viteză nulă la momentul inițial $t=0$ și $\bar{E} \cdot \bar{H} = 0$.

Ecuația (67,V) este de ordinul al doilea, dar poate fi integrată direct odată, ținând seama că $\bar{E}$ și $\bar{H}$ sunt vectori constanți. Vom avea integrala primă

$$m\dot{\bar{r}} = -et\bar{E} - \frac{e}{c}(\bar{r} \times \bar{H}) + \bar{\lambda},$$

unde $\bar{\lambda}$ este un vector constant arbitrar.

Impunând condițiile inițiale:

$$\bar{r}(0) = 0; \quad \dot{\bar{r}}(0) = 0,$$

deducem $\bar{\lambda} = 0$, deci

$$m\dot{\bar{r}} = -et\bar{E} - \frac{e}{c}(\bar{r} \times \bar{H}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (67,V) valoarea lui $\ddot{\bar{r}}$, obținem ecuația

$$\ddot{\bar{r}} = -\frac{c\bar{E}}{m} + \frac{e^2t}{cm^2}(\bar{E}\times\dot{\bar{H}}) - \frac{e^2H^2}{c^2m^2}\bar{r}.$$

ținând seama că $\bar{E}\cdot\bar{H}=0$ și $\bar{H}\cdot\dot{\bar{r}}=0$, deci $\bar{H}\cdot\bar{r}=0$, în virtutea condițiilor inițiale.

Mișcarea se face într'un plan perpendicular pe câmpul magnetic, fiindcă $\bar{H}\cdot\bar{r}=0$.

Notând

$$\frac{eH}{mc}=\omega,$$

suntem conduși la ecuația

$$\ddot{\bar{r}}+\omega^2\bar{r}=\frac{Ee}{m}(-\bar{j}+\omega t\bar{i}), \qquad (68,V)$$

dacă notăm

$$\bar{E}=E\bar{j};\quad \bar{H}=H\bar{k};\quad \bar{E}\times\bar{H}=EH(\bar{j}\times\bar{k})=EH\bar{i},$$

$\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ fiind versori ortogonali.

Prin aceste modificări ecuația (67,V) devine o ecuație liniară cu coeficienți constanți, neomogenă, având ca ecuație omogenă asociată

$$\ddot{\bar{r}}+\omega^2\bar{r}=0,$$

de tipul ecuației vibrațiilor armonice. Integrarea acestei ecuații este imediată. Ea admite soluții de forma

$$\bar{r}=\bar{a}\cos\omega t+\bar{b}\sin\omega t,$$

unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt vectori constanți arbitrari.

Pentru a integra ecuația neomogenă (68,V), având în vedere că aceasta condensează trei ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, este suficient să găsim o soluție particulară.

Ori, dacă ținem seama de faptul că membrul al doilea este un vector ce depinde liniar de $t$, este suficient să alegem o soluție liniară în $t$, care va avea derivata a doua nulă. Această soluție este imediată

$$\bar{r}_0=\frac{Ee}{m\omega^2}(\omega t\bar{i}-\bar{j}).$$

Integrala generală a ecuației (68,V) va fi

$$\bar{r}=\bar{a}\cos\omega t+\bar{b}\sin\omega t-\frac{Ee}{m\omega^2}(\omega t\bar{i}-\bar{j}).$$

Impunând condițiile, inițiale, $\bar{r}(0)=0$, $\dot{\bar{r}}(0)=0$, vom avea

$$\bar{r}(0)=\bar{a}-\frac{Ee}{m\omega^2}\bar{j}=0;\quad \dot{\bar{r}}(0)=\omega\bar{b}+\omega\frac{Ee}{m\omega^2}\bar{i}=0,$$

relații din care deducem

$$\bar{a}=\frac{Ee}{m\omega^2}\bar{j};\quad \bar{b}=-\frac{Ee}{m\omega^2}\bar{i}.$$

Integrala căutată a ecuației (67,V) va fi

$$\bar{r}=\bar{j}\frac{Ee}{m\omega^2}(\cos\omega t-1)+\bar{i}\frac{Ee}{m\omega^2}(\omega t-\sin\omega t).$$

Cum mișcarea are loc în planul perpendicular pe $\bar{H}$ și trecând prin origine, deci în planul $(\bar{i},\bar{j})$, vom putea pune

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$x=\frac{Ee}{m\omega^2}(\omega t-\sin\omega t);$$

$$y=-\frac{Ee}{m\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

Traiectoria va fi o cicloidă situată sub axa $Ox$.

## *§ 158. Limite în spațiul afin

Pentru a extinde noțiunile de bază ale analizei la mărimile fizice variabile, în particular la mărimile vectoriale, am considerat aceste mărimi reprezentate geometric în spațiul metric euclidian.

In acest spațiu, a cărui structură este determinată prin axiome, de exemplu, prin axiomele lui Hilbert, este definită distanța dintre două puncte oarecare. Dacă spațiul este raportat la un sistem de axe ortogonale, vom avea

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

iar norma unui vector

$$\overline{V}=X\overline{i}+Y\overline{j}+Z\overline{k}$$

va fi

$$V^2=X^2+Y^2+Z^2.$$

Pentru a introduce noțiunea de limită a unui vector variabil am reprezentat un vector oarecare $\overline{V}$ printr'un vector de poziție, punând $\overline{V}=\overline{OM}$. Prin aceasta am stabilit o corespondență biunivocă între specia vectorilor liberi $V$ și mulțimea punctelor $M$ ale spațiului cu trei dimensiuni.

*Noțiunea de limită, astfel introdusă, folosește noțiunea de sferă, deci noțiunea de distanță, iar în cazul vectorilor, noțiunea de modul al unui vector.*

In spațiul afin, noțiunea de distanță între două puncte oarecare din spațiu nefiind definită, va fi necesar să înlocuim sfera printr'o altă vecinătate pentru a defini punctul limită.

Să considerăm un paralelipiped format cu trei vectori contravarianți nenuli $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$, având centrul într'un punct $A$.

Vom spune că $A$ este un *punct limită* al mulțimii de puncte $S$, dacă în orice paralelipiped $(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)$ cu centrul în $A$ există cel puțin un punct diferit de $A$, care să aparțină mulțimii $S$.

Putem forma o familie de paralelipipede cu centrul în $A$ și cu muchiile paralele cu $p_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$ cuprinse unul în altul, cu vectorii $\epsilon\overline{p}_1$, $\epsilon\overline{p}_2$, $\epsilon\overline{p}_3$, unde $\epsilon>0$ este un parametru variind în intervalul $[0,1]$,

$$0\leqslant\epsilon\leqslant 1.$$

Un astfel de paralelipiped din famille va fi notat prin $V_\epsilon(A)$, sau mai pe scurt prin $V_\epsilon$ (fig. 141).

Orice paralelipiped cu centrul în $A$ constitue o vecinătate a punctului $A$, cu condiția de a-l considera *deschis*, adică format numai din puncte interioare (excluzând suprafața).

Un punct $M$ este interior paralelipipedului $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ cu centrul în $A$, dacă vectorul $\overline{AM}$, considerat ca vector de poziţie al punctului $M$ în raport cu $A$ este de forma

$$\overline{AM} = \lambda^1 \bar{p}_1 + \lambda^2 \bar{p}_2 + \lambda^3 \bar{p}_3,$$

unde $\lambda^1$, $\lambda^2$, $\lambda^3$ sunt numere cuprinse între $-\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2}$, deci

$$|\lambda^1| < \frac{1}{2}, \quad |\lambda^2| < \frac{1}{2}, \quad |\lambda^3| < \frac{1}{2}$$

fără a atinge valoarea $\frac{1}{2}$.

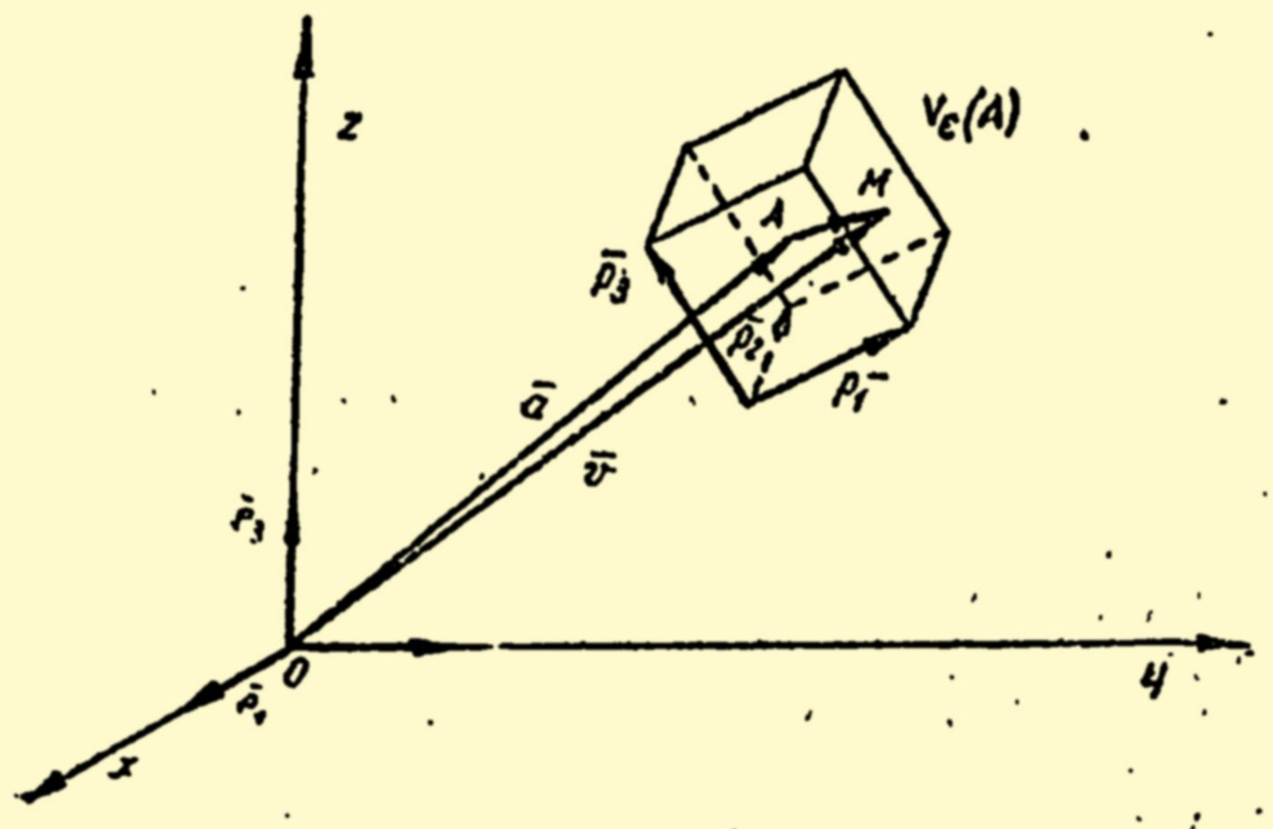



Fig. 141

Reprezentând hodografic specia vectorilor contravarianţi în raport cu un punct de reper oarecare $O$, fiecărui vector $\bar{v}$ îi corespunde biunivoc un punct $M$.

Ca şi în spaţiul metric, vom spune că un vector $\bar{a}$ este *vector limită* al unei mulţimi $\sum$ de vectori $\bar{v}$, dacă punctul reprezentativ $A$ al lui $\bar{a}$ este punct limită al mulţimii $S$ de puncte reprezentative $M$ ale vectorilor $\bar{v}$.

In consecinţă: $\bar{a}$ este un *vector limită* sau *de acumulare* al unei mulţimi $\sum$ de vectori contravarianţi $\bar{v}$, dacă în orice paralelipiped cu centrul în $A$ există cel puţin un punct reprezentativ al vectorilor $\bar{v}$, diferit de $A$.

In acest caz, *orice paralelipiped cu centrul în A conţine o infinitate de puncte reprezentative M.*

Vom spune că un vector contravariant $\bar{q}$ *este cuprins* într'un paralelipiped $V_\varepsilon(A)$ dacă, aşezat cu originea în $A$, extremitatea sa $M$ este în acest paralelipiped şi vom scrie

$$\bar{q} \in V_\varepsilon(A). \tag{69,V}$$

Cu aceste convenţii vom putea defini vectorul limită $\bar{a}$ astfel: *$\bar{a}$ este un vector limită al unei mulţimi $\sum$ de vectori $\bar{v}$ (contravarianţi) dacă, $\varepsilon > 0$ fiind dat, la orice $V_\varepsilon$ cu centrul în A corespunde cel puţin un vector $\bar{v} \in \sum$, astfel ca*

$$\bar{v} - \bar{a} \in V_\varepsilon(A) \quad \text{şi} \quad \bar{v} \neq \bar{a}. \tag{70,V}$$

Dacă alegem vectorii $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ ca bază în spaţiul afin, vom putea pune vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ sub forma:

$$\bar{v} = v^1 \bar{p}_1 + v^2 \bar{p}_2 + v^3 \bar{p}_3; \quad \bar{a} = a^1 \bar{p}_1 + a^2 \bar{p}_2 + a^3 \bar{p}_3.$$

Dacă vectorul $\bar{v} - \bar{a} \in V_\varepsilon(A)$, vom avea:

$$|v^1 - a^1| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |v^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |v^3 - a^3| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{71,V}$$

Uneori vom considera un $V_{2\varepsilon}$, în loc de $V_\varepsilon$, pentru a scrie $|v' - a^1| < \epsilon$, etc., notându-l tot $V_\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Componentele vor fi măsurate pe direcţiile fundamentale cu unităţile $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$, *între care nu vom putea face nicio comparaţie.*

Invers, dacă raportând vectorii $\bar{v} \epsilon \sum$ şi $\bar{a}$ la baza $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$, componentele $v^1$, $v^2$, $v^3$ şi $a^1$, $a^2$, $a^3$ satisfac inegalităţile (71,V), vectorul $\bar{v}-\bar{a}$ va fi cuprins în paralelipipedul $V_\epsilon$ cu centrul în $A$.

Vom putea defini punctele limită ale unei mulţimi de puncte $S$ sau vectorii limită ai unei mulţimi de vectori $\sum$ cu ajutorul componentelor, definiţia fiind analoagă cu cea din spaţiul metric.

*Vectorul $\bar{a}$ este vector limită sau de acumulare al mulţimii* $\sum$ de vectori (contravarianţi) dacă $\epsilon > 0$ fiind dat, există cel puţin un vector $\bar{v} \epsilon \sum$, diferit de $\bar{a}$, ale cărui componente în baza oarecare $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ satisfac inegalităţile

$$|v^1 - a^1| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |v^2 - a^2| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |v^3 - a^3| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Această definiţie este independentă de alegerea unei anumite baze şi deci are caracterul invariant, necesar pentru a defini o mărime vectorială.

## *§ 159. Limite de funcţii vectoriale de o variabilă scalară

Să aplicăm definiţia limitei unei funcţii vectoriale $\bar{v}(t)$, definită într'un interval $(a, b)$, deci unei mulţimi de vectori *corespunzători* valorilor luate de parametrul $t$ în $(a, b)$.

Dacă am considera această mulţime, fără a ţine seama de corespondenţa

$$t \to \bar{v}(t),$$

deci de funcţia

$$\bar{v} = \bar{v}(t)$$

un vector $\bar{a}$ ar fi vector limită al acestei mulţimi în condiţiile precedente, dec, dacă la orice $V_\epsilon$, cu centrul în $A$, ar corespunde cel puţin un vector $\bar{v} \epsilon \bar{v}(t)$ astfel ca

$$\bar{v} - \bar{a} \epsilon V_\epsilon \quad \text{şi} \quad \bar{v} \neq \bar{a}.$$

Deci ar fi suficient să existe o infinitate de vectori $\bar{v}-\bar{a}$ în orice $V_\epsilon(A)$, pentru ca $\bar{a}$ să fie vector limită în mulţimea $\bar{v}(t)$.

In cazul funcţiilor, noţiunea de limită implică o restricţie ce rezultă tocmai din corespondenţa dintre mulţimea valorilor $t \epsilon (a, b)$ şi mulţimea vectorilor $\bar{v}(t)$.

In adevăr, limita unei funcţii se defineşte *pentru o anumită valoare a variabilei,* ceeace înseamnă că *nu numai o parte, ci toate valorile funcţiei trebue să tindă către acea limită, când valorile variabilei tind către acea valoare dată.*

Acesta este sensul definiţiei limitei funcţiei $f(x)$ pentru $x = x_0$: $a$ este limita funcţiei $f(x)$ pentru $x = x_0$ dacă, $\epsilon > 0$ fiind dat, există un $\eta > 0$, astfel ca

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

pentru *orice* $x$, care satisface inegalitatea $|x - x_0| < \eta$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicând aceste observaţii la funcţiile vectoriale, vom defini limita unei funcţii $\bar{v}(t)$, într'un punct $t_0$ din intervalul $(\alpha, \beta)$ astfel:

*Vectorul $\bar{a}$ este limita funcţiei $\bar{v}(t)$,* în punctul $t_0 \epsilon (\alpha, \beta)$ dacă, $\epsilon > 0$ şi $V_\epsilon(A)$ fiind daţi, există un $\eta > 0$, astfel ca

$$\bar{v}(t) - \bar{a} \epsilon V_\epsilon(A) \qquad (72,V)$$

*pentru orice t, care satisface condiţia*

$$|t - t_0| < \eta. \qquad (73,V)$$

Alegând vectorii $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ ca bază, această definiţie devine:

*Vectorul $\bar{a}$, de componente $a^1$, $a^2$, $a^3$, este limita funcţiei*

$$\bar{v}(t) = v^1(t)\,\bar{p}_1 + v^2(t)\,\bar{p}_2 + v^3(t)\,\bar{p}_3$$

*în punctul $t = t_0$ dacă, $\epsilon > 0$ fiind dat, există un $\eta > 0$, astfel încât*

$$|v^1(t) - a^1| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |v^2(t) - a^2| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |v^3(t) - a_3| < \frac{\epsilon}{2}$$

*pentru orice t, care îndeplineşte condiţia*

$$|t - t_0| < \eta.$$

Definiţia limitei pune în corespondenţă paralelipipedul $V_\epsilon(A)$ cu intervalul $t_0 - \eta < t < t_0 + \eta$, astfel încât valorile lui $\bar{v}(t)$ trebue să fie în $V_\epsilon(A)$, de îndată ce valorile lui $t$ sunt în acest interval.

Definiţia limitei unei funcţii vectoriale se aplică nu numai funcţiilor de o variabilă continuă, care ia toate valorile dintr'un interval, *ci poate fi extinsă la funcţii de o variabilă, care parcurge o mulţime de valori numerice sau, mai general, o mulţime de puncte.*

Astfel, *un şir de vectori $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$,..., $\bar{v}_n$ constitue o funcţie vectorială de parametrul întreg n,* deoarece există corespondenţa biunivocă

$$n \to \bar{v}_n,$$

între mulţimea vectorilor şirului şi mulţimea ordonată a numerelor naturale 1, 2,..., $n$,...

Dacă am considera acest şir ca o mulţime de vectori, fără a ţine seama de corespondenţa menţionată, un vector $\bar{a}$ ar fi vector limită pentru acest şir, dacă în orice $V_\epsilon$ cu centrul în $A$ s'ar găsi extremităţile a cel puţin unui vector din şir, diferit de $\bar{a}$, deci a unei infinităţi de vectori aparţinând şirului.

Cu alte cuvinte, dacă ar exista un şir $\bar{v}_{i_1}$, $\bar{v}_{i_2}$,..., $\bar{v}_{i_n}$,..., de vectori extraşi din şirul dat, care ar tinde către $\bar{a}$, iar alte şiruri extrase ar tinde către alte limite $\bar{b}$, $\bar{c}$,... toţi vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$,... ar fi vectori limită ai şirului dat.

Dacă, însă, şirul de vectori $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$,..., $\bar{v}_n$, este considerat ca valorile unei funcţii vectoriale

$$\bar{v} = \bar{v}_n$$

de parametrul întreg natural $n$, atunci va trebui să aplicăm definiţia limitei unei funcţii pentru o valoare a variabilei.

Scanned with OKEN Scanner

*Vectorul* $\bar{a}$ *este limita şirului* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \ldots$ când $n \to \infty$ *dacă,* $\epsilon > 0$ *şi* $V_\epsilon(A)$ *fiind daţi, există un rang N, astfel ca*

$$\bar{v}_n - \bar{a} \epsilon V_\epsilon(A) \qquad (74,V)$$

*pentru orice rang* $n > N$.

Un şir de vectori, care admite o limită $\bar{a}$ în aceste condiţii, se numeşte *şir convergent* către $\bar{a}$.

Introducând baza $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, definiţia convergenţei şirului $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \ldots$ către vectorul $\bar{a}$ devine următoarea:

*Şirul de vectori* $\bar{v}_1\ \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \ldots$ *converge către vectorul* $\bar{a}$ *dacă* $\epsilon > 0$ *fiind dat, există un rang N, astfel ca*

$$|\bar{v}_n^1 - a^1| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |\bar{v}_n^2 - a^2| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |\bar{v}_n^3 - a^3| < \frac{\epsilon}{2};$$

*pentru orice rang* $n > N$.

Limita astfel definită este independentă de alegerea bazei, fiind valabilă pentru orice $V_\epsilon(A)$ dat.

Dacă $\bar{a}$ este limita unei funcţii vectoriale $\bar{v}(t)$ într'un punct $t_0$, orice şir de vectori $\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \ldots, \bar{v}(t_n), \ldots$ extras din mulţimea de vectori $\bar{v}(t)$ va converge către $\bar{a}$, dacă $t_n$ tinde către $t_0$, când $n$ tinde către infinit. Vom avea:

$$\lim_{n \to \infty} \bar{v}(t_n) = \bar{a} \quad \text{dacă} \quad \lim_{n \to \infty} t_n = t_0.$$

Noţiunile de *limită la dreapta* $\bar{l}^+$ şi *limită la stânga* $\bar{l}^-$ ale unei funcţii vectoriale într'un punct $t_0$ trebue înţelese în acelaşi sens. Vom considera funcţia $\bar{v}(t)$, definită separat în intervalele

$$a \leqq t < t_0 \quad \text{şi} \quad t_0 < t \leqq b.$$

Fie $L^+$ şi $L^-$ punctele reprezentative ale vectorilor $\bar{l}^+$ şi $\bar{l}^-$, şi $V_\epsilon(L^+)$, $V_\epsilon(L^-)$, două paralelipipede corespunzătoare.

*Vectorul* $\bar{l}^+$ *(respectiv* $\bar{l}^-$*) este limita la dreapta (respectiv la stânga) a funcţiei* $\bar{v}(t)$ *în punctul* $t_0$, *dacă* $\epsilon > 0$ *şi* $V_\epsilon(L^+)$, [*respectiv* $V_\epsilon(L^-)$] *fiind daţi, există un* $\eta > 0$, *astfel ca*

$$\bar{v}(t) - \bar{l}^+ \epsilon V_\epsilon(L^+), \text{ respectiv } \bar{v}(t) - \bar{l}^- \epsilon V_\epsilon(L^-)$$

*pentru orice t, care satisface condiţia*

$$0 < t - t_0 < \eta, \quad \text{respectiv } 0 < t_0 - t < \eta.$$

Voni scrie atunci

$$\bar{l}^+ = \lim_{t \to t_0 + 0} \bar{v}(t), \quad \text{respectiv } \bar{l}^- = \lim_{t \to t_0 - 0} \bar{v}(t).$$

Aceste limite pot fi diferite sau egale. Dacă funcţia admite o limită în punctul $t = t_0$, când este considerată ca definită în tot intervalul $[a, b]$, excluzând eventual punctul $t_0$, atunci $l^+ = \bar{l}^-$, şi invers.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\bar{l}+ \neq \bar{l}-$, funcţia $\bar{v}(t)$, definită pe intervalul $[a, b]$, nu are o limită în punctul $t = t_0$, compatibilă cu definiţia limitei unei funcţii, deşi vectorii $\bar{l}+$ şi $\bar{l}-$ sunt vectori limită *ai mulţimii* $\sum$ de vectori $\bar{v} = \bar{v}(t)$, considerată ca o simplă mulţime de vectori.

## *§ 160. Funcţii de punct în spaţiul afin

Putem considera funcţii vectoriale de mai multe variabile, sau de un punct $P$, care parcurge un domeniu $D$.

Mulţimea vectorilor $\bar{v}(P)$ constitue un *câmp* de vectori, definit pe domeniul $D$. Corespondenţa

$$P \to \bar{v}(P)$$

este o funcţie vectorială de punctul $P \in D$, pe care o numim *funcţie de câmp*, notând cu

$$\bar{v} = \bar{v}(P),$$

valorile acestei funcţii (fig. 142, a).

*Vectorul $\bar{a}$ este limita valorilor funcţiei $\bar{v}(P)$ în punctul $P_0 \in D$, în care este definit câmpul $\bar{v}(P)$ dacă, $\epsilon > 0$ şi $V_\epsilon(A)$ fiind daţi, există un $\eta > 0$ şi un $V_\eta(P_0)$ astfel încât*

$$\bar{v}(P) - \bar{a} \in V_\epsilon(A), \tag{75,V}$$

*pentru orice punct $P$, care satisface condiţia*

$$\overline{P_0 P} \in V_\eta(P_0). \tag{76,V}$$

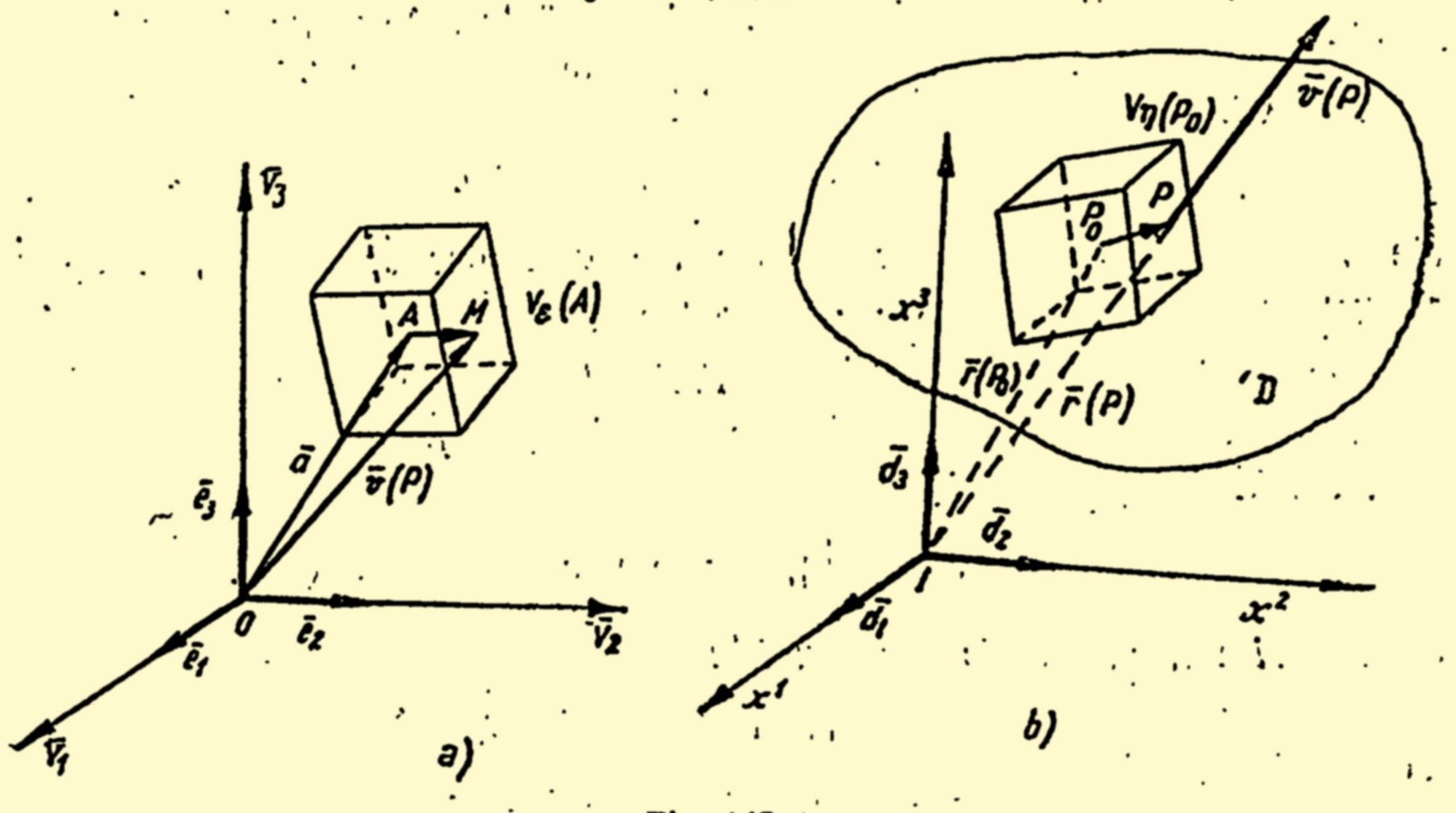



Fig. 142

Cu alte cuvinte, trebue ca punctul reprezentativ $M$ al lui $\bar{v}(P)$ să fie în paralelipipedul $V_\epsilon(A)$, pentru orice punct $P$ din paralelipipedul $V_\eta(P_0)$ cu centrul în $P_0$.

Această definiţie cuprinde pe cea dată anterior pentru funcţiile de o variabilă $t$. În adevăr, paralelipipedul cu centrul într'un punct ţine locul intervalului din spaţiul cu o dimensiune.

Definiţia dată se aplică la funcţii de oricâte variabile scalare $t_1, t_2, \ldots, t_m$, dându-le semnificaţia de coordonate într'un spaţiu cu $p$ dimensiuni.

Dacă raportăm vectorii la două baze $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ şi $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$, vom putea da definiţiei limitei o expresie cu ajutorul componentelor. Să notăm:

$$\bar{r}(P_0) = x_0^1 \bar{d}_1 + x_0^2 \bar{d}_2 + x_0^3 \bar{d}_3;$$

$$\bar{r}(P) = x^1 \bar{d}_1 + x^2 \bar{d}_2 + x^3 \bar{d}_3;$$

$$\bar{v}(P) = v^1(x^1, x^2, x^3)\bar{e}_1 + v^2\bar{e}_2 + v^3\bar{e}_3;$$

$$\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + a^2\bar{e}_2 + a^3\bar{e}_3.$$

Componentele lui $\bar{v}(P)$ vor fi funcţii de coordonatele $x^1, x^2, x^3$ ale punctului $P$.

*Vectorul $\bar{a}$ este limita câmpului $\bar{v}(P)$ în punctul $P_0 \in D$, dacă, $\epsilon > 0$ fiind dat, există un $\eta > 0$ astfel încât*

$$|v^1(x^1, x^2, x^3) - a^1| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |v^2 - a^2| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |v^3 - a^3| < \frac{\epsilon}{2}$$

*pentru orice punct $P(x^1, x^2, x^3)$, ce îndeplineşte condiţiile*

$$|x^1 - x_0^1| < \eta; \quad |x^2 - x_0^2| < \eta; \quad |x^3 - x_0^3| < \eta.$$

Această definiţie este independentă de alegerea sistemelor de referinţă, deoarece ea exprimă numeric definiţia anterioară, care avea un caracter pur geometric.

Noţiunea generală de funcţie, considerată ca o corespondenţă univocă între două mulţimi de elemente, ne permite să privim dintr'un punct de vedere unitar toate mărimile fizice variabile, măsurabile cu un număr finit de unităţi.

În adevăr, dacă examinăm noţiunea de funcţie vectorială de un punct $P$ din spaţiul afin, constatăm că prin reprezentarea vectorului $\bar{v}(P)$ printr'un punct $M$ din spaţiul afin cu trei dimensiuni, funcţia $\bar{v} = \bar{v}(P)$ stabileşte o corespondenţă univocă

$$P \to M; \quad \bar{r}(P) \to \bar{v}(P)$$

între două mulţimi de puncte: *$P$ din spaţiul afin şi $M$ dintr'un spaţiu afin reprezentativ* (fig. 142 *a, b*)

Ori, *vectorul $\bar{v}(P)$ a putut fi reprezentat ca un punct al unui spaţiu cu trei dimensiuni, deoarece este o mărime măsurabilă cu trei unităţi.*

O mărime scalară fiind măsurabilă cu o singură unitate, va putea fi reprezentată deasemenea printr'un punct $M$ dintr'un spaţiu reprezentativ cu o dimensiune.

*O funcţie scalară $u(P)$ de un punct $P$ este o corespondenţă univocă*

$$P \to M; \quad \bar{r}(P) \to u(P)$$

*între o mulţime de puncte $P$ din spaţiul afin cu trei dimensiuni şi o mulţime de puncte $M$, dintr'un spaţiu afin cu o dimensiune, reprezentativ pentru $u(P)$.*

Scanned with OKEN Scanner

Această corespondenţă caracterizată un caracter numeric, dacă folosim o unitate de măsură pentru specia de mărimi scalare $u(P)$ şi un sistem de referinţă $d_1, d_2, \bar{d}_3$ în spaţiul afin cu trei dimensiuni. Vom avea atunci

$$u = u(x^1, x^2, x^3).$$

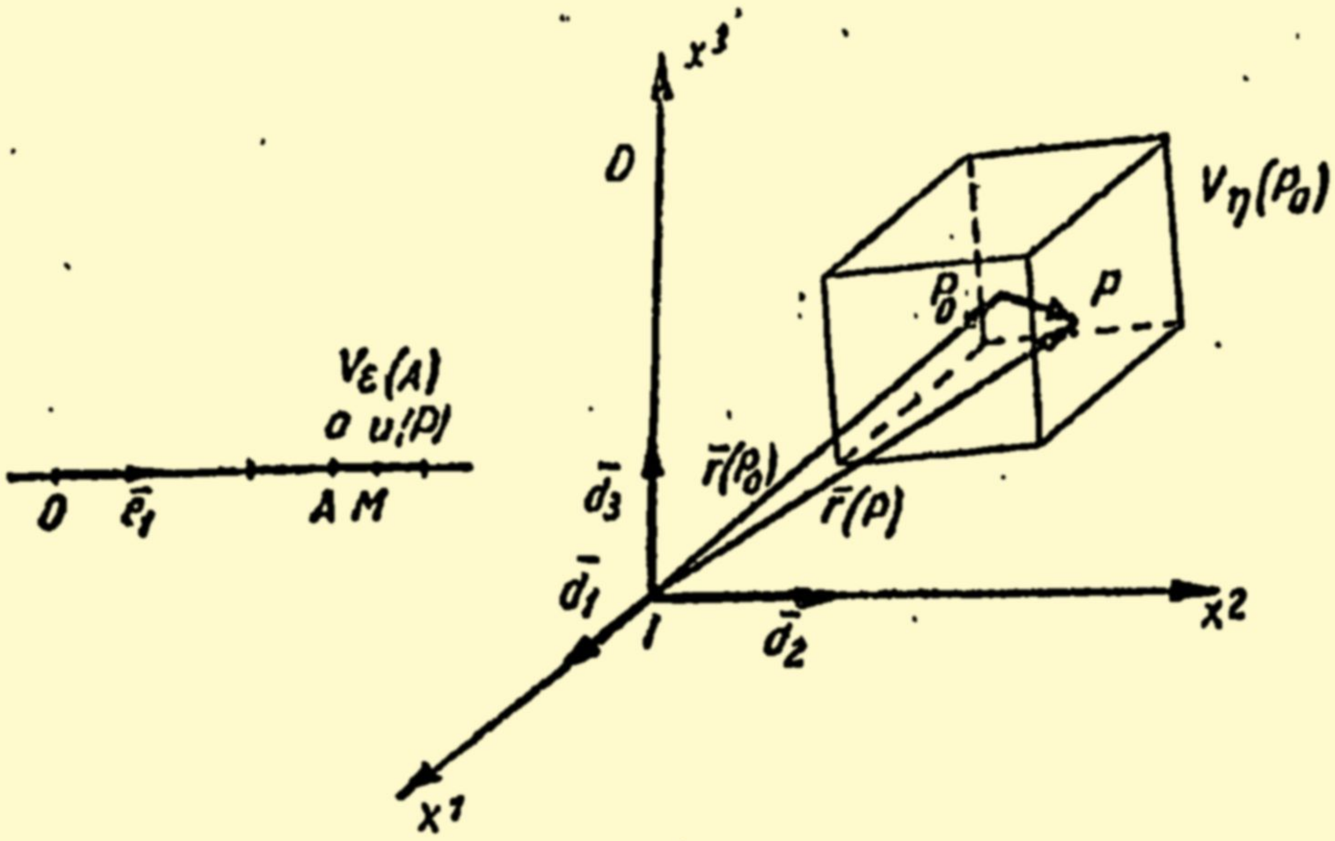



Fig. 143

Noţiunea de limită a unei funcţii scalare într'un punct $P_0$ se deduce imediat din definiţia dată limitei unei funcţii vectoriale. Reprezentarea geometrică (fig. 143) face să corespundă mărimii scalare $u(P)$ *un vector* în spaţiul reprezentativ cu o dimensiune, deci *putem considera limitele funcţiilor scalare ca limite de funcţii vectoriale într'un spaţiu cu o dimensiune.*

Putem deci transpune definiţia limitei la funcţiile scalare astfel:

*Scalarul a este limita funcţiei scalare $u(P)$ în punctul $P_0 \in D$ dacă, $\epsilon > 0$ şi intervalul $V_\varepsilon(A)$, cu centrul în A fiind daţi există un $V_\eta(P_0)$, astfel încât*

$$u(P) - a \in V_\varepsilon(A)$$

*pentru orice punct P, care satisface condiţia*

$$\overline{P_0 P} \in V_\eta(P_0).$$

Introducând măsura mărimii scalare $u(P)$ şi sistemul de referinţă $d_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ în spaţiul afin, definiţia precedentă devine:

*Scalarul a este limita funcţiei scalare $u(P)$ în punctul $P \in D$, dacă $\epsilon > 0$ fiind dat, există un $\eta > 0$, astfel încât*

$$|u(x^1, x^2, x^3) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

*pentru orice punct P, care satisface condiţiile*

$$|x^i - x_0^i| < \eta; \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ea revine la definiţia limitei unei funcţii de trei variabile într'un punct $x_0^1$, $x_0^2$, $x_0^3$.

Evident, în cazul când mărimea scalară $u(P)$ depinde de unul sau doi parametri, o vom considera ca funcţie de un punct într'un spaţiu cu una sau două dimensiuni.

*Reprezentarea mărimilor fizice sau geometrice prin puncte în spaţii reprezentative, cu un număr de dimensiuni egale cu numărul de unităţi ale speciei, permite extensiunea noţiunii de limită la aceste mărimi considerate ca funcţii de punct.* Astfel, fiind dat un bivector contravariant (sau covariant),

Scanned with OKEN Scanner

funcţie de un punct $P$, vom putea folosi o reprezentare a speciei bivectorilor măsurabilă cu trei unităţi, prin puncte ale spaţiului afin cu trei dimensiuni şi vom avea o definiţie analoagă cu aceea a limitei unei funcţii vectoriale de punct (Exerciţiu). Pentru un trivector contravariant (sau covariant), vom folosi reprezentarea într'un spaţiu cu o dimensiune şi vom obţine pentru limita într'un punct o definiţie analoagă cu aceea a limitei unei funcţii scalare (Exerciţiu).

Introducând componentele, definiţiile vor avea înfăţişarea celor din Analiză pentru limitele funcţiilor de una, două sau trei variabile.

In general, din ceeace precedă rezultă că, *raportând spaţiul la un sistem de referinţă, şi mărimile la un sistem de unităţi, limitele mărimilor funcţii de punct se vor defini prin componente, ca limite de funcţii de mai multe variabile.*

Toate aceste definiţii relative la componente sunt independente de sistemele de unităţi folosite.

## *§ 161. Continuitate în spaţiul afin

Noţiunea de continuitate, decurgând din cea de limită, poate fi extinsă deasemenea la spaţiul afin. In adevăr, limita $\bar{a}$ a unei funcţii $\bar{v}(t)$, într'un punct $t_0$, nu este egală în mod obligatoriu cu valoarea $\bar{v}(t_0)$ a funcţiei $\bar{v}(t)$ în punctul $t_0$.

Dacă

$$\lim_{t\to t_0} \bar{v}(t) = \bar{v}(t_0),$$

funcţia $\bar{v}(t)$ este, prin definiţie, *continuă în punctul* $t_0$. Va fi suficient să înlocuim în definiţia limitei unei funcţii de o variabilă continuă $t \in (a, b)$, într'un punct $t_0$, vectorul $\bar{a}$ prin $\bar{v}(t_0)$ pentru a obţine următoarea definiţie:

*O funcţie* $\bar{v}(t) = \overline{OM}$, *definită într'un interval* $(a, b)$, *este continuă în punctul* $t_0 \in (a, b)$, *dacă* $\epsilon > 0$ *şi* $V_\epsilon(M_0)$, *fiind daţi, există un* $\eta > 0$, *astfel ca*

$$\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0) \in V_\epsilon(M_0) \qquad (77,V)$$

*pentru orice* $t$, *care satisface condiţia*

$$|t - t_0| < \eta. \qquad (78,V)$$

Folosind componentele şi înlocuind $V_\epsilon$ prin $V_{2\epsilon}$, această definiţie devine

*O funcţie* $\bar{v}(t)$, *definită în intervalul* $(a, b)$, *este continuă în punctul* $t_0 \in (a, b)$ *dacă, fiind dat* $\epsilon > 0$, *există un* $\eta > 0$, *astfel ca*

$$|v^i(t) - v^i(t_0)| < \epsilon; \quad (i = 1, 2, 3)$$

*pentru orice* $t$, *care satisface condiţia*

$$|t - t_0| < \eta.$$

Această definiţie are aceeaşi formă şi în spaţiul metric, dacă vectorii sunt definiţi prin componentele lor. Ea foloseşte, însă aici, numai măsurile pe cele trei direcţii fundamentale, fără a le compara între ele.

Caracterul geometric al definiţiilor ne permite să extindem noţiunea de continuitate la funcţiile de punct, care înglobează funcţiile de un număr oarecare de variabile scalare.]

Scanned with OKEN Scanner

*O funcţie* $\bar{v}(P)=\overline{OM}$, *definită într'un domeniu D din spaţiu afin, este continuă în punctul* $P_0 \in D$ *dacă, fiind daţi* $\epsilon>0$ *şi* $V_\epsilon(M_0)$, *există un* $V_\eta(P_0)$, *astfel încât*

$$\bar{v}(P)-\bar{v}(P_0) \in V_\epsilon(M_0) \tag{79,V}$$

*pentru orice punct P, care satisface condiţia*

$$\overline{P_0P} \in V_\eta(P_0). \tag{80,V}$$

Exprimând vectorii prin componente, această definiţie va deveni: *O funcţie* $\bar{v}(P)$, *definită în domeniul D din spaţiul afin, este continuă în punctul* $P_0 \in D$ *dacă,* $\epsilon>0$ *fiind dat, există un* $\eta>0$, *astfel încât*

$$|v^i(x^1,x^2,x^3,)-v^i(x_0^1,x_0^2,x_0^3)|<\epsilon\,(i=1,2,3) \tag{81,V}$$

*pentru orice punct P, care îndeplineşte condiţiile*

$$|x^i-x_0^i|<\eta. \tag{82,V}$$

Fiind dată o funcţie vectorială $\bar{v}(\lambda^1,\lambda^2\ldots,\lambda^p)$, depinzând de $p$ parametri scalari, ce variază fiecare în câte un interval dat $(a^k, b^k)$

$$a^k<\lambda^k<b^k;\quad (k=1,2,\ldots p),$$

vom putea extinde noţiunea de continuitate şi la această funcţie, considerând parametrii $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p$ ca fiind coordonatele unui punct dintr'un spaţiu cu $p$ dimensiuni.

Acest spaţiu este convenţional; punctele sale fiind şirurile de numere $(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p)$, el se numeşte *spaţiu aritmetic cu p dimensiuni.*

Continuitatea, ca şi alte proprietăţi ale funcţiilor vectoriale $\bar{v}(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p)$, se exprimă cu ajutorul componentelor, sau direct geometric, cu condiţia de a da o semnificaţie geometrică termenilor numerici corespunzători. Astfel, un $V_\eta(P_0)$ în acest spaţiu este, de fapt, o mulţime de puncte aritmetice, care satisfac inegalităţile

$$|\alpha^k-\alpha_0^k|<\eta,$$

analoage cu (82,V).

*O funcţie vectorială* $\bar{v}(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p)$, *definită într'un domeniu D din spaţiul aritmetic cu p dimensiuni, este continuă în punctul* $P_0 \in D$ *dacă,* $\epsilon>0$ *fiind dat, există* $\eta>0$, *astfel ca:*

$$|v^k(\alpha^1,\ldots,\alpha^p)-v^k(\alpha_0^1,\ldots,\alpha_0^p)|<\epsilon \tag{83,V}$$

*pentru orice punct* $P(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p)$, *care satisface condiţiile*

$$|\alpha^k-\alpha_0^k|<\eta. \tag{84,V}$$

Putem, evident, folosi limbajul complect geometric, considerând $\bar{v}(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p)$ ca o funcţie de punct. Definiţia continuităţii se formulează atunci, ca şi în spaţiul cu trei dimensiuni, cu ajutorul relaţiilor (79,V) şi (80,V).

Ca şi în cazurile precedente, subliniem faptul că *definiţia continuităţii funcţiilor de puncte aritmetice (sau de variabile scalare) este independentă de sistemele de referinţă, în speţă de sistemele de unităţi folosite.*

Scanned with OKEN Scanner

In cazul când $p=1$, regăsim funcțiile de o variabilă scalară; aceasta justifică folosirea unei reprezentări geometrice a valorilor luate de variabilele scalare $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p$ printr'un punct aritmetic, deoarece suntem obișnuiți să reprezentăm numerele reale pe o dreaptă, deci pe un spațiu cu o dimensiune.

In cele ce precedă, ne-am ocupat de funcții de un parametru sau de un punct, urmărind să dăm definiții geometrice noțiunilor de bază ale Analize vectoriale. Prin introducerea reprezentării unui șir $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p$ de numere reale printr'un punct aritmetic și a mulțimii tuturor acestor puncte $P(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^p)$ ca un spațiu aritmetic cu $p$ dimensiuni, *putem considera orice funcție de mai multe variabile ca o funcție de punct.*

Continuitatea mărimilor fizice sau geometrice, funcții de punct, se va defini în mod analog cu continuitatea funcțiilor vectoriale, dacă folosim reprezentarea mărimilor prin puncte dintr'un spațiu cu un număr de dimensiuni, egal cu numărul de unități ale speciei.

De exemplu, o funcție scalară $u(P)$, luând valoarea $u(P_0)$ în punctul $P_0$, reprezentată printr'un punct $M$ dintr'un spațiu cu o dimensiune, va conduce la definiția următoare: *Funcția scalară $u(P)$, definită într'un domeniu $D$ din spațiul afin, este continuă în punctul $P_0 \in D$ dacă, fiind dat intervalul $V_\varepsilon(M_0)$ cu centrul în $M_0$, există un $V_\eta(P_0)$, astfel încât*

$$|u(P)-u(P_0)| \in V_\varepsilon(M_0), \tag{85,V}$$

pentru orice punct $P$, care satisface condiția

$$\overline{P_0P} \in V_\eta(P_0). \tag{86,V}$$

Pentru bivectori, trivectori, etc., vom avea definiții analoage care, prin folosirea componentelor, revin la definiția continuității funcțiilor de mai multe variabile, pentru fiecare componentă în parte.

*Se poate pune întrebarea, dacă nu este inutil să se dea o desvoltare deosebită definițiilor geometrice, folosindu-se spații reprezentative și considerații de teoria mulțimilor de puncte, pentru a se ajunge la concluzia că toate aceste definiții conduc la cele clasice prin folosirea componentelor.*

Pentru a putea răspunde, este necesar să observăm că modul de formare a noțiunii de mărime fizică sau geometrică ne-a condus în mod natural la un *calcul geometric* cu mărimile, calcul care a pus în evidență proprietățile lor algebrice.

Măsura unei mărimi este o proprietate esențială, prin care mărimea este caracterizată în specia respectivă, dar totuși, *măsura nu poate fi substituită complect mărimii, decât atunci când corespondența dintre mărime și măsură este stabilită pentru o categorie de proprietăți.*

Astfel am procedat în Algebra vectorială și din studiul condițiilor de invarianță a acestei corespondențe am fost conduși să stabilim criterii analitice de recunoaștere a unei mărimi prin componentele sale.

Trecerea dela Algebră la Analiza vectorială devine indispensabilă în momentul în care încercăm să caracterizăm un fenomen prin mărimi fizice, deoarece orice fenomen pune în evidență mișcarea și modificarea stării materiei, mărimile caracteristice *fiind variabile* în spațiu și timp.



Scanned with OKEN Scanner

Variaţia mărimilor este înregistrată de variaţia măsurilor lor, deci de variaţia componentelor. Totuşi, din simpla înregistrare a acestei variaţii nu vom putea deduce legea după care variază mărimea, deoarece *va fi necesară sinteza aspectelor particulare cuprinse de aceste componente, care nu reprezintă mărimea decât împreună, în totalitatea lor.*

Aceasta sinteză poate fi efectuată din punct de vedere algebric, deoarece am studiat corespondenţa biunivocă

*mărime* ⟷ *măsură.*

Pentru a o extinde şi la mărimile variabile, este însă necesar să luăm în consideraţie direct, nu prin măsură, noţiunile de bază ale Analizei, cum sunt cele de funcţie şi limită.

In adevăr, aceste noţiuni au rezultat tocmai din cercetarea fenomenelor şi au căpătat, destul de recent, aspectul riguros modern. Noţiunea de funcţie a avut până la Dirichlet o semnificaţie restrânsă, fiind legată de *valoarea funcţiei* şi de *modul de calcul.* Pentru a se ajunge la noţiunea actuală, atât de simplă şi de fundamentală, de corespondenţă între două mulţimi de elemente, *a fost nevoie, tocmai, de a se face distincţie între funcţie şi valorile sale,* deci de a se considera corespondenţa ca fundamentală în locul celor două mulţimi de elemente puse în corespondenţă.

*Extensiunea noţiunilor fundamentale ale Analizei la mărimile fizice este de fapt fundamentarea Analizei pe proprietăţile mărimilor fizice şi geometrice variabile.*

Folosind reprezentarea geometrică şi proprietăţi ale mulţimilor de puncte dintr'un spaţiu, putem exprima matematic proprietăţile esenţiale ale mărimilor fizice, cum sunt corespondenţa între două mărimi dependente una de alta, limita unei mărimi corespunzătoare unei valori luate de o mărime variabilă de care depinde, continuitatea unei mărimi, etc.

Deaceea, considerăm că linia urmată, conform cu teoria geometrică a mărimilor fizice, este naturală. Raportarea mărimilor la sisteme de referinţă şi folosirea componentelor pentru fixarea bazelor Analizei vectoriale presupune că a fost stabilită în prealabil corespondenţa între funcţiile numerice şi funcţiile introduse de mărimile fizice variabile.

In consecinţă, *stabilirea definiţiilor fundamentale ale Analizei vectoriale direct, pe cale geometrică, pentru mărimile reprezentabile geometric, folosind în acest scop proprietăţile generale ale spaţiului, considerat ca mulţime de puncte cu o structură, este indispensabilă.*

Odată făcută pentru mărimile de bază, ea ne va permite să trecem dela mărimi la componente şi să caracterizăm prin măsură şi mărimi a căror reprezentare geometrică este mai greu de realizat, cum sunt de exemplu mărimile tensoriale.

## *§ 162. Derivate şi diferenţiale în spaţiul afin

Vom aplica consideraţiile precedente la definiţia derivatelor mărimilor, funcţii de punct în spaţiul afin.

Scanned with OKEN Scanner

Fie, de exemplu, funcţia vectorială $\bar{v}(t)$ de parametrul scalar $t$, care variază continuu în intervalul $(a, b)$. Să considerăm valoarea sa $\bar{v}(t_0)$ în punctul $t_0 \epsilon (a, b)$ şi raportul

$$\bar{\varphi}(\Delta t) = \frac{\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)}{\Delta t}, \qquad (87,V)$$

unde $\Delta t$ este suficient de mic pentru ca $t_0+\Delta t \epsilon (a, b)$.

Acest raport este un vector, funcţie de $\Delta t$, care poate avea o limită în punctul $\Delta t=0$, deci când $\Delta t$ tinde către zero.

Să notăm cu $\bar{v}'(t_0)$ această limită, în cazul când există; deoarece din formula (87,V) rezultă că ea va depinde de funcţia $\bar{v}(t)$, cât şi de punctul $t_0$.

Conform cu definiţia limitei unei funcţii vectoriale într'un punct dat, $\bar{v}'(t_0)$ va fi limita funcţiei $\bar{\varphi}(\Delta t)$ în punctul $\Delta t=0$ dacă, punând $\bar{v}'(t_0)=\overline{IP_0}$, pentru $\epsilon>0$ dat, există un $\eta>0$, astfel încât (fig. 144,*b*).

$$\bar{\varphi}(\Delta t)-\bar{v}'(t_0) \epsilon V_\epsilon P_0)$$

pentru orice $\Delta t$, care satisface condiţia

$$|\Delta t|<\eta.$$

Vom scrie atunci

$$\bar{v}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\varphi}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)}{\Delta t}.$$

Vom numi vectorul $\bar{v}'(t_0)$, limită a raportului $\frac{\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)}{\Delta t}$ în punctul $\Delta t=0$,

*derivata funcţiei vectoriale* $\bar{v}(t)$ *în punctul* $t_0$.

*Derivata* $\bar{v}'(t_0)$ *a funcţiei vectoriale* $\bar{v}(t)$, *sau mai pe scurt, a vectorului* $\bar{v}(t)$, *în punctul* $t_0$, *este deci limita funcţiei vectoriale* $\bar{\varphi}(\Delta t)$ *în punctul* $\Delta t=0$.

Astfel, *noţiunea de derivată este o consecinţă a noţiunii de limită a unei funcţii într'un punct dat din domeniul de definiţie.*

Odată stabilit caracterul derivatei, de limită a valorilor unei funcţii, într'un punct, vom putea pune definiţia sa sub forma următoare, în care nu mai intervine decât funcţia $\bar{v}(t)$.

*Vectorul* $\bar{v}'(t_0)=\overline{IP_0}$ *este derivata vectorului* $\bar{v}(t)$ *în punctul* $t_0$ *dacă,* $\epsilon>0$ *fiind dat, există un* $\eta>0$, *astfel ca*

$$\frac{\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)}{\Delta t}-\bar{v}'(t_0) \epsilon V_\epsilon(P_0) \qquad (88,V)$$

*pentru orice*

$$|\Delta t|<\eta, \qquad (89,V)$$

în care caz vom scrie pe scurt:

$$\bar{v}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)}{\Delta t} \qquad (90,V)$$

Un vector $\bar{v}(t)$, care admite o derivată în punctul $t_0$, se numeşte *derivabil în* $t_0$.

Scanned with OKEN Scanner

*Proprietatea unei funcții* $\bar{v}(t)$ *de a fi derivabilă într'un punct* $t_0$ *depinde de proprietatea funcției* $\bar{\varphi}(\Delta t)$, *definită în formula* (87,V), *de a avea o limită pentru* $\Delta t=0$. Cum această funcție depinde numai de valorile lui $\bar{v}(t)$ în $t_0$ și în punctele vecine $t_0+\Delta t$, rezultă că *existența derivatei* $\bar{v}'(t_0)$ *depinde de proprietățile funcției* $\bar{v}(t)$ *în vecinătatea punctului* $t_0$, *în intervalul oricât de mic*

$$t_0-\Delta t<t<t_0+\Delta t.$$

Astfel de proprietăți se numesc *locale*. O funcție poate admite o derivată într'un punct $t_0$, iar în alt punct din același interval să nu admită derivată.

O funcție derivabilă în fiecare punct din intervalul $(a, b)$ se numește funcție derivabilă în acel interval.

Din formula (88,V) rezultă că pentru ca $\bar{v}(t)$ să fie derivabilă în $t_0$ este necesar ca vectorul

$$\frac{\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)}{\Delta t}-\bar{v}'(t_0)=\bar{\epsilon},$$

unde

$$\bar{\epsilon}=\overline{P_0P}$$

să fie un vector conținut în paralelipipedul $V_\epsilon(P_0)$.

Prin urmare, vom avea

$$\bar{v}(t_0+\Delta t)-\bar{v}(t_0)=[\bar{v}'(t_0)+\bar{\epsilon}]\Delta t \qquad (91,V)$$

vectorul $\bar{\epsilon}$ putând fi inclus în $V_\epsilon(P_0)$.

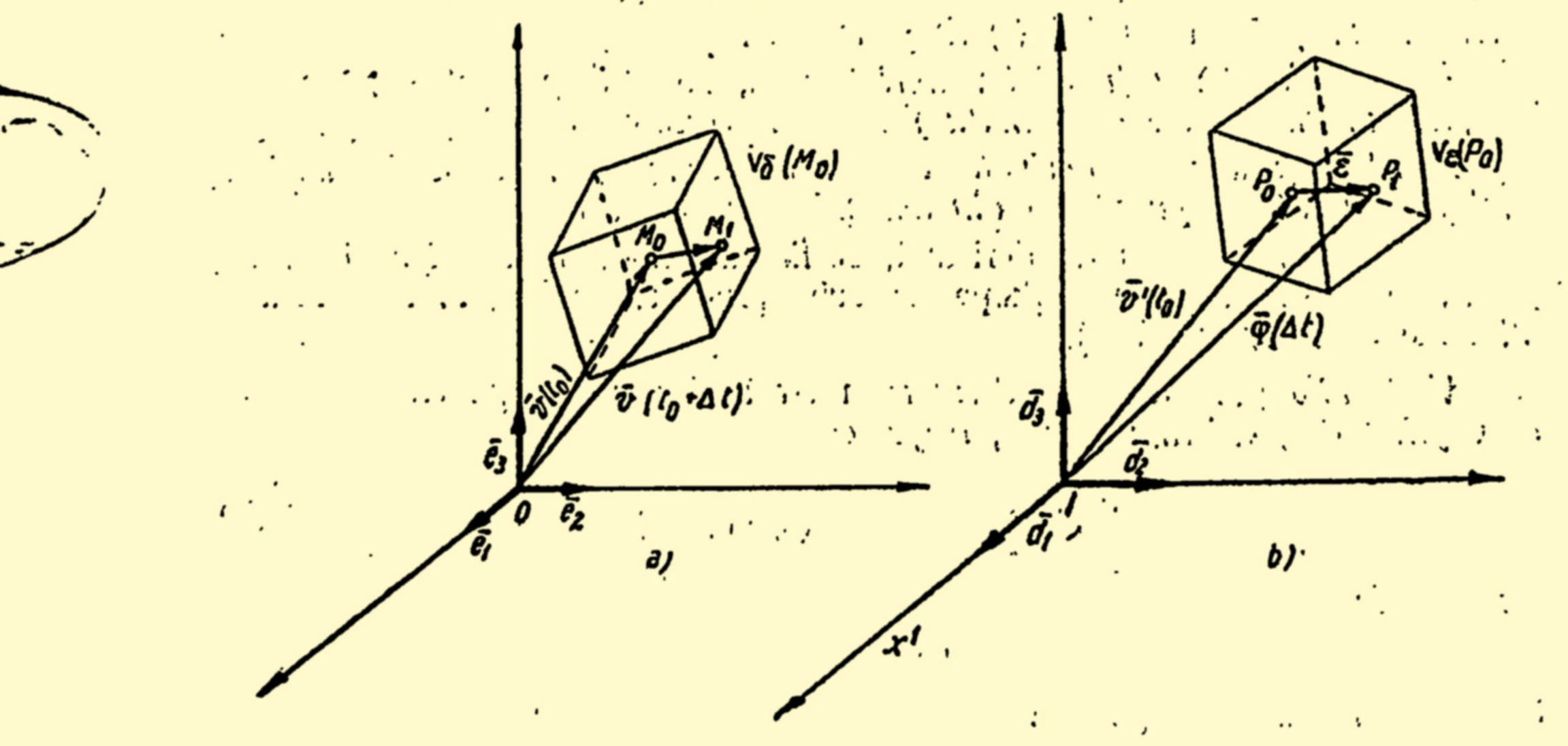



Fig. 144

Fie

$$\overline{OM_0}=\bar{v}(t_0) \text{ și } \overline{OM_1}=\bar{v}(t_0+\Delta t),$$

vectorii reprezentativi ai lui $\bar{v}(t_0)$ și $\bar{v}(t_0+\Delta t)$ (fig. 144, *a*).

Deoarece $\Delta t$ pentru un $\epsilon > 0$ dat este supus doar la condiția $|\Delta t| < \eta$, putem alege pe $\Delta t$ suficient de mic pentru ca vectorul

$$[\bar{v}'(t_0) + \bar{\epsilon}]\,\Delta t \in V_\delta(M_0),$$

deci pentru ca acest vector să poată fi deplasat în $O$ și inclus într'un paralelipiped $V_\delta(M_0)$, cu centrul în $M_0$, arbitrar dat (fig. 144, *a*).

Din formula (91,V) rezultă deci că

$$\bar{v}(t_0+\Delta t) - \bar{v}(t_0) \in V_\delta(M_0), \qquad (92,V)$$

dacă $|\Delta t| < \eta$ este suficient de mic, ceeace putem realiza luând pentru $\eta$ o valoare convenabilă. Avem astfel următoarea teoremă:

*Orice funcție vectorială $\bar{v}(t)$, derivabilă într'un punct $t_0 \in (a, b)$, este continuă în punctul $t_0$.*

In adevăr, din relația (92, V) rezultă că $\delta > 0$ fiind dat, putem determina un $\eta > 0$, astfel încât, dacă funcția $\bar{v}(t)$ este derivabilă în $t_0$, vectorul

$$\bar{v}(t_0+\Delta t) - \bar{v}(t_0) \in V_\delta(M_0)$$

pentru $|\Delta t| < \eta$, unde $V_\delta(M_0)$ este dat arbitrar, ceeace înseamnă că funcția $\bar{v}(t)$ este continuă în $t_0$.

*Continuitatea este deci o condiție necesară pentru derivabilitatea unei funcții într'un punct dat.*

După cum se știe, această condiție nu este însă și suficientă în cazul funcțiilor scalare și deci, și în cazul funcțiilor vectoriale, după cum se vede imediat folosind componentele.

*Definiția derivatei ca limită a unei funcții, în speță a raportului $\bar{\varphi}(\Delta t)$, considerat ca funcție de $\Delta t$, nu folosește continuitatea funcției $\bar{v}(t)$ în punctul $t_0$.*

Aceasta apare ca o proprietate necesară a funcțiilor derivabile în punctul în care se calculează derivata, deci ca o proprietate locală. In general, se consideră proprietatea de continuitate a funcțiilor derivabile, extinsă la un interval ce cuprinde punctul $t_0$, ca o proprietate necesară. In realitate, *continuitatea într'un interval nu este o proprietate necesară pentru derivabilitatea funcțiilor*, cum a arătat *Lebesgue* pentru clasa funcțiilor monotone [1]).

Folosirea noțiunilor fundamentale de funcție și limită a unei funcții într'un punct ne permite să considerăm atât derivabilitatea, cât și continuitatea, sub aspectul lor real, deci ca proprietăți locale ale funcțiilor.

Dela noțiunea de derivată într'un punct putem trece la cea de diferențială.

---

[1]) *F. Riesz* et *Béla Sz. Nagy* Leçons d'Analyse fonctionnelle (Editura Academiei de Științe din Ungaria, 1952) p. 5.

Teorema fundamentală a lui Lebesgue are enunțul următor: *Orice funcție monotonă $f(x)$ admite o derivată finită și determinată în orice punct $x$, înafară poate de punctele unei mulțimi de măsură nulă.*

O mulțime de măsură nulă are proprietatea de a putea fi închisă într'un număr finit sau într'o infinitate numărabilă de intervale, de lungime totală arbitrar de mică.

Scanned with OKEN Scanner

Expresia creşterii funcţiei $\bar{v}(t_0)$ pentru o creştere $\Delta t$ a variabilei, notată

$$\Delta[\bar{v}(t_0), \Delta t] = \bar{v}(t_0 + \Delta t) - \bar{v}(t_0) = \Delta \bar{v}(t_0) \qquad (93, V)$$

este o funcţie de $\Delta t$, definită pentru

$$-\eta < \Delta t < \eta.$$

Pentru $\Delta t = 0$, avem $\Delta[\bar{v}(t_0), 0] = 0$. In acelaşi timp, dacă funcţia $\bar{v}(t)$ este derivabilă în $t_0$, din relaţia (92, V) rezultă că

$$\Delta[(\bar{v}(t_0), \Delta t] = \Delta \bar{v}(t_0) \in V_\delta(M_0)$$

pentru $|\Delta t| < \eta$. Scriind această relaţie sub forma:

$$\Delta[\bar{v}(t_0), \Delta t] - \Delta[\bar{v}\, t_0), 0] \in V_\delta(M),$$

deducem că *funcţia* $\Delta[\bar{v}(t_0), \Delta t]$ *este continuă în punctul* $\Delta t = 0$, *dacă funcţia* $\bar{v}(t)$ *este derivabilă în* $t_0$.

Din relaţia (91, V) deducem, explicitând termenii:

$$\Delta[\bar{v}(t_0, \Delta t)] = \bar{v}'(t_0)\Delta t + \bar{\epsilon}(t_0, \Delta t)\Delta t. \qquad (94, V)$$

Membrul întâi este o funcţie continuă de $\Delta t$, iar termenul $\bar{v}'(t_0)\Delta t$, ca funcţie de $\Delta t$, este deasemenea continuu în punctul $\Delta t = 0$. Urmează că şi termenul $\bar{\epsilon}(t_0, \Delta t)\Delta t$ este continuu pentru $\Delta t = 0$. Cum pe de altă parte

$$\frac{\Delta \bar{v}(t_0)}{\Delta t} - \bar{v}'(t_0) = \bar{\epsilon} \in V_\epsilon(P_0) \qquad (95, V)$$

pentru orice $|\Delta t| < \eta$ dacă în formula (94, V) neglijăm termenul $\bar{\epsilon}(t_0, \Delta t)\Delta t$ din membrul al doilea, asimilând funcţia $\Delta[\bar{v}(t_0)\Delta t]$ de variabila $\Delta t$, cu funcţia liniară $\bar{v}(t_0)\Delta t$ de variabila $\Delta t$, eroarea făcută este un vector $\bar{\epsilon}(t_0, \Delta t)\Delta t$, care nu modifică în formula (95, V) expresia derivatei lui $\bar{v}(t)$ în $t_0$, iar pentru $|\Delta t| < \eta$, această eroare este limitată de o vecinătate $V_\epsilon(P_0)$ arbitrar dată.

Vom considera atunci aproximaţia liniară $\bar{v}'(t_0)\Delta t$ a funcţiei $\Delta[\bar{v}\, t_0), \Delta t]$ ca *parte principală* a creşterii funcţiei $\bar{v}(t_0)$ şi o vom numi *diferenţiala funcţiei derivabile* $\bar{v}(t)$ *în punctul* $t_0$.

Vom scrie

$$d\bar{v}(t_0) = \bar{v}'(t_0)\, dt \qquad (96, V)$$

punând

$$dt = \Delta t.$$

Cu aceste notaţii, derivata $\bar{v}'(t_0)$ se prezintă sub forma

$$\bar{v}'(t_0) = \frac{d\bar{v}(t_0)}{dt}; \qquad (97, V)$$

iar formula (94, V) devine

$$\Delta \bar{v}(t_0) = d\bar{v}(t_0) + \bar{\epsilon} dt. \qquad (98, V)$$

Pentru a putea exprima creşterea $\Delta \bar{v}(t_0)$ prin diferenţiala $d\bar{v}(t_0)$, este necesar ca $\bar{v}'(t_0) \neq 0$. In cazul când $\bar{v}'(t_0) = 0$, această aproximaţie nu mai este posibilă şi va fi necesar să punem

$$\Delta \bar{v}(t_0) = \bar{\epsilon} \Delta t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă funcția $\bar{v}'(t)$, obținută prin derivarea lui $\bar{v}(t)$ în vecinătatea lui $t_0$, este derivabilă în $t_0$, vom putea extinde noțiunea de derivată la derivatele de ordinul al doilea și vom putea defini diferențiala de ordinul al doilea, explicitând termenul $\bar{\epsilon}(t_0, \Delta t)$. Prin aceasta vom putea aproxima pe $\Delta[\bar{v}(t_0, \Delta t)]$ prin diferențiala a doua în cazul când $\bar{v}'(t_0)=0$. Vom putea deasemenea defini și direct derivata a doua a lui $\bar{v}(t)$ în punctul $t_0$.

Raportând vectorul $\bar{v}(t)$ la un triedru fundamental și punând

$$\bar{v}(t)=v^1(t)\,\bar{e}_1+v^2(t)\,\bar{e}_2+v^3(t)\,\bar{e}_3,$$

$$\bar{v}'(t_0)=v'^1\,\bar{e}_1+v'^2\,\bar{e}_2+v'^3\,\bar{e}_3,$$

definiția derivatei în punctul $t_0$ devine:

*Vectorul $\bar{v}'(t_0)$ este derivata vectorului $\bar{v}(t)$ în punctul $t_0$ dacă $\epsilon>0$ fiind dat, există un $\eta>0$, astfel ca*

$$\left|\frac{v^k(t_0+\Delta t)-v^k(t_0)}{\Delta t}-v'^k(t_0)\right|<\epsilon$$

*pentru orice*

$$|\Delta t|<\eta \quad (k=1,2,3).$$

*Deci un vector $\bar{v}(t)$ este derivabil în punctul $t_0$, când componentele $v^1$, $v^2$, $v^3$ sunt derivabile în acest punct.*

Propoziția reciprocă este deasemenea ușor de stabilit, ceeace conduce la următorul rezultat:

*Condiția necesară și suficientă ca un vector $\bar{v}(t)$ să fie derivabil în punctul $t_0 \in (a, b)$ este ca, într'un sistem de referință cartezian, componentele acestui vector să fie funcții derivabile în punctul $t_0$.*

## *) § 163. Derivarea mărimilor tensoriale în spațiul afin

Extensiunea noțiunii de derivată la funcțiile vectoriale și scalare de un punct în spațiul afin este ușor de făcut pe baza considerațiilor precedente.

Vom putea deasemenea stabili proprietățile generale ale limitelor pentru mărimile obținute prin operațiile algebrei vectoriale: adunarea, amplificarea prin scalari, produsul scalar, produsul vectorial, deci pentru bivectori și trivectori, duble produse vectoriale, etc.

Prin dualitate vom extinde aceleași noțiuni și la mărimile covariante, folosind reprezentarea vectorilor prin vectori de poziție.

Corespondența biunivocă între mărimi și măsurile lor în raport cu un sistem de referință oarecare, deci în raport cu un mod oarecare de măsură, cu ajutorul unui sistem de unități, ne permite ca, pentru mărimile mai complexe, să extindem noțiunile fundamentale ale Analizei cu ajutorul componentelor lor. Prin aceasta, însă, *efectuăm în același timp extinderea analizei scalare la analiza tensorială în spațiul afin cu trei dimensiuni.*

Fie, de exemplu, un vector covariant $\bar{v}_*(t)$, definit prin componentele sale $v_i(t)$, în intervalul $a<t<b$. Prin aplicarea criteriului măsurii, componentele $v_i(t)$

vor defini un vector covariant dacă şi numai dacă prin trecerea dela baza $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ la baza $\bar{e}'^1$, $\bar{e}'^2$, $\bar{e}'^3$, vom avea relaţiile

$$v'_i(t) = a^j_i v_j(t),$$

în orice punct $t \in (a, b)$, conform cu § 107.

Fie $p_1, p_2, p_3$ limitele componentelor $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ într'un punct $t_0 \in (a, b)$. Vom dovedi următoarea toeremă:

*Limitele componentelor unui vector covariant $\bar{v}_1(t), v_2(t), v_3(t)$, într'un punct $t_0$, sunt componentele unui vector covariant.*

In adevăr, vom avea în baza $\bar{e}^i$:

$$|v^j(t) - p_j| < \epsilon$$

pentru $|t - t_0| < \eta(\epsilon)$, conform cu definiţia limitei vectoriale, unde $\epsilon > 0$ este dat arbitrar. Prin urmare, vom putea scrie

$$v_j(t) = p_j + \epsilon_j,$$

unde $|\epsilon_j| < \epsilon$. Trecând în baza $\bar{e}'^i$, vom avea relaţiile

$$v'_i(t) = a^j_i v_j(t) = a^j_i (p_j + \epsilon_j) = a^j_i p_j + a^j_i \epsilon_j,$$

notând cu accent componentele în noua bază. Deducem:

$$v'_i(t) - a^j_i p_j = a^j_i \epsilon_j.$$

Fie $m$ un număr pozitiv, mai mare decât oricare din numerele $|a^j_i|$, deci

$$m > |a^j_i|.$$

Vom putea scrie

$$|v'_i(t) - a^j_i p_j| < |a^j_i| |\epsilon_j| < 3\epsilon m,$$

inegalitate care exprimă faptul că

$$\lim v'_i(t) = a^j_i p_j,$$

deci: în primul rând, componentele $v'(t)$ admit o limită în baza $\bar{e}'^i$ şi apoi dacă notăm prin $p'_1$, $p'_2$, $p'_3$ limitele noilor componente, vom avea:

$$p'_i = a^j_i p_j.$$

Prin urmare, limitele componentelor $v_j(t)$ sunt componentele unui vector covariant $p_1$, $p_2$, $p_3$, deoarece într'o nouă bază se exprimă prin formulele de transformare ale vectorilor covarianţi.

Această proprietate este generală şi se aplică tuturor mărimilor tensoriale, funcţii de un punct, înţelegând prin punct un sistem de parametri, care pot fi figuraţi sub forma coordonatelor unui punct reprezentativ. De exemplu, un bivector contravariant de componente

$$p^{ij} = u^i v^j - u^j v^i,$$

care sunt funcţii de doi parametri $\alpha$ şi $\beta$, deci $p^{ij}(\alpha, \beta)$ este o funcţie de un punct $M(\alpha, \beta)$ dintr'un spaţiu aritmetic reprezentativ cu două dimensiuni. Vom avea teorema următoare:

Scanned with OKEN Scanner

*Limitele componentelor tensorului antisimetric* $p^{ij}(\alpha, \beta)$, *în punctul* $M_0(\alpha_0, \beta_0)$, *sunt componentele unui tensor antisimetric*

$$q^{ij} = a^i b^j - a^j b^i;$$

*unde* $a^i$ *şi* $b^i$ *sunt limitele vectorilor contravarianţi* $u^i(\alpha, \beta)$ *şi* $v^i(\alpha, \beta)$ *în punctul* $M_0(\alpha_0, \beta_0)$.

Demonstraţia se poate face aplicând proprietăţile generale ale limitelor sau direct, ca în cazul precedent al vectorului covariant.

Deoarece limita unei sume (sau a unui produs) finite este suma (respectiv produsul) limitelor termenilor (respectiv factorilor), vom avea:

$$\lim_{M \to M_0} [u^i(\alpha, \beta) v^j(\alpha, \beta) - u^j(\alpha, \beta) v^i(\alpha, \beta)] =$$
$$= \lim_{M \to M_0} u^i(\alpha, \beta) \lim_{M \to M_0} v^j(\alpha, \beta) - \lim_{M \to M_0} u^j(\alpha, \beta) \lim_{M \to M_0} v^i(\alpha, \beta) = a^i b^j - b^i a^j,$$

dacă ţinem seama că

$$\lim_{M \to M_0} u^i(M) = a^i \quad \text{şi} \quad \lim_{M \to M_0} v^i(M) = b^i.$$

Demonstraţia directă, folosind formulele de transformare ale componentelor bivectorilor contravarianţi, este aplicabilă şi în cazul unui tensor oarecare, de exemplu al unui tensor simetric, care nu este obţinut prin produse de vectori (Exerciţiu).

O aplicaţie importantă a acestor teoreme generale asupra limitelor mărimilor tensoriale este relativă la derivatele mărimilor tensoriale. Putem stabili următoarea teoremă:

*Derivata unei mărimi tensoriale din spaţiul afin, funcţie de un parametru* $t$, *într'un punct* $t_0$, *este o mărime tensorială de aceeaşi specie.*

In adevăr, definind derivata într'un punct ca limita unei funcţii $\varphi(t_0, \Delta t)$ de creşterea $\Delta t$ dată variabilei $t$ în domeniul punctului $t_0$, funcţia $\varphi(t_0, \Delta t)$ fiind raportul de definiţie al derivatei, vom aplica teorema precedentă.

Limita funcţiei $\varphi(t_0, \Delta t)$ pentru $\Delta t \to 0$ va fi o mărime de aceeaşi specie cu $\varphi(t_0, \Delta t)$, deci cu mărimea tensorială considerată.

Să considerăm, de exemplu, cazul unui vector contravariant $v^i(t)$, derivabil în punctul $t_0$. Derivata va fi definită ca limita raportului:

$$\varphi^i(t_0, \Delta t) = \frac{v^i(t_0 + \Delta t) - v^i(t_0)}{\Delta t}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Funcţiile $\varphi^i(t_0, \Delta t)$ sunt componentele unui vector contravariant, funcţie de $\Delta t$, în domeniul originii $\Delta t = 0$.

Limitele componentelor unui vector contravariant, conform cu teorema precedentă, sunt componentele unui vector contravariant. Dar avem:

$$\lim \varphi^i(t_0, \Delta t) = \lim \frac{v^i(t_0 + \Delta t) - v^i_0(t_0)}{\Delta t} = [v^i(t_0)]' = \left(\frac{dv^i}{dt}\right)_{t_0},$$

deci $(v^1)'$, $(v^2)'$, $(v^3)'$, componentele derivatei, formează un vector contravariant.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate ajunge la acelaşi rezultat aplicând formulele de transformare ale vectorilor contravarianţi. In adevăr, avem

$$v'^{i}(t) = A^{i}_{j} v^{j}(t), \qquad (99, V)$$

iar prin derivare:

$$\left(\frac{dv'^{i}}{dt}\right)_{t_0} = A^{i}_{j}\left(\frac{dv^{j}}{dt}\right)_{t_0}. \qquad (100, V)$$

Astfel, sistemul de componente $\left(\frac{dv^1}{dt}\right)_{t_0}$, $\left(\frac{dv^2}{dt}\right)_{t_0}$, $\left(\frac{dv^3}{dt}\right)_{t_0}$ transformându-se ca un vector contravariant, constitue un vector contravariant în spaţiul afin.

Teorema asupra derivatelor mărimilor tensoriale se aplică şi în cazul când aceste mărimi sunt funcţii de mai multe variabile, figurate printr'un punct dintr'un spaţiu reprezentativ.

*Derivatele parţiale şi diferenţialele unei mărimi tensoriale, funcţie de un punct reprezentativ, sunt mărimi de aceeaşi specie cu mărimea considerată în spaţiul afin.*

Astfel, dacă un trivector

$$\tau(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}$$

este funcţie derivabilă de variabilele $\alpha, \beta$, deci de punctul reprezentativ $M(\alpha, \beta)$ derivatele sale parţiale $\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \tau}{\partial \beta}$ şi diferenţiala sa

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \tau}{\partial \beta} d\beta$$

vor fi deasemenea trivectori, exprimaţi prin sume de trivectori, formaţi prin derivarea coloanelor lui $\tau(\alpha, \beta)$.

Trebue să facem următoarele observaţii asupra derivatelor mărimilor tensoriale, funcţii de una sau mai multe variabile.

*In tot ce precedă, vectorii (şi în general mărimile) au fost consideraţi ca liberi, deci, pentru a putea fi comparaţi, au fost transportaţi prin echipolenţă într'un punct convenabil.*

Chiar în cazul mărimilor legate, operaţia de transport prin paralelism poate fi efectuată, considerând că aceste mărimi au ca reprezentant în fiecare punct al spaţiului o mărime *cu aceleaşi componente.*

Pentru a putea decide asupra egalităţii sau inegalităţii componentelor unor mărimi, măsurate în două puncte deosebite, trebue, sau ca sistemul de referinţă să fie acelaşi pentru toate punctele spaţiului, sau ca cele două sisteme diferite, folosite în cele două puncte ale spaţiului, să fie ele însăşi comparabile.

In tot ce precedă, *componentele mărimilor au fost presupuse calculate într'un sistem de referinţă cartezian, acelaşi pentru întreg spaţiul.*

Aceasta revine la a folosi în fiecare punct din spaţiu un sistem având axele paralele cu cel dat, deci dedus din acesta prin transport paralel. Operaţia

Scanned with OKEN Scanner

este posibilă prin însăşi structura spaţiului afin, deoarece în orice punct al spaţiului există un vector egal cu un vector dat.

*Criteriul de recunoaştere al naturii mărimilor tensoriale prin schimbarea sistemului de referinţă, aplicat de noi, este valabil pentru trecerea dela un sistem de referinţă cartezian la altul tot cartezian, ambele valabile în tot spaţiul.*

Este necesar să observăm că *teoremele asupra derivatelor parţiale ale mărimilor tensoriale presupun atât folosirea acestor sisteme, cât şi faptul că variabilele de care depind sunt coordonatele unui punct dintr'un spaţiu reprezentativ, nu din spaţiul afin, unde sunt definite aceste mărimi.*

In adevăr, pentru mărimile funcţii de o variabilă este clar că parametrul $t$ se poate interpreta ca un punct dintr'un spaţiu cu o dimensiune, reprezentativ. Deoarece sistemul de referinţă cartezian a fost schimbat cu altul tot cartezian, coeficienţii de transformare $A^i_j$ din formula (99, V) sunt constanţi, aceiaşi în tot spaţiul şi deci, prin derivare, obţinem formula (100, V), care arată că $\frac{dv^i}{dt}$ este un vector contravariant.

Să presupunem, însă, că vectorul contravariant $\overline{v}(M)$ este funcţie de un punct $M$ din spaţiu, astfel încât, într'un sistem cartezian, componentele vor fi $v^i(x^1, x^2, x^3)$.

Aplicând formulele de trecere la alt sistem cartezian vom avea

$$\overline{v}'^i(x'^1, x'^2, x'^3) = A^i_j v^j(x^1, x^2, x^3). \qquad (101, V)$$

Pentru a ne da seama de natura mărimii $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$, unde $i, j = 1, 2, 3$, vom aplica criteriul măsurii, stabilind relaţiile dintre componentele $\frac{\partial v'^i}{\partial x'^j}$ şi $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$.

Derivând în raport cu $x'^k$ ambii membri ai identităţii (101,V), vom avea

$$\frac{\partial v'^i}{\partial x'^k} = A^i_j \frac{\partial v^j}{\partial x'^k} = A^i_j \frac{\partial v^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} = A^i_j a^l_k \frac{\partial v^j}{\partial x^l}, \qquad (102, V)$$

deoarece din formulele de transformare inverse ale coordonatelor

$$x^l = x^l_0 + a^l_k x'^k,$$

deducem

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} = a^l_k.$$

Formula (102,V) arată că cele nouă componente $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$, obţinute dând indicilor $i$ şi $j$ valorile 1, 2, 3, constituie un *tensor mixt* de ordinul al doilea. Dacă încercăm să luăm în consideraţie numai trei din aceste componente $\frac{\partial v^1}{\partial x^j}, \frac{\partial v^2}{\partial x^j}, \frac{\partial v^3}{\partial x^j}$, legea de transformare (102, V) ne arată că ele nu formează singure o mărime, ci numai împreună cu celelalte. Prin urmare:

*Derivatele parţiale ale componentelor unui vector contravariant, funcţie de punct într'un domeniu din spaţiul afin, măsurate în sisteme carteziene, constitue un tensor mixt de ordinul al doilea.*

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, teorema asupra derivatelor parţiale ale mărimilor tensoriale, ce depind de mai multe variabile, nu se mai aplică în cazul când aceste variabile sunt coordonatele unui punct *al spaţiului afin.* In acest caz, şi *numai dacă sistemele de coordonate folosite sunt carteziene, prin derivare parţială obţinem o mărime tensorială de un ordin mai înalt cu o unitate,* indicele obţinut în plus fiind covariant.

Astfel, dintr'un vector contravariant, obţinem un tensor de ordinul al doilea mixt, deci cu un indice covariant. Dintr'un vector covariant obţinem un tensor dublu covariant, deci cu un indice covariant în plus.

*Aceste rezultate nu mai sunt variabile, dacă folosim sisteme de coordonate curbilinii în spaţiul afin.* In acest caz, mărimile tensoriale sunt toate legate de punctele spaţiului şi vecinătatea fiecărui punct este raportată la un sistem de coordonate local. Pentru a putea compara componentele unei mărimi în două puncte diferite, este necesar să transportăm una din aceste mărimi în punctul în care e aplicată cealaltă şi să măsurăm componentele în sistemul de referinţă local.

Se vede atunci că variaţia suferită de componente este alta decât diferenţa dintre ele, fiindcă această diferenţă se evaluează între mărimi măsurate cu unităţi diferite.

*Derivatele parţiale ale mărimilor tensoriale, funcţii de un punct din spaţiu, în raport cu coordonatele acestui punct, calculate în coordonate curbilinii, nu au caracter invariant şi nu reprezintă mărimi.*

In analiza tensorială aceste derivate parţiale sunt înlocuite prin alţi operatori diferenţiali invarianţi, numiţi *derivate covariante,* iar diferenţiala — prin *diferenţiala absolută.*

## *§ 164. Aplicaţii. Operatori diferenţiali în spaţiul afin

Derivarea mărimilor tensoriale conduce la formarea de noi mărimi tensoriale. După cum am observat în paragraful precedent, operaţia de derivare are un caracter invariant, numai când este aplicată componentelor faţă de sistemele carteziene de referinţă, dacă mărimile considerate constitue câmpuri definite într'un domeniu din spaţiu. Totuşi, anumite combinaţii de derivate parţiale reprezintă mărimi tensoriale, chiar şi în sisteme de coordonate curbilinii. Unele dintre aceste mărimi sunt fundamentale în fizica matematică, iar operaţiile diferenţiale efectuate pentru obţinerea lor se numesc *operatori diferenţiali fundamentali.*

**Gradientul.** Fiind dat un câmp scalar $U(M)$, definit într'un domeniu $D$ din spaţiul afin şi presupus derivabil, cu derivate parţiale continue în $D$, vom putea compara valorile lui $U$ în două puncte oarecare $M$ şi $M'$, independent de sistemul de referinţă utilizat, deoarece, prin definiţie, orice scalar este independent de sistemul de referinţă.

Folosind un sistem cartezian oarecare şi considerând punctul $M'(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$, vecin cu $M(x^1, x^2, x^3)$, variaţia

$$\Delta U = U(M') - U(M)$$

va avea ca parte principală diferenţiala

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial U}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial U}{\partial x^3} dx^3 = \frac{\partial U}{\partial x^i} dx^i \qquad (103,V)$$

a câmpului scalar pentru deplasarea $dx^1, dx^2, dx^3$.

Scanned with OKEN Scanner

Această diferențială este deasemenea un scalar. Pe de altă parte, $dx^1, dx^2, dx^3$ *sunt componentele unui vector elementar contravariant.*

In adevăr, dacă trecem la un alt sistem cartezian prin formule de forma

$$x'^i = A^i_j x^j + b^i, \tag{104, V}$$

prin diferențiere vom avea

$$dx'^i = A^i_j dx^j, \tag{105, V}$$

ceeace arată că $dx^i$ sunt componentele unui vector contravariant.

Aplicând criteriul măsurii expresiei (103,V) a diferențialei și ținând seama că $dU$ este un scalar, pentru *orice* deplasare $dx^i$, deducem că

$$\frac{\partial U}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x^3}$$

sunt componentele unui vector covariant.

Putem demonstra această proprietate și direct, efectuând trecerea la un alt sistem cartezian și scriind

$$dU(x^1, x^2, x^3) = dU'(x'^1, x'^2, x'^3),$$

deoarece $dU$ este un scalar. ($U'$ este noua funcție, obținută prin transformarea afină (104,V) asupra variabilelor $x^1, x^2, x^3$). Vom avea deci

$$\frac{\partial U}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial U'}{\partial x'^i} dx'^i = \frac{\partial U'}{\partial x'^i} A^i_j dx^j$$

dacă ținem seama de (105, V). Deducem imediat

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x^j} - \frac{\partial U'}{\partial x'^i} A^i_j \right) dx^j = 0, \tag{106, V}$$

punând $U' = U$, deoarece $U$ nu-și schimbă decât forma, nu și valoarea, prin transformarea de coordonate, fiind o mărime scalară.

Cum relația (106, V) trebue să aibă loc *pentru orice deplasare* $dx^1, dx^2, dx^3$, coeficienții formei liniare din primul membru sunt nuli și deci vom avea:

$$\frac{\partial U}{\partial x^j} = A^i_j \frac{\partial U'}{\partial x'^i}; \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{107, V}$$

Prin urmare, *derivatele parțiale ale unui câmp scalar într'un punct M se transformă după regula componentelor vectorilor covarianți.* Criteriul măsurii ne conduce deci la concluzia că ele formează un vector covariant.

Vom numi *gradient al câmpului scalar* $U(M)$ în punctul $M$ vectorul covariant ale cărui componente sunt derivatele parțiale ale câmpului în punctul $M$.

Dacă folosim un sistem fundamental $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și sistemul reciproc $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, vom putea scrie vectorial:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x^1} \bar{e}^1 + \frac{\partial U}{\partial x^2} \bar{e}^2 + \frac{\partial U}{\partial x^3} \bar{e}^3 = \frac{\partial U}{\partial x^i} \bar{e}^i. \tag{108, V}$$

Gradientul câmpului $U$ pune în evidență operatorul diferențial

$$\text{grad} = \bar{e}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \bar{e}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \bar{e}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} = \bar{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{109, V}$$

Scanned with OKEN Scanner

numit *gradient*, care este aplicabil oricărui câmp scalar cu derivate parțiale continue într'un punct $M$.

*Operatorul grad asociază oricărui câmp scalar un câmp vectorial covariant.*

El este o combinație liniară vectorială simbolică, ai cărei coeficienți sunt derivatele parțiale în raport cu cele trei coordonate.

**Rotorul.** Un alt operator fundamental se obține pornind dela un câmp vectorial covariant, definit prin componentele sale $u_i\,(x^1, x^2, x^3)$ într'un sistem de referință cartezian. Transformarea vectorului $u_i$ în urma schimbării acestui sistem este definită prin relațiile

$$u_i\,(x^1, x^2, x^3) = A_i^j\, u'_j\,(x'^1, x'^2, x'^3),$$

unde $u'_j$ sunt noile componente.

Derivând parțial în ambii membri în raport cu $x^k$ și ținând seama că în membrul al doilea această variabilă nu intervine direct, ci prin intermediul lui $x'^1, x'^2, x'^3$, conform cu formulele de transformare (104, V), vom scrie:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = A_i^j \frac{\partial u'_j}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} = A_i^j\, A_k^l \frac{\partial u'_j}{\partial x'^l}. \qquad (110, V)$$

Permutând indicii $i$ și $k$, vom avea:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x^l} = A_k^j\, A_l^l \frac{\partial u'_j}{\partial x'^l}.$$

Permutând și indicii muți $j$ și $l$ între ei, formula devine:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x^l} = A_k^l\, A_l^j \frac{\partial u'_l}{\partial x'^j}. \qquad (111, V)$$

Scăzând membru cu membru relațiile (110, V) și (111, V), obținem

$$\frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^l} = A_l^j A_k^l \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x'^l} - \frac{\partial u'_l}{\partial x'^j} \right). \qquad (112, V)$$

Dacă notăm prin $r_{kl}$ expresia:

$$r_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^l}, \qquad (113, V)$$

regula de transformare (112, V) devine

$$r_{kl} = A_k^l\, A_l^j\, r'_{lj}; \qquad (k, i = 1, 2, 3) \qquad (114, V)$$

și pune în evidență faptul că $r_{kl}$ este un tensor dublu covariant. Pe de altă parte, din expresia (113, V) se vede că

$$r_{kl} = -r_{lk},$$

deci tensorul $r_{kl}$ este *antisimetric*.

Scanned with OKEN Scanner

*Vom numi rotor al câmpului vectorial covariant $u_i$, în punctul $M(x^1, x^2, x^3)$, tensorul antisimetric dublu covariant de componente*

$$r_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^j} = R^k; \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \qquad (115, V)$$

*Acest tensor este echivalent, în spațiul cu trei dimensiuni cu o densitate vectorială contravariantă de componente $R^k$ $(k = 1, 2, 3)$*, cu condiția de a considera indicii $i, j, k$ în ordinea 1, 2, 3 sau în ordinea 2, 3, 1, ori 3, 1, 2, deci ca o permutare circulară a indicilor 1, 2, 3.

Vom demonstra următoarea propoziție.

*Rotorul $R^1, R^2, R^3$, definit prin formulele* (115, V), *este o densitate contravariantă.*

In adevăr, dacă explicităm formulele de transformare (114, V) vom avea

$$r_{ij} = A_i^\alpha \cdot A_j^\beta \cdot r'_{\alpha\beta} = (A_i^1 A_j^2 - A_i^2 A_j^1) r'_{12} +$$
$$+ (A_i^2 \cdot A_j^3 - A_i^3 \cdot A_j^2) r'_{23} + (A_i^3 \cdot A_j^1 - A_i^1 A_j^3) r'_{31} \cdot \qquad (116, V)$$

Parantezele reprezintă minorii elementelor $A_r^s$ în determinantul $E = |A_s^r|$, format cu minorii normalizați ai elementelor $a_s^r$ ai determinantului $E^{-1} = |a_r^s|$. Vom avea deci

$$\frac{A_i^1 A_j^2 - A_i^2 A_j^1}{E} = a_3^k,$$

deoarece [minorul normalizat al lui $A_i^1 A_j^2 - A_i^2 A_j^1$ trebue să fie elementul din $E^{-1}$, corespunzător indicilor 1, 2, și $i, j$. Astfel, vom putea scrie

$$A_i^1 A_j^2 - A_i^2 A_j^1 = E a_3^k,$$

iar formula (116, V) devine

$$R^k = E(a_3^k R'^3 + a_1^k R'^1 + a_2^k R'^2) = E a_\alpha^k R'^\alpha.$$

Inversând transformarea, vom obține noile componente în funcție de cele vechi prin formulele

$$R'^\alpha = E^{-1} A_k^\alpha R^k, \qquad (117, V)$$

prin care se pune în evidență caracterul de densitate vectorială contravariantă al rotorului $R^1, R^2, R^3$.

**Divergența.** Al treilea operator fundamental se obține pornind dela o densitate vectorială contravariantă, de componente $D^1, D^2, D^3$, funcții derivabile continuu într'un domeniu $\Delta$ din spațiul afin cu trei dimensiuni.

*Vom numi divergență a câmpului de densități vectoriale $D^i$ expresia*

$$D = \frac{\partial D^1}{\partial x^1} + \frac{\partial D^2}{\partial x^2} + \frac{\partial D^3}{\partial x^3} = \frac{\partial D^i}{\partial x^i} \cdot \qquad (118, V)$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom stabili următoarea proprietate:

*Divergenţa unui câmp de densităţi vectoriale contravariante $D^i$ este o densitate scalară.*

In acest scop vom aplica criteriul măsurii, formând expresia

$$D' = \frac{\partial D'^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha}}$$

în noul sistem de coordonate, obţinut printr'o transformare afină a sistemului cartezian $x^1, x^2, x^3$.

Regula de transformare a densităţilor vectoriale contravariante este (117,V). Vom avea deci

$$D' = \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} (E^{-1} A^{\alpha}_k D^k) = E^{-1} A^{\alpha}_k \frac{\partial D^k}{\partial x'^{\alpha}}. \qquad (119, V)$$

Dar $D^k$ nu depinde direct de $x'^1, x'^2, x'^3$, ci prin intermediul variabilelor $x^1, x^2, x^3$, fiindcă $D^k = D^k(x^1, x^2, x^3)$

Cum însă formulele de transformare a coordonatelor sunt

$$x'^{\alpha} = A^{\alpha}_j x^j + b^{\alpha}; \quad x^j = \alpha^j_{\alpha}(x'^{\alpha} - b^{\alpha}),$$

vom putea scrie

$$\frac{\partial D^k}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial D^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\alpha}} = a^j_{\alpha} \frac{\partial D^k}{\partial x^j}.$$

Inlocuind în (119,V), obţinem

$$D' = E^{-1} A^{\alpha}_k a^j_{\alpha} \frac{\partial D^k}{\partial x^j} = E^{-1} (A^{\alpha}_k a^j_{\alpha}) \frac{\partial D^k}{\partial x^j} = E^{-1} \delta^j_k \frac{\partial D^k}{\partial x^j},$$

deoarece

$$a^j_{\alpha} A^{\alpha}_k = \delta^j_k$$

în conformitate cu regula de desvoltare a determinanţilor.

Prin urmare:

$$D' = E^{-1} \frac{\partial D^k}{\partial x^k} = E^{-1} D, \qquad (120,V)$$

formulă din care rezultă că divergenţa $D$ este o densitate scalară.

*In spaţiul metric euclidian cei trei operatori introduşi pierd semnificaţiile lor tensoriale.*

*Astfel gradientul (109,V) devine un vector,* deoarece caracterele contravariant şi covariant se confundă. Vom avea

$$\text{grad } U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

*Rotorul este deasemenea un vector,* deoarece $E = [\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}] = 1$. Deci

$$R'^{\alpha} = A^{\alpha}_k R^k.$$

Divergenţa devine un scalar, deoarece $E^{-1} = 1$ şi

$$D' = D.$$

Scanned with OKEN Scanner

## EXERCIȚII

1. Să se calculeze derivata funcției *exp.* $[\bar{a}(t^2), \bar{a}(t), a(t^3)]$ în punctul $t=1$.

2. Fie $\bar{r}=\bar{r}(t)$ un vector, funcție de $t$. Să se arate că

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}\,d\bar{r}}{r^3},$$

unde $r=|\bar{r}|$.

Indicație. Se va utiliza egalitatea $rdr=\bar{r}d\bar{r}$ și se va diferenția $\sqrt{r^2}$.

3. Fie $\bar{r}=\bar{r}(t)$ un vector, funcție de $t$. Să se arate că dacă $(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = 0$, atunci $(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}^{(k)}) = 0$ pentru orice $k$.

Indicație. Se va deriva produsul mixt $(\bar{r}'\ \bar{r}''\ \bar{r}''')$.

4. Fie $C$ un cerc de centru $O$ și rază 1. Fie $M$ un punct fix pe cerc. Pentru orice $\theta$, fie $\bar{\rho}(\theta)$ vectorul $\overline{OP}$, care face un unghi $\theta$ cu $\overline{OM}$.

a) Să se studieze pozițiile vectorilor $\bar{\rho}'$, $\bar{\rho}''$, $\bar{\rho}'''$, $\bar{\rho}^{(IV)}$.

b) Să se calculeze $\bar{V}'$, unde $\bar{V}=\bar{\rho}\times(\bar{\rho}'\times\bar{\rho}'')$.

Indicație. Se va observa că $\bar{\rho}$ este unitar și că lungimea arcului $MP$ este $\theta$.

5. Fie $\bar{r}=\bar{r}(t)$ un vector, funcție de $t$. Să se arate că dacă $\bar{r}'(t)=\lambda(t)\,\bar{a}$, unde $\lambda(t)$ este o funcție scalară și $\bar{a}$ un vector constant, traiectoria descrisă de vârful vectorului $\bar{r}(t)$ se găsește pe o dreaptă. Să se studieze cazurile particulare $\lambda(t)=t$, $\lambda(t)=t^2$, $\lambda(t)=\sin t$

6. Fie $\bar{r}=\bar{r}(t)$ un vector, funcție de $t$. Să se arate că dacă $\bar{r}'(t)=\lambda(t)\,\bar{a}+\mu(t)\,\bar{b}$, unde $\lambda(t)$, $\mu(t)$ sunt funcții scalare și $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori constanți, traiectoria descrisă de vârful lui $\bar{r}(t)$ se găsește într'un plan.

7. Să se studieze traiectoria descrisă de vârful vectorului $\bar{r}=\bar{r}(t)$, știind că $\bar{r}''=\lambda\bar{r}'+\mu\bar{r}$, unde $\lambda$, $\mu$ sunt constanți.

8. Să se studieze traiectoria descrisă de vârful vectorului $\bar{r}(t)$, știind că $\bar{r}''=\bar{a}$, unde $\bar{a}$ este un vector constant.

9. Dacă $\bar{a}_i=\bar{a}_i(t)$ $(0\leq i\leq n)$ sunt $n+1$ vectori, funcții de $t$ și dacă pentru orice vector $\bar{b}=\bar{b}(t)$ de $n$ ori derivabil, avem

$$\sum_{\delta=0}^{n} \bar{a}_i\bar{b}^{(i)}=0$$

pentru orice $t$, atunci $a_0=\bar{a}_1\ldots=\bar{a}_n=0$.

10. Să se arate că din orice familie infinită și mărginită de vectori se poate extrage un șir $\bar{v}_n$ de vectori, distincți doi câte doi, care converge către un vector $\bar{v}_0$.

11. Fie $\bar{a}=\bar{a}(t)$ și $b=\bar{b}(t)$ doi vectori, funcții de $t$. Să se demonstreze formulele

a) $$\frac{d^n}{dt^n}\bar{a}\bar{b}=\bar{a}^{(n)}\bar{b}+\binom{n}{1}a^{(n-1)}b^{(1)}+\cdots+\binom{n}{p}\bar{a}^{(n-p)}\bar{b}^{(p)}+\cdots+\bar{a}\bar{b}^{(n)};$$

b) $$\bar{a}^{(n)}\bar{b}+(-1)^{n-1}\bar{a}b^{(n)}=\frac{d}{dt}\left[\bar{a}^{(n-1)}\bar{b}-\bar{a}^{(n-2)}\bar{b}^{(1)}+\cdots+(-1)^{n-1}\bar{a}\bar{b}^{(n-1)}\right];$$

c) $$\bar{a}^{(n)}\bar{b}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{d^{n-p}}{dt^{n-p}}\bar{a}\bar{b}^{(p)}.$$



Scanned with OKEN Scanner

12. Fie $\bar{V}=(yz+1)\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$. Să se determine $\varphi=\varphi(x, y, z)$, astfel încât $d\varphi=\bar{V}d\bar{r}$.

13. Fie $\bar{r}(\alpha)=\bar{p}(\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)+\bar{a}\alpha$, unde $\bar{a}$ este constant, $\bar{p}\perp\bar{a}$, $|\bar{p}'|=|\bar{p}|=1$ pentru orice $\alpha$. Să se calculeze $\bar{r}'(\alpha)$, $|\bar{r}'(\alpha)|$ și $\cos(\bar{a}, \bar{r}')$.

14. Să se arate că ecuațiile parametrice

$$x(t)=af(t)+a'g(t)+a'';$$
$$y(t)=bf(t)+b'g(t)+b'';$$
$$z(t)=cf(t)+c'g(t)+c'';$$

definesc o curbă plană, al cărui plan este paralel cu vectorii $\bar{a}\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ și $a'\bar{i}+b'\bar{j}+c'\bar{k}$. Să se studieze natura curbei în cazurile

a) $f(t)=t^2$, $g(t)=t$;

b) $f(t)=\cos t$, $g(t)=\sin t$;

c) $f(t)=\operatorname{ch} t$, $g(t)=\operatorname{sh} t$.

15. Fie $\bar{r}(t)=\bar{i}\sin t+\bar{j}\cos t+\bar{k}\sin t$. Să se arate că

a) $\bar{r}^2+\bar{r}'^2=\text{const}$;

b) vârful vectorului $\bar{r}(t)$ descrie o curbă plană.

16. Să se integreze ecuația diferențială

$$\left[\bar{c}\times\bar{r}(t)\right]\times\frac{d\bar{r}(t)}{dt}=0,$$

unde $\bar{c}$ este constant.

Indicație. Se va desvolta dublul produs vectorial.

17. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $\bar{c}\sin(\bar{c}\bar{r})\times\frac{d\bar{r}(t)}{dt}=0,$

b) $\bar{c}\times\frac{d\bar{r}(t)}{dt}=0,$

unde $\bar{c}$ este un vector constant.

Indicație. Se va simplifica prima ecuație cu $\sin(\bar{c}\bar{r})$.

18. Fie $\bar{r}(\alpha)=\sin\alpha\left[\bar{a}+\bar{p}(\alpha)\right]+\alpha\bar{a}$, unde $\bar{a}$ este un vector constant și $|\bar{p}|=|\bar{p}'|=1$, $\bar{p}\perp\bar{a}$.

Să se calculeze

$$|\bar{r}'(\alpha)| \text{ și } \cos(\bar{a}, \bar{r}').$$

19. Să calculeze

$$\int_0^1\left[\bar{a}\times\bar{r}(t)\right]dt,$$

unde $\bar{a}$ este un vector constant și $\bar{r}(t)=\bar{i}t+\bar{j}t^2+\bar{k}t^3$.

20. Să se calculeze

$$\int_0^1\left[\bar{a}, \bar{b}, \bar{r}(t)\right]dt,$$

unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt doi vectori constanți și $\bar{r}(\bar{t})=\bar{i}t+\bar{j}t^2+\bar{k}t^3$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

# CAPITOLUL VI

# METODA VECTORIALĂ ÎN GEOMETRIA DIFERENȚIALA

## A. CURBE ÎN SPAȚIU

### § 65 Reprezentarea vectorială a curbelor

Proprietăţile figurilor geometrice având un caracter invariant, deci fiind independente de alegerea unui sistem de referinţă în spaţiu, îşi găsesc în Calculul vectorial un mijloc de reprezentare natural. In special, noţiunile geometrice caracteristice relaţiilor între puncte vecine, cum sunt tangenta, normala, curbura, etc. se exprimă uşor prin mărimi vectoriale şi scalare.

Studiul vectorial al curbelor din spaţiu este un exemplu de posibilităţile pe care le oferă cunoaşterea metodelor vectoriale şi conduce la aplicaţii fizice importante în determinarea traiectoriilor particulelor şi a mişcării pe aceste traiectorii.

Dealtfel, însăşi noţiunea intuitivă de curbă provine din aceea de traiectorie, considerată ca locul poziţiilor succesive ale unei particule materiale în mişcare.

Definiţia geometrică a curbei este greu de dat în termeni corecţi şi precişi. O curbă este o mulţime de puncte din spaţiu, care poate fi reprezentată prin funcţii continue de un parametru $t$, dacă punctele spaţiului sunt raportate la un sistem de coordonate.

Să presupunem spaţiul raportat la un sistem de coordonate cartezian. Vom spune că punctul $M(x, y, z)$ *descrie o curbă* $C$ *când coordonatele acestui punct sunt trei funcţii*

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \tag{1,VI}$$

*continue într'un interval* $(t_1, t_2)$.

O astfel de curbă este încă prea generală în comparaţie cu imaginea intuitivă a curbelor uzuale, deoarece este posibll ca ea să nu admită o tangentă sau chiar, conform cu un exemplu bine cunoscut, dat de *Peano*, să umple un cub.

In aplicaţii, vom presupune că funcţiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sunt derivabile în fiecare punct al intervalului $(t_1, t_2)$, având derivate continue până la un anumit ordin $p>2$, cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte, în care derivatele pot fi discontinue.

Când derivatele sunt discontinue într'un punct, vom presupune că ele admit limite la stânga şi la dreapta finite, deci că discontinuităţile sunt de prima specie.

In cazul particular, când derivatele de ordinul întâi sunt discontinue, curba are puncte în care se frânge, fiind deci compusă din arce continue, pe care tangenta variază continuu. Astfel de exemple sunt necesare în aplicații, fiindcă un contur poligonal face parte din această categorie de curbe.

Cum oricărui punct din spațiu i se poate asocia un vector de poziție $\bar{r}$, punctului $M(x, y, z)$, care descrie o curbă $C$, definită ca mai sus, îi corespunde un vector

$$\bar{r}=\bar{r}(t)=x(t)\,\bar{u}+y(t)\,\bar{v}+z(t)\,\bar{w},$$

deci un vector, funcție continuă de un parametru $t$. Invers, orice vector $\bar{V}(t)$, funcție continuă de $t$ într'un interval $(t_1, t_2)$, poate fi considerat ca vector de poziție al unui punct $M$ și deci corespunde unei curbe $C$ descrisă de extremitatea sa, în speță hodografului vectorului $\bar{V}(t)$. Deci, vom spune că relațiile (1, VI) sunt *ecuațiile parametrice* ale unei curbe $C$ în spațiul cu trei dimensiuni.

Din considerațiile precedente rezultă că: *Orice curbă C, definită prin ecuațiile parametrice* (1, VI), *poate fi reprezentată vectorial printr'un vector de poziție* $\bar{r}(t)$, *funcție continuă de un parametru t.* Vom numi relația

$$\bar{r}=\bar{r}(t) \qquad (2,\text{VI})$$

*ecuația vectorială a curbei C.*

O curbă din spațiul cu trei dimensiuni poate fi conținută în întregime într'un plan, în care caz se numește *curbă plană.* Pentru aceasta este necesar și suficient să existe un plan de ecuație

$$\bar{n}\bar{r}=a,$$

unde $\bar{n}$ este un vector constant și $a$ un scalar, astfel încât să avem identic

$$\bar{n}\bar{r}(t)=a$$

pentru orice valoare a lui $t$ din intervalul $(t_1, t_2)$.

**Exemplu.** Curba de ecuație vectorială

$$\bar{r}=\bar{i}\sin t+\bar{j}\cos t+\bar{k}(\sin t+\cos t)$$

este o curbă plană conținută în planul de ecuație vectorială

$$(\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})\,\bar{r}=0,$$

deoarece avem identic

$$(\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})[\bar{i}\sin t+\bar{j}\cos t+\bar{k}(\sin t+\cos t)]\equiv 0.$$

Dacă o curbă din spațiu nu este conținută în întregime într'un același plan, o vom numi *curbă strâmbă.*

Curbele plane pot fi considerate ca un caz particular al curbelor strâmbe, deci vor avea aceeași reprezentare vectorială (2, VI), care cuprinde și cazul dreptelor din spațiu.

**Exemplul de reprezentare vectorială a unei curbe strâmbe:** *Elicea circulară.*

Un exemplu clasic de curbă reprezentată vectorial este elicea circulară, sau *elicea cilindrică*, definită ca traiectoria unui punct $M$, care se mișcă pe un cilindru circular de rază $a$, cu baza într'un plan dat, așa fel încât la fiecare moment cota punctului $M$ față de acest plan să fie proporțională cu arcul $Am$ descris în planul bazei de proiecția sa $m$ începând dela un punct fix $A$ (fig. 145).

Scanned with OKEN Scanner

Luând axa $Oz$ paralelă cu generatoarele cilindrului, ecuațiile parametrice ale elicei circulare sunt

$$x=a\cos\theta, \quad y=a\sin\theta, \quad Z=h\theta,$$

unde $h$ este o constantă numită *pasul redus* al elicei, reprezentând creșterea cotei pentru o rotație de un radian. Ecuația vectorială a elicei cilindrice este

$$\bar{r}=\bar{i}a\cos\theta+\bar{j}a\sin\theta+\bar{k}h\theta.$$

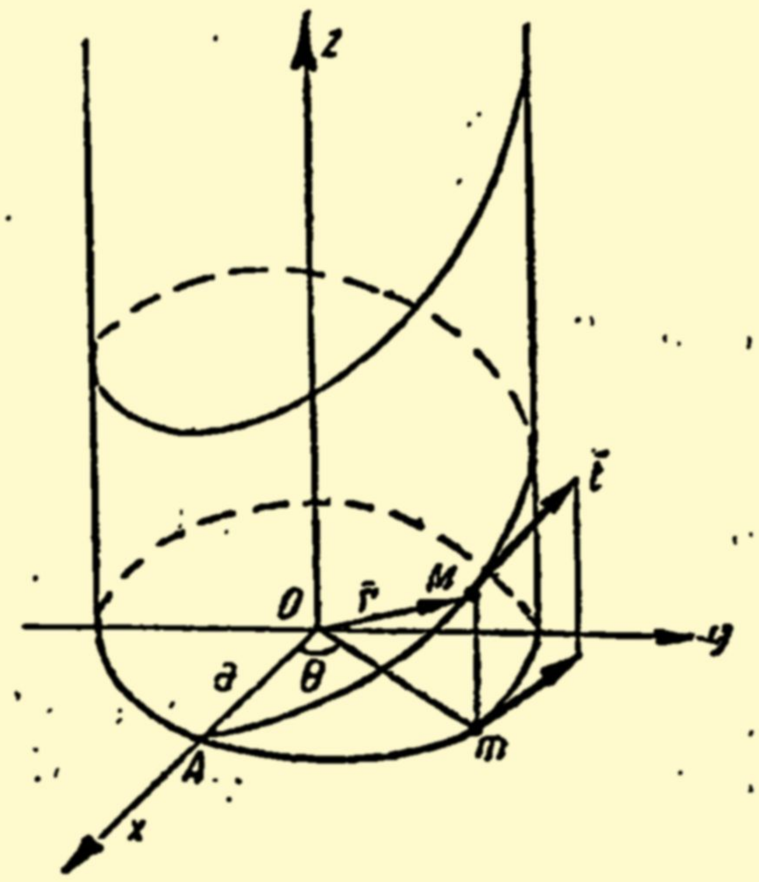


Fig. 145

Reprezentarea parametrică a curbelor cuprinzând ca un caz particular ecuațiile carteziene, *reprezentarea vectorială se aplică și curbelor date prin ecuații carteziene explicite.*

In adevăr, dacă numim *suprafață* mulțimea punctelor ce satisfac o ecuație de forma $F(x,y,z)=0$, putem defini curbele ca intersecții a două suprafețe având ca ecuații carteziene implicite:

$$F(x,y,z)=0, \quad G(x,y,z)=0, \qquad (3,\text{VI})$$

cu ipoteza că funcțiile $F$ și $G$ sunt continue, împreună cu derivatele lor parțiale de primul ordin cel puțin, într'un domeniu $D$ din spațiu. Presupunând atunci că

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\neq 0$$

în $D$, se pot rezolva ecuațiile (3,VI) în raport cu $y,z$, în domeniul unui punct $x_0, y_0, z_0$ care le verifică, astfel încât soluția

$$y=y(x), \quad z=z(x),$$

unică și continuă, având derivate continue în raport cu $x$, reprezintă, sub forma explicită, intersecția celor două suprafețe.

Este suficient să luăm ca parametru chiar pe $x$, pentru ca ecuațiile

$$x=x, \quad y=y(x), \quad z=z(x)$$

să reprezinte parametric curba dată.

Evident, cazul curbelor plane din planele de coordonate este cuprins în acesta, astfel încât putem oricând trece dela orice formă de reprezentare a unei curbe, care îndeplinește condiții suficiente impuse de Analiză, la forma parametrică și deci la ecuația vectorială.

Menționăm că reprezentarea vectorială nu constitue numai un mod de a scrie condensat ecuațiile parametrice, obținute prin raportarea spațiului la un anumit triedru. Ideea de a lega punctul curent $M$ al curbei de un vector de poziție, permite *reprezentarea vectorială directă, fără utilizarea vreunui triedru de referință*, prin relații între vectorul de poziție variabil și alți vectori fixi.

**Exemplu.** *Traiectoria punctului M, care se mișcă sub acțiunea gravității cu rezistența aerului proporțională cu viteza.*

Raportând punctul $M$ la punctul inițial $O$, luat ca punct de reper, notăm cu $\bar{r}(t)$ vectorul de poziție $\overline{OM}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezistența acționează pe tangenta la traiectorie opunându-se mișcării și deci este de forma $-m\lambda\bar{v}$, unde $m$ este masa particulei, iar $\lambda$ o constantă.

Dacă notăm prin $\bar{k}$ versorul verticalei ascendente și aplicăm legea fundamentală a dinamicei, obținem ecuația vectorială

$$m\bar{a} = -mg\bar{k} - m\lambda\bar{v},$$

unde $\bar{a}$ este accelerația.

Dacă ținem seama că

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} \quad \text{și} \quad \bar{a} = \ddot{\bar{r}},$$

cu notațiile obișnuite în Cinematică, traiectoria va fi dată prin ecuația diferențială vectorială

$$\ddot{\bar{r}} + \lambda\dot{\bar{r}} = -g\bar{k},$$

din care vom deduce, prin integrare, vectorul de poziție $\bar{r}(t)$. Integrând odată, avem

$$\dot{\bar{r}} + \lambda\bar{r} = -g\bar{k}t + \bar{p},$$

unde $\bar{p}$ este un vector constant, arbitrar. Dacă, însă, ținem seama că la momentul inițial $\bar{r}(0) = 0$ și notăm cu $\bar{v}_0$ vectorul viteză inițială, vom avea $\bar{p} = \bar{v}_0$, deci

$$\dot{\bar{r}} + \lambda\bar{r} = -gt\bar{k} + v_0. \qquad (4,VI)$$

Această ecuație liniară de ordinul întâi se poate integra prin metoda dată (§ 157). Obținem traiectoria sub formă vectorială, dată de expresia

$$\bar{r}(t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\bar{v}_0 + \frac{g}{\lambda}\left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} - t\right)\bar{k}, \qquad (5,VI)$$

în care vectorul $\bar{r}(t)$ nu este raportat la un triedru de referință impus, ci descompus după direcțiile vitezei inițiale și verticalei ascendente. Traiectoria este astfel o curbă din planul format de $\bar{v}_0$ și $\bar{k}$.

## § 166 Proprietăți locale. Elementul de arc și vectorul tangent elementar

Din definiția curbelor se deduc proprietățile lor, stabilindu-se relații între punctele lor, sau între punctele lor și alte configurații geometrice.

Dacă aceste relații au loc între puncte vecine, vom spune că ele sunt *relații locale* sau *diferențiale* și vom numi Geometrie diferențială a curbelor teoria proprietăților geometrice locale sau diferențiale.

Cele mai simple relații locale se pot stabili între un punct oarecare $M$ al curbei și un punct $M'$ *vecin* cu $M$ (fig. 146). Vom spune că un punct $M'$ este vecin cu $M$ pe curba $C$, când vectorii lor de poziție sunt vecini, deci dacă $\epsilon > 0$ fiind dat arbitrar, avem

$$|\bar{r}(t') - \bar{r}(t)| < \epsilon \quad \text{pentru} \quad |t' - t| < \eta.$$

In acest caz vectorul

$$\delta\bar{r} = \bar{r}(t + \delta t) - \bar{r}(t), \quad \text{cu} \quad \delta t = t' - t \qquad (6,V)$$

reprezentând *coarda orientată* $\overline{MM'}$, care unește cele două puncte pe curbă, poate fi făcut arbitrar de mic în modul, când $\delta t$ este suficient de mic.

Scanned with OKEN Scanner

Punctele arcului de curbă $MM'$ fiind vecine punctelor vectorului $\overline{MM'}$ vom asimila acest arc cu coarda sa $\overline{MM'}$ într'o primă aproximație, care va fi cu atât mai bună cu cât $\epsilon$ va fi ales mai mic.

Vom numi *arc elementar* $MM'$ al unei curbe mulțimea punctelor curbei cuprinse între un punct $M$ dat și un punct $M'$, vecin acestuia pe curbă.

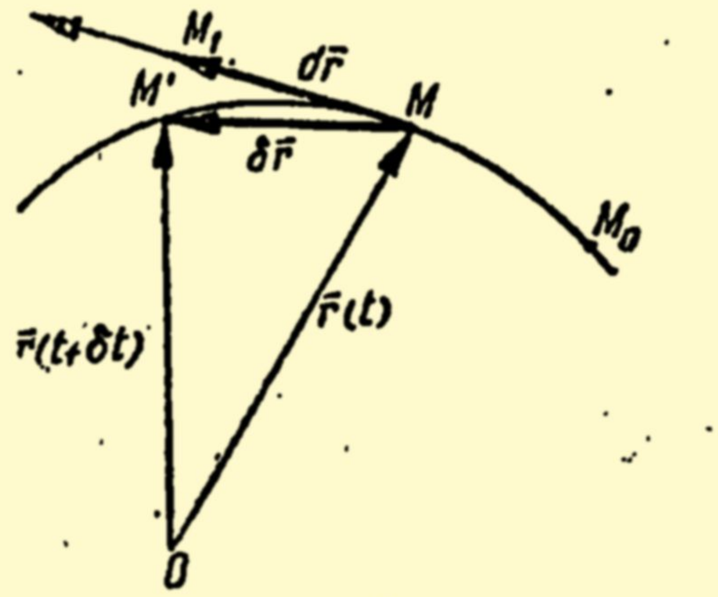



Fig. 146

*Vectorul $\delta\bar{r}$ va reprezenta deplasarea pe curbă dela un punct $M$ la un punct vecin $M'$.* Avem astfel un prim exemplu de proprietate locală: posibilitatea de a substitui mulțimii tuturor punctelor de pe curbă, cuprinse între două puncte vecine $M$ și $M'$, mulțimea punctelor cuprinse între originea și extremitatea unui vector $\overline{MM'}=\delta\bar{r}$, cu o eroare ce poate fi făcută oricât de mică.

Substituind porțiunii de curbă $MM'$ segmentul orientat $\overline{MM'}$, suntem conduși să atribuim arcului elementar $MM'$ o lungime, și anume lungimea segmentului $\overline{MM'}$, deci modulul vectorului $\delta\bar{r}$.

Vom nota această lungime a arcului elementar prin $\delta s$:

$$\delta s=|\delta\bar{r}|. \qquad (7,VI)$$

Cum, însă, presupunem vectorul $\bar{r}(t)$ derivabil continuu în domeniul punctului $t$, deci în vecinătatea punctului $M$ de pe curbă, vom avea:

$$\delta\bar{r}=\frac{d\bar{r}}{dt}dt+\bar{\epsilon}=d\bar{r}+\bar{\epsilon},$$

unde $\bar{\epsilon}$ este un vector, care tinde către zero cu $\delta t$.

*Partea principală a lui $\delta\bar{r}$ este diferențiala $d\bar{r}$. Aceasta ne va permite să mai facem o aproximație, substituind vectorului $\delta\bar{r}$, vectorul elementar $d\bar{r}$, tangent la curbă în punctul $M$.*

Orice punct $M$ de pe curbă, în care vectorul tangent este determinat și nenul, se numește *punct ordinar.*

Vom numi *element de arc* al curbei $C$, modulul vectorului tangent elementar $d\bar{r}$ și vom spune:

$$ds=|d\bar{r}|. \qquad (8,VI)$$

Ținând seama de relațiile (6,VI) și (7,VI), vom putea scrie:

$$d\bar{r}\simeq\delta\bar{r};\quad ds\simeq\delta s.$$

Vectorul $d\bar{r}=\frac{d\bar{r}}{dt}dt$, tangent la curbă în punctul $M$ și variabil în modul cu $dt$, se numește *vector tangent elementar* în $M$.

*Vectorul tangent elementar, cât și elementul de arc sunt mărimi geometrice independente de alegerea parametrului $t$.*

In adevăr, presupunând că schimbăm parametrul $t$ cu un altul $\tau$, schimbarea fiind definită prin formula

$$t=t(\tau),$$

vom avea:

$$d\bar{r}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt}dt;$$

$$d\bar{r}[t(\tau)] = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau = \frac{d\bar{r}}{dt}dt = d\bar{r}(t).$$

Deasemenea:

$$ds = |d\bar{r}(t)| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| |dt|;$$

$$|d\bar{r}[t(\tau)]| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| \left|\frac{dt}{d\tau}d\tau\right| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| |dt| = ds,$$

ceeace dovedește independența lui $d\bar{r}$ și $ds$ de modul în care este reprezentată parametric curba.

## § 167. Abscisa curbilinie și orientarea curbelor

Fiind dat un punct $M_0$ pe o curbă $C$ (fig. 147), putem substitui arcului elementar $M_0M_1$ vectorul $\overline{M_0M_1}$. Deasemenea, arcului elementar $M_1M_2$, vectorul $\overline{M_1M_2}$, etc. Cum orice punct $M$ de pe curbă, interior unui arc dat, poate fi socotit ca fiind pe un astfel de vector elementar, există pe curbă, în vecinătatea sa, puncte, atât la dreapta, cât și la stânga, ca pe orice segment orientat. Deci vom putea substitui curbei $C$ un poligon înscris pe care deosebim două sensuri de parcurs. Făcând apoi laturile acestui poligon din ce în ce mai mici, vom putea considera curba *susceptibilă* de a fi parcursă, în două sensuri opuse, de un punct mobil ce se mișcă pe ea ca pe o traiectorie.

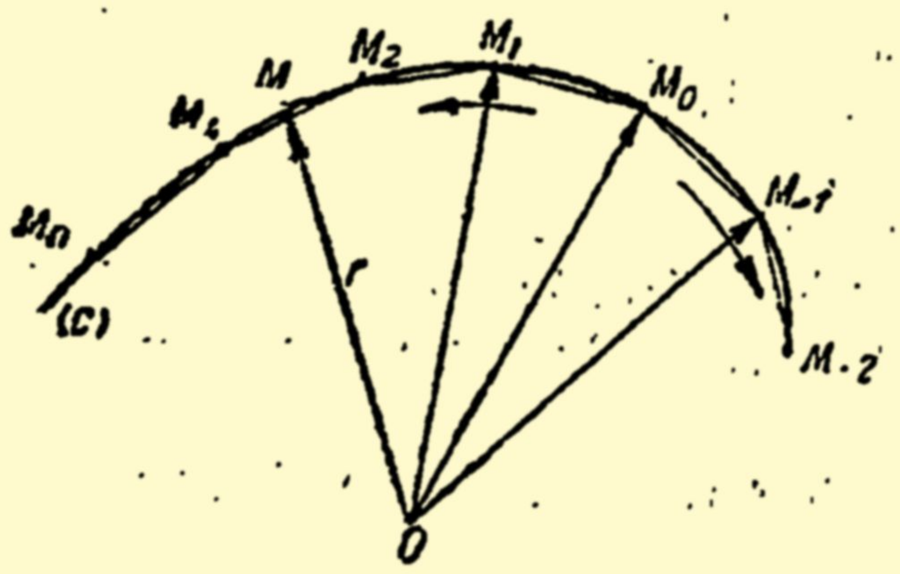



Fig. 147

Dacă alegem unul dintre aceste sensuri ca pozitiv, spunem că *am orientat* curba $C$.

Să presupunem, de exemplu, că punctul $M$ nu-și schimbă sensul de parcurs când $t$ crește dela $a$ la $b$. Vom putea, atunci, alege ca sens pozitiv sensul în care se deplasează $M$ când parametrul crește.

Poligonul de aproximație fiind parcurs în sensul $M_0, M_1, M_2, \ldots$, corespunzător sensului pozitiv pe curbă, atribuind arcului de curbă $M_0M_1M_2, \ldots$ o lungime definită prin lungimea acestui poligon, aceasta nu este perfect definită, deoarece poligonul este arbitrar ales.

Se arată însă că această lungime tinde către o limită bine determinată, dacă $\bar{r}(t)$ este continuu și derivabil continuu.

Dacă notăm cu

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$$

valorile parametrului $t$ corespunzând punctelor $M_0, M_1, \ldots, M_n = M$ şi cu $s_n$ suma laturilor poligonului de aproximaţie, vom avea:

$$s_n = \delta s_0 + \delta s_1 + \cdots + \delta s_n \simeq ds_1 + ds_2 + \cdots + ds_n =$$
$$= |d\bar{r}(t_0)| + |d\bar{r}(t_1)| + \cdots + |d\bar{r}(t_n)| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{t=t_i} dt_i.$$

Notând cu $s$ limita acestei sume, când $n$ tinde către infinit, vom avea:

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt \qquad (9,VI);$$

şi vom numi $s$ *lungimea arcului de curbă* $M_0M$[1]).

Integrala vectorială (9,VI) este susceptibilă de semn pozitiv, sau negativ, după cum arcul este parcurs în sensul pozitiv sau negativ ales, astfel încât fiecărui punct $M$ de pe curbă îi corespunde câte un scalar $s$, care este pozitiv, sau negativ, după cum punctul $M$ se găseşte de o parte sau de cealaltă a lui $M_0$.

Vom numi scalarul $s$ *abscisa curbilinie* a punctului $M$ pe curba $C$, măsurată din punctul $M_0$, ales ca origine a arcelor.

Expresia (9,VI) a lui $s$ este o funcţie scalară de $t$, crescătoare cu $t$. Deci, *sensul pozitiv pe curbă corespunde arcelor crescătoare, în ipoteza făcută că acest sens corespunde creşterii parametrului t.*

Fie

$$s = s(t); \quad \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| \geqslant 0 \qquad (10,VI);$$

funcţia care reprezintă pe $s$, dată de integrala (9,VI).

Teorema funcţiilor implicite ne va permite să rezolvăm ecuaţia (10,VI) în raport cu $t$, în orice punct $t$ în care $s'(t) \neq 0$, deci să exprimăm parametrul $t$ printr'o funcţie continuă şi derivabilă continuu

$$t = t(s)$$

de abscisa curbilinie $s$.

Fiindcă

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \geqslant 0,$$

funcţia $t(s)$ va fi deasemenea crescătoare cu $s$, astfel încât arcelor crescătoare trebue să le corespundă parametri crescători, când abscisa curbilinie este definită prin relaţia

$$ds = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt.$$

---

[1]) A se vedea, de exemplu, *M. Nicolescu*, Calcul diferenţial şi integral, Bucureşti, 1949, p. 370 şi Analiza, vol. II, Ed. Academiei R. P. R., Bucureşti, 1953, p. 64.

Scanned with OKEN Scanner

## § 168. Reprezentările parametrice și reprezentarea carteziană

Am văzut că reprezentarea vectorială a curbelor nu implică o reprezentare prealabilă a vectorului $\bar{r}(t)$ în raport cu un triedru de referință. Deoarece abscisa curbilinie $s$ se poate exprima în raport cu un parametru oarecare $t$, vom putea alege ca parametru chiar pe $s$. În acest caz ecuația vectorială a curbei se va scrie

$$\bar{r}=\bar{r}(s).$$

Vectorul tangent elementar $d\bar{r}$ va avea expresia

$$d\bar{r}=\frac{d\bar{r}}{ds}ds.$$

Luând modulele în ambii membri, vom scrie

$$|d\bar{r}|=\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right||ds|,$$

deci, ținând seama de (8,VI)

$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|=1.$$

Se vede că vectorul tangent la curbă $\frac{d\bar{r}}{ds}$ este un versor. Vom nota cu

$$\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{ds}, \qquad (11,VI)$$

acest versor și-l vom numi *versorul tangentei la curbă în punctul M*.

Din (11,VI) deducem expresia vectorului tangent elementar:

$$d\bar{r}=\bar{\tau}\,ds. \qquad (11',VI)$$

Dacă alegem ca sens pozitiv pe curbă sensul arcelor crescătoare, începând dela o origine $M_0$, vom putea deduce următorul rezultat important:

*Derivata vectorului de poziție $\bar{r}(s)$, în raport cu abscisa curbilinie $s$, este un versor tangent la curbă în punctul M, orientat în sensul arcelor crescătoare.*

*Modulul vectorului elementar tangent la curbă este elementul de arc.*

Să presupunem $\delta s>0$ (fig. 148 *a*). În acest caz, vectorul $\delta\bar{r}=\overline{MM'}$ este îndreptat în sensul pozitiv și deci vectorul

$$\frac{1}{\delta s}\delta\bar{r}=\frac{\delta\bar{r}}{\delta s}$$

este orientat în sensul pozitiv. Dacă dimpotrivă, $\delta s<0$ (fig. 148, *b*), vectorul $\delta\bar{r}$ este îndreptat sensul negativ, dar vectorul

$$\frac{1}{\delta s}\delta\bar{r}=\frac{\delta\bar{r}}{\delta s}$$

va avea orientarea contrară, deci sensul pozitiv.

Trecând la limită, vedem că, oricare ar fi modul în care $M'$ tinde către $M$, vectorul $\frac{d\bar{r}}{ds}$ este orientat pozitiv.

Scanned with OKEN Scanner

Alegerea abscisei curbilinii $s$ ca parametru pe curbă are deci această primă consecință importantă că *pune în evidență un versor tangent, care indică în fiecare punct sensul arcelor crescătoare.*

In cazul în care arcele crescătoare corespund creșterii unui parametru $u$, *vectorul tangent* $\frac{d\bar{r}}{du}$ *are aceeași proprietate, dar nu mai este versor.*

Trecerea dela parametrul $s$ la un parametru oarecare se face imediat și avem

$$\frac{d\bar{r}}{du} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{du} = \bar{t}\frac{ds}{du}. \qquad (12,VI)$$

Vom putea deci spune că *vectorul tangent este orientat în sensul parametrilor crescători.*

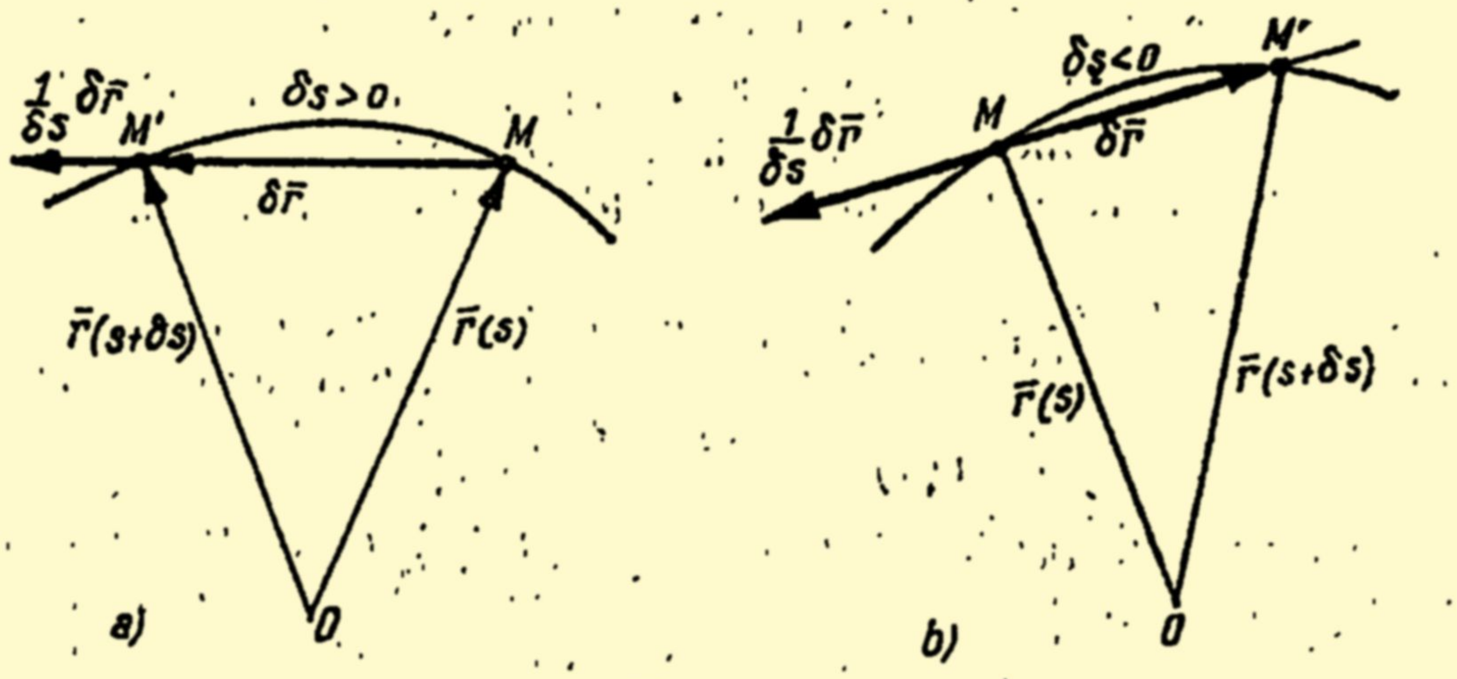



Fig. 148

Dacă într'o problemă sensul pozitiv este impus de considerații independente de alegerea parametrului și este opus celui indicat de creșterea acestuia, este suficient să se schimbe semnul parametrului pentru a se restabili concordanța orientării pe curbă.

*Folosirea unui sistem de referință cartezian ortogonal nu este totdeauna necesară pentru a putea exprima proprietățile locale ale curbelor*: este suficient să se cunoască ecuația vectorială $\bar{r} = \bar{r}(t)$, vectorul de poziție fiind determinat cu ajutorul unor vectori cunoscuți.

**Exemplu.** Traiectoria unei particule în câmpul gravității cu rezistența proporțională cu viteza, este dată de ecuația (5,VI).

Deducem imediat vectorul tangent

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = e^{-\lambda t}\bar{v}_0 - \frac{g}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})\bar{k}.$$

Elementul de arc se obține scriind

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = e^{-2\lambda t}v_0^2 - \frac{2g}{\lambda}e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})\bar{v}_0\bar{k} + \frac{g^2}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda t})^2,$$

de unde

$$ds = \sqrt{e^{-2\lambda t}v_0^2 - \frac{2g}{\lambda}e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})\bar{v}_0\bar{k} + \frac{g^2}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda t})^2}\,dt,$$

arcele fiind considerate crescătoare odată cu parametrul $t$. Abscisa curbilinie se obține din integrala

$$s=-\int_1^\tau \frac{\sqrt{v_0^2\lambda^2\tau^2-2g\lambda\tau(1-\tau)\bar{v}_0\bar{k}+g^2(1-\tau)^2}}{\lambda^2\tau}\,d\tau,$$

obținută făcând schimbarea de parametru

$$e^{-\lambda t}=\tau.$$

Versorul tangentei va fi

$$\frac{d\bar{r}}{ds}=\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{\lambda\tau\bar{v}_0-g(1-\tau)\bar{k}}{\sqrt{v_0^2\lambda^2\tau^2-2g\lambda\tau(1-\tau)\bar{v}_0\bar{k}+g^2(1-\tau)^2}}$$

Vectorii $\bar{v}_0$ și $\bar{k}$ servesc ca sistem de referință oblic în planul traiectoriei, astfel încât utilizarea unui alt sistem de referință nu mai este necesară.

Proprietățile metrice ale figurilor se exprimă însă, mai simplu, în coordonate carteziene ortogonale, cel puțin în cazurile când în problema tratată nu intervine un anumit triedru format de vectori ce fac parte din însăși configurația dată.

Deaceea, este necesar să dăm *formulele de trecere dela reprezentarea vectorială la cea carteziană și invers.* Ecuația vectorială a curbei $C$ devine

$$\bar{r}=\bar{r}(u)=x(u)\bar{i}+y(u)\bar{j}+z(u)\bar{k}$$

când spațiul este raportat la triedrul ortogonal $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.
Vectorul tangent va fi

$$\frac{d\bar{r}}{du}=\frac{dx}{du}\bar{i}+\frac{dy}{du}\bar{j}+\frac{dz}{du}\bar{k}, \qquad (13,VI)$$

deci va avea componentele

$$\frac{dx}{du},\ \frac{dy}{du},\ \frac{dz}{du}.$$

Pentru determinarea abscisei curbilinii, vom scrie

$$ds^2=\left(\frac{d\bar{r}}{du}\right)^2du^2=\left[\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right]du^2, \qquad (14,VI)$$

de unde

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \qquad (15,VI)$$

Din relația (14,VI) deducem

$$s=\int_{u_0}^{u}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,du=s(u), \qquad (16,VI)$$

arcele fiind crescătoare în sensul parametrului $u$ crescător pe curbă.

Odată cunoscută abscisa curbilinie, vom putea exprima versorul tangentei

$$\bar{l}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\frac{d\bar{r}}{du}\frac{du}{ds}=\frac{dx}{ds}\bar{i}+\frac{dy}{ds}\bar{j}+\frac{dz}{ds}\bar{k}, \qquad (17,VI)$$

ținând seama de (13,VI) Relația dintre $\frac{d\bar{r}}{du}$ și $\frac{d\bar{r}}{ds}$ rezultă din (12,VI)

$$\frac{d\bar{r}}{du}=\bar{l}s'(u)=\bar{l}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

derivatele fiind luate în raport cu parametrul $u$.

Scanned with OKEN Scanner

Din faptul că $\bar{\imath}$ este versor deducem imediat

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1, \qquad (18,VI)$$

deci: *Componentele versorului $\bar{\imath}$ sunt cosinusurile directoare ale tangentei la curbă în punctul de contact.*

Din (17,VI) şi (15,VI) deducem

$$d\bar{r}=\bar{\imath}ds=\bar{\imath}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \qquad (19,VI)$$

oricare ar fi parametrul $u$ pe curbă, având în vedere că vectorul elementar este independent de alegerea acestui parametru.

Utilizarea arcului $s$ ca parametru aduce simplificări considerabile în desvoltarea teoriei curbelor. Deaceea, vom presupune că am exprimat dela început vectorul de poziţie ca o funcţie vectorială de $s$. In acest caz, coordonatele carteziene ortogonale sau oblice ale punctului curent vor fi

$$x=x(s);\quad y=y(s);\quad z=z(s).$$

Vom folosi reprezentările vectorială şi carteziană deopotrivă pentru a exemplifica avantajele şi lipsurile ambelor metode, precum şi necesitatea de a le stăpâni pe amândouă. In cazul când triedrul de referinţă este ortogonal, trecerea dela una la cealaltă se face prin formulele de mai sus, care sunt cele mai simple. Nu vom exclude, însă, nici reprezentarea parametrică generală, care în practică apare cel mai des, nici raportarea la un triedru oblic, când acesta se impune prin datele problemei.

**Exemplu.** Elicea cilindrică este un exemplu sugestiv de curbă strâmbă, ale cărei proprietăţi locale se exprimă simplu vectorial.

Pornind dela ecuaţia vectorială

$$\bar{r}=\bar{\imath}a\cos u+\bar{\jmath}a\sin u+\bar{k}hu,$$

obţinută raportând curba la un triedru ortogonal, sugerat de însăşi definiţia elicei, vom avea

$$d\bar{r}=(-\bar{\imath}a\sin u+\bar{\jmath}a\cos u+\bar{k}a)du;\quad ds^2=dr^2=(a^2+h^2)du^2,$$

de unde

$$ds=\sqrt{a^2+h^2}du,$$

considerând arcele crescătoare odată cu parametrul $u$, care dealtfel este arcul bazei cilindrului.

Abscisa curbilinie va fi

$$s=\int_0^u\sqrt{a^2+h^2}\,du=\sqrt{a^2+h^2}u$$

dacă alegem ca origine a arcelor punctul $O$.

Dacă $h>0$, elicea progresează în sensul semiaxei pozitive $Oz$, iar dacă $h<0$, ea progresează în sensul semiaxei negative $Oz'$.

Avem astfel o *elice la dreapta*, respectiv *la stânga*, corespunzând celor două feluri de mişcări de înşurubare (fig. 149).

Putem face ca elicea la dreapta să progreseze în sensul semiaxei negative $Oz'$ schimbând parametrul $u$ în $-u$, deci adoptând sensul de rotaţie al acelor de ceasornic pe bază. Ecuaţia vectorială a elicei va fi în acest caz

$$\bar{r}=\bar{\imath}a\cos u-\bar{\jmath}a\sin u-\bar{k}hu;\quad (h>0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Revenind la reprezentarea elicei cu ajutorul parametrului $s$, ecuațiile parametrice vor fi

$$x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}};\quad y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}};\quad z=h\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Versorul tangentei la elice va fi

$$\bar{t}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\frac{d\bar{r}}{du}\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\left[-\bar{i}a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}+\bar{j}a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}+\bar{k}h\right].$$

Proiecția lui $\bar{t}$ pe planul bazei este vectorul

$$\bar{\tau}=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\left[-\bar{i}a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}+\bar{j}a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]$$

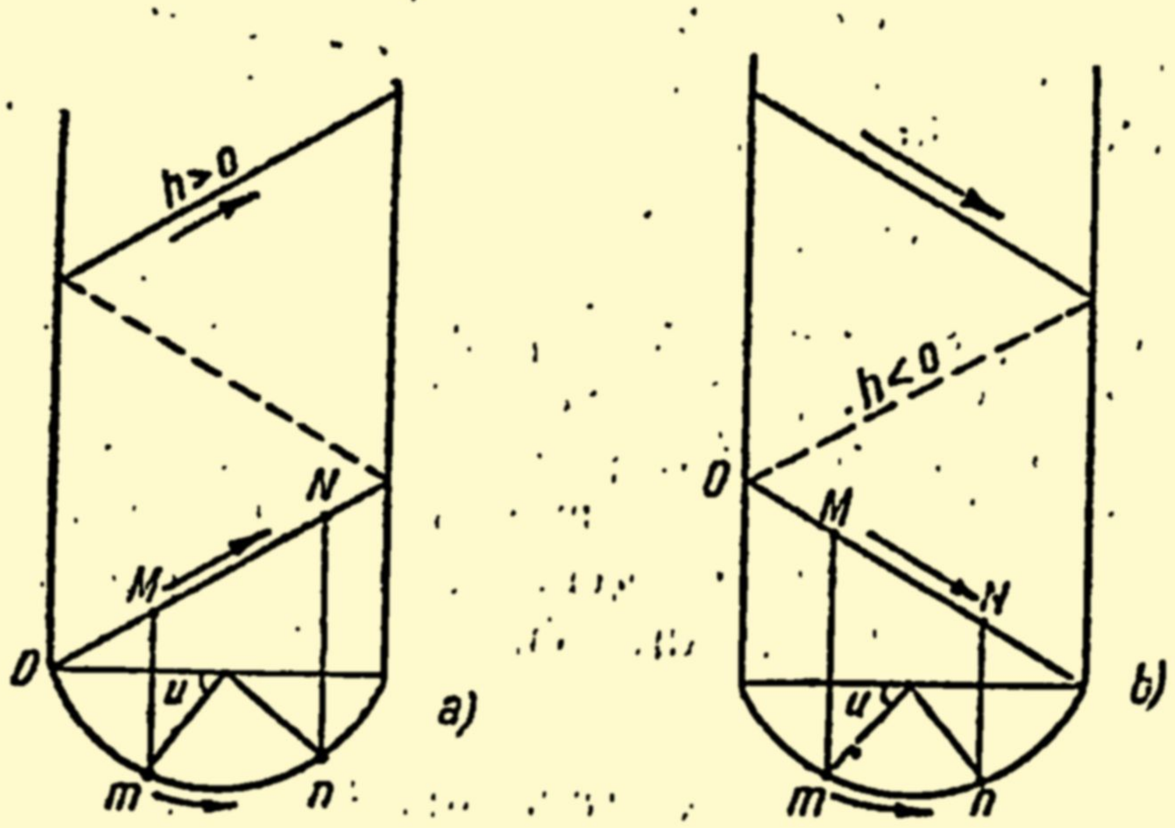


Fig. 149

tangent la cercul de bază și îndreptat în sensul lui $u$ crescător.

Unghiul $\theta$, făcut de $\bar{t}$ cu $\bar{\tau}$, este dat de expresia

$$\cos\theta=\frac{\bar{t}\bar{\tau}}{\tau}=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

deci $\theta$ este constant.

Calculând unghiul făcut de $\bar{t}$ cu axa cilindrului, obținem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{h}{a}.$$

Deci: *Tangenta la elice face cu planul bazei un unghi constant, a cărui pantă este egală cu pasul redus $h/a$.*

## § 169. Planul osculator

Noțiunile de tangentă și arc elementar provin din considerarea relațiilor locale a două puncte vecine de pe curbă. Dacă se introduce un al treilea punct, se obțin noțiuni și proprietăți geometrice noi.

Fiind dat un punct $M$ pe curba $C$, fie $M_1$ și $M_2$ două puncte vecine cu $M$. Vom presupune că, în domeniul punctului $M$, curba nu se reduce la o dreaptă, astfel încât cele trei puncte $M$, $M_1$, $M_2$ nu sunt coliniare.

Ne propunem să determinăm planul ce trece prin aceste trei puncte. *Vom numi plan osculator la curba $C$ în punctul $M$ planul limită al planului ce trece prin $M$ și prin două puncte $M_1$ și $M_2$, vecine cu $M$ pe $C$, când acestea tind independent către $M$.*

Vom nota cu $\bar{r}(u)$ vectorul de poziție al punctului $M$ și vom presupune că $M_1$ și $M_2$ corespund parametrilor $u+\delta_1 u$ și $u+\delta_2 u$ (fig. 150). Admițând că $\bar{r}(u)$ este derivabil continuu până la ordinul al treilea cel puțin, vom putea aplica formula lui Taylor și vom avea:

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{OM}_1 = \bar{r}(u+\delta_1 u) = \bar{r}(u) + \frac{\delta_1 u}{1!}\bar{r}'(u) + \frac{\delta_1^2 u}{2!}\bar{r}''(u) + \frac{\delta_1^3 u}{3!}[\bar{r}'''(u)+\bar{\epsilon}_1];$$

$$\overline{OM}_2 = \bar{r}(u+\delta_2 u) = \bar{r}(u) + \frac{\delta_2 u}{1!}\bar{r}'(u) + \frac{\delta_2^2 u}{2!}\bar{r}''(u) + \frac{\delta_2^3 u}{3!}[\bar{r}'''(u)+\bar{\epsilon}_2].$$

Vectorii $\overline{MM}_1$ şi $\overline{MM}_2$ vor fi evident cuprinşi în planul considerat şi vom avea:

$$\overline{MM}_1 = \bar{r}(u+\delta_1 u) - \bar{r}(u) = \frac{\delta_1 u}{1!}\bar{r}'(u) + \frac{\delta_1^2 u}{2!}\bar{r}''(u) + \cdots$$

$$\overline{MM}_2 = \bar{r}(u+\delta_2 u) - \bar{r}(u) = \frac{\delta_2 u}{1!}\bar{r}'(u) + \frac{\delta_2^2 u}{2!}r''(u) + \cdots \qquad (20,VI)$$

Din aceste formule se vede că $\overline{MM}_1$ şi $\overline{MM}_2$ diferă de $\bar{r}'(u)\delta_1(u)$, respectiv $\bar{r}'(u)\delta_2 u$ prin termeni de ordinul al doilea cel puţin, considerând $\delta_1 u$ şi $\delta_2 u$, independenţi şi de ordinul întâi iar $\bar{r}' \neq 0$.

Prin urmare, planul $MM_1M_2$ conţine cu o eroare de ordinul al doilea vectorul $\bar{r}'(u)$, deci vectorul tangent la $C$ în $M$.

Inmulţind relaţiile (20,VI) respectiv cu $\delta_2 u$ şi $\delta_1 u$ şi scăzându-le, formăm vectorul

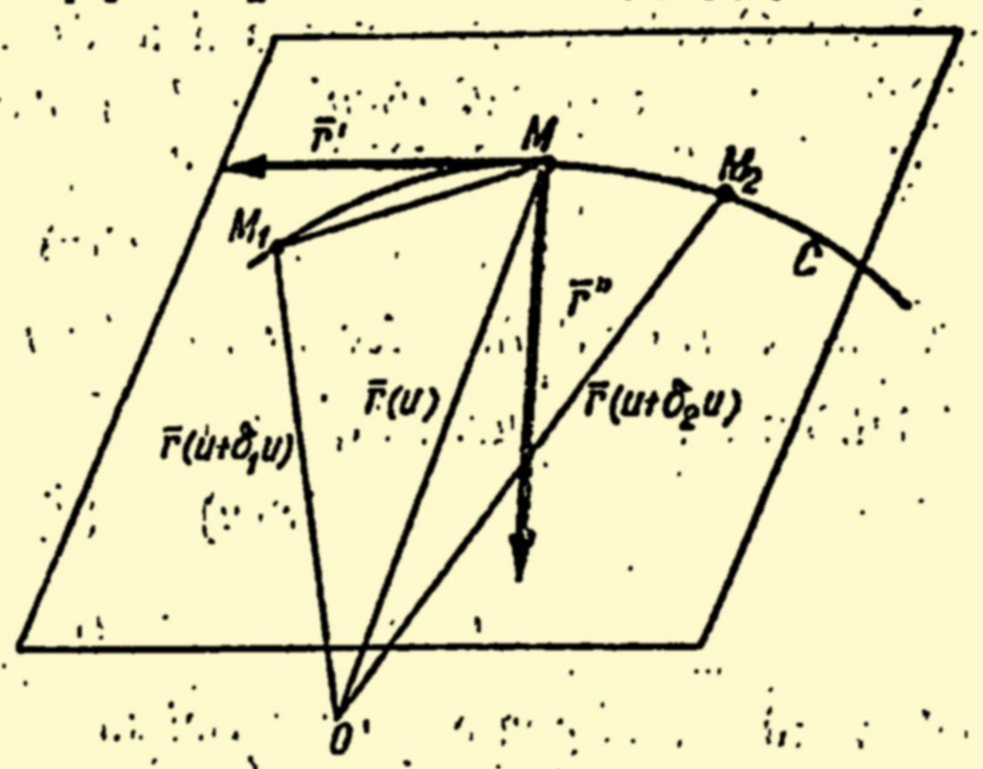


Fig. 150

$$\delta_2 u\,\overline{MM}_1 - \delta_1 u\,\overline{MM}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\delta_1 u\,\delta_2 u\,(\delta_1 u - \delta_2 u)\bar{r}'' + \cdots$$

care este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{MM}_1$ şi $\overline{MM}_2$, deci se găseşte în planul $MM_1M_2$. Dacă neglijăm termenii, începând dela al doilea, ceeace este posibil dacă $\bar{r}'' \neq 0$, vectorul considerat este proporţional cu $\bar{r}''(u)$. In rezumat, planul format de cele trei puncte $M, M_1M_2$, conţine, cu o eroare ce poate fi făcută oricât de mică, vectorii $\bar{r}'$ şi $\bar{r}''$. Făcând separat pe $M_1$ şi $M_2$ să tindă către $M$, acest plan va tinde către o poziţie limită, care este planul determinat de vectorii $\bar{r}'(u)$ şi $\bar{r}''(u)$, cu condiţia ca aceşti vectori să fie liniar independenţi.

Prin urmare: *planul osculator la o curbă $C$ într'un punct $M$ este determinat de vectorii $\bar{r}'(u)$ şi $\bar{r}''(u)$, dacă aceştia sunt liniar independenţi.*

Condiţia de dependenţă liniară

$$\bar{r}'(u) \times \bar{r}''(u) = 0 \qquad (21,VI)$$

cuprinde şi cazurile evitate în demonstraţie:

$$\bar{r}'(u) = 0; \quad \bar{r}''(u) = 0.$$

Vom arăta că: *O curbă, dealungul căreia vectorii $\bar{r}'(u)$ şi $\bar{r}''(u)$ sunt coliniari, este o dreaptă.*

In adevăr, dacă relaţia (21,VI) este îndeplinită în $M$ *şi în domeniul său*, vom avea

$$\bar{r}''(u) = \lambda(u)\bar{r}'(u),$$

unde $\lambda(u)$ este un factor de proporționalitate scalar, funcție continuă de $u$.

Relația

$$\bar{r}''-\lambda\bar{r}'=0 \tag{22,VI}$$

este un exemplu de ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul întâi în $\bar{r}$ și deci se integrează ca în § 157.

Vom avea

$$\bar{r}'=\bar{\alpha}e^{\int\lambda(u)du}$$

și apoi prin integrare vectorială:

$$r=\bar{a}\int e^{\int\lambda(u)du}du+\bar{\beta}, \tag{23,VI}$$

unde $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$ sunt vectori constanți.

Curba $C$ este în acest caz o linie dreaptă în domeniul punctului $M$.

Prin urmare: *planul osculator la o curbă $C$ este determinat de vectorii $\bar{r}'(u)$ și $\bar{r}''(u)$ în orice punct în care*

$$\bar{r}'(u)\times\bar{r}''(u)\neq 0.$$

*El este nedeterminat în orice punct al unei drepte.*

Dacă într'un anumit punct $M$, avem

$$\bar{r}'(u)\times\bar{r}''(u)=0,$$

deci

$$\bar{r}'=0 \quad \text{sau} \quad \bar{r}''=0 \quad \text{sau} \quad \bar{r}''=\lambda\bar{r}',$$

planul osculator nu poate fi determinat prin considerațiile precedente. Dacă $\bar{r}'=0$, avem un *punct staționar* (de întoarcere), iar dacă $\bar{r}''=0$ sau $\bar{r}''=\lambda\bar{r}'$, un *punct de inflexiune*[1])

*Condiția $\bar{r}''-\lambda\bar{r}'=0$ poate fi redusă la $\bar{r}''=0$, deoarece printr'o schimbare a parametrului $u$, ecuația (22,VI) poate fi redusă la forma $\bar{r}''=0$.*

In adevăr, să facem schimbarea de parametru

$$v=v(u)$$

unde $v(u)$ este o funcție continuă, împreună cu primele sale două derivate $v'(u)$ și $v''(u)$ cel puțin.

Folosind formulele de transformare:

$$\frac{d\bar{r}}{du}=\frac{d\bar{r}}{dv}\frac{dv}{du};$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{du^2}=\frac{d^2r}{dv^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{d\bar{r}}{dv}\frac{d^2v}{du^2}, \tag{24,VI}$$

ecuația (22,VI) devine

$$\bar{r}''-\lambda\bar{r}'\equiv\frac{d^2\bar{r}}{dv^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{d\bar{r}}{dv}\left[\frac{d^2v}{du^2}-\lambda(u)\frac{dv}{du}\right]=0. \tag{22'VI}$$

[1]) *Cf. G. Valiron*, Equations fonctionelles. Applications, Paris, 1945, p. 94.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă alegem funcţia scalară $v(u)$ astfel încât să verifice ecuaţia diferenţială scalară

$$\frac{d^2v}{du^2} - \lambda \frac{dv}{du} = 0, \qquad \text{(25,VI)}$$

ecuaţia (22,VI) se reduce la

$$\frac{d^2\bar{r}}{dv^2} = 0, \quad \text{dacă} \quad \frac{d\bar{v}}{du} \neq 0.$$

Ori, integrala generală a ecuaţiei (25,VI) este

$$v = a\int e^{\int \lambda(u)du} du + b; \quad (a, b = \text{constante}),$$

deci dacă luăm $a \neq 0$, vom avea $\frac{dv}{du} \neq 0$, $v \neq$ const, ecuaţia (22,VI) se reduce la $\frac{d^2\bar{r}}{dv^2} = 0$. Rezultatul obţinut nu presupune condiţia $\bar{r}'' - \lambda\bar{r}' = 0$ verificată într'un interval, ci într'un punct, cum se vede din relaţia (22',VI), deci este aplicabil unui punct de inflexiune izolat. Schimbarea de parametru făcută reduce dealtfel integrala (23,VI) la forma

$$\bar{r} = \bar{\alpha}v + \bar{\beta}.$$

Pe de altă parte, observăm că relaţia

$$\bar{r}'(u) \times \bar{r}''(u) = 0$$

este independentă de alegerea parametrului, deoarece prin schimbarea dată de formulele (24,VI) ea devine

$$\bar{r}'(v) \times \bar{r}''(v) = 0.$$

*Deci, această relaţie exprimă condiţia necesară şi suficientă ca planul osculator să fie nedeterminat dealungul unui arc de curbă, în care caz, acest arc se reduce la o dreaptă. In cazul când ea este verificată într'un punct izolat, acesta este staţionar sau de inflexiune.*

In cazul când parametrul $u$ este chiar arcul $s$, planul osculator este determinat de vectorii $\bar{r}'(s)$ şi $\bar{r}''(s)$.

*Vectorul $\bar{r}'(s)$ este perpendicular pe vectorul tangent $\bar{r}'(s)$.*
In adevăr, deoarece $\bar{r}'(s) = \bar{t}$ este un versor, vom avea:

$$\bar{t}^2 = (\bar{r}')^2 = 1; \quad \text{deci} \quad \bar{t}\frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{r}'\bar{r}'' = 0.$$

Prin urmare, vectorul

$$\bar{r}'' = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{t}}{ds}$$

este normal la curbă în punctul $M$.

O curbă considerată în spaţiul cu trei dimensiuni admite în fiecare punct ordinar $M$ o infinitate de normale formând un plan perpendicular pe tangenta în $M$, numit *plan normal*.



Scanned with OKEN Scanner

Dintre aceste normale, aceea care se găsește la intersecția planului normal cu planul osculator se numește *normală principală*. Rezultă că *vectorul* $\bar{r}''(s)$ *determină normala principală la curbă în punctul M.*

Ecuația vectorială a planului osculator se obține imediat. Dacă notăm cu $\bar{R}$ vectorul de poziție al unui punct curent al acestui plan, vom impune condiția ca el să conțină vectorii $\bar{r}'(u)$ și $\bar{r}''(u)$, scriind:

$$\left[\bar{R}-\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}''\right]=0; \quad (\bar{r}' \times \bar{r}'') \neq 0. \tag{26,VI}$$

Dacă parametrul $u$ este chiar abscisa curbilinie $s$, într'un punct ordinar vom avea condițiile

$$\bar{r}'(s) \neq 0; \quad \bar{r}'(s) \times \bar{r}''(s) \neq 0.$$

deci $\bar{r}'' \neq 0$, în care caz $\bar{r}'$ și $\bar{r}''$ sunt perpendiculari. Vom putea deci spune că *planul osculator este determinat de tangenta la curbă și normala principală.*

Ecuația carteziană a planului osculator se deduce din (26,VI) și este

$$\begin{vmatrix} X-x & x' & x'' \\ Y-y & y' & y'' \\ Z-z & z' & z'' \end{vmatrix}=0. \tag{27,VI}$$

Normala la planul osculafor se numește *binormala* la curbă în punctul *M*. Ea poate fi determinată de vectorul

$$\bar{r}' \times \bar{r}''.$$

In adevăr, punând ecuația planului osculator sub forma

$$(\bar{R}-\bar{r})(\bar{r}' \times \bar{r}'')=0,$$

se vede imediat că normala acestui plan are direcția vectorului $\bar{r}' \times \bar{r}''$.

Planul osculator, definit ca limită unui plan ce conține trei puncte vecine pe o curbă, pune deci în evidență noi elemente geometrice legate de curbă, ca normala principală și binormala.

Dacă numim *plan tangent la o curbă într'un punct M*, orice plan ce conține tangenta în *M*, vom observa că există o infinitate de plane tangente într'un punct dat, fiecare având cu curba două puncte comune confundate.

Planul osculator se distinge în această familie de plane prin proprietatea de a avea trei puncte confundate, comune cu curba în punctul *M*.

Vom spune că tangenta într'un punct — ca și planul tangent — are *un contact de ordinul întâi* cu curba, pe când planul osculator are cu curba un *contact de ordinul al doilea* în acel punct.

## § 170. Normala principală și curbura

Existența planului osculator dealungul unui arc de curbă presupune că acesta nu se reduce la o linie dreaptă, deci că trei puncte vecine nu sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

Ceeace caracterizează linia dreaptă este faptul că tangenta sa are o direcţie fixă în fiecare punct.

In adevăr, orice dreaptă poate fi pusă sub forma

$$\bar{r}(u)=\bar{r}_0+\bar{\alpha}u,$$

unde $\bar{r}_0$ şi $\bar{\alpha}$ sunt vectori constanţi, deci

$$\frac{d\bar{r}}{du}=\bar{\alpha}=\text{const.}$$

Invers, dacă $\frac{d\bar{r}}{du}=\bar{\alpha}$, atunci $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{\alpha}u$. Prin urmare, ceeace deosebeşte o curbă de o dreaptă este faptul că vectorul tangent la curbă îşi schimbă direcţia când punctul se deplasează dealungul curbei.

Pe de altă parte, dealungul unei drepte vom avea:

$$\frac{d\bar{r}}{du}=\bar{\alpha} \quad \text{şi deci} \quad \frac{d^2\bar{r}}{du^2}=0, \quad \frac{d^3\bar{r}}{du^3}=0, \ldots,$$

deci toate mărimile geometrice exprimabile prin diferenţiale de ordine superioare sunt nule, astfel încât este de aşteptat ca proprietăţile locale, ce deosebesc curbele de drepte, să se exprime tocmai prin relaţii între aceste diferenţiale.

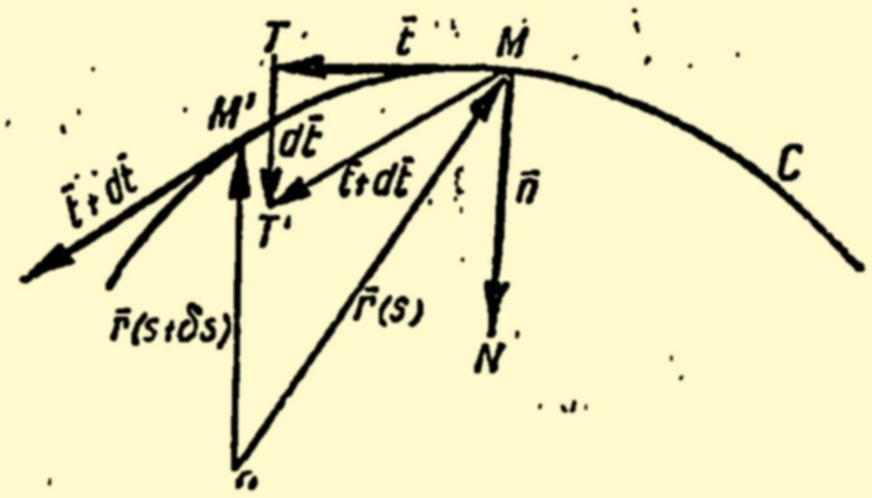



Fig. 151

Fiind dată o curbă de ecuaţie vectorială $\bar{r}=\bar{r}(s)$, să considerăm tangentele într'un punct $M$, de abscisă curbilinie $s$, şi într'un punct vecin $M'$, de abscisă $s+\delta s$.

Fie $\bar{t}(s)$, respectiv $\bar{t}(s+\delta s)$ versorii tangentelor considerate. Vom aproxima pe $\bar{t}(s+\delta s)$ prin formula:

$$\bar{t}(s+\delta s)\simeq\bar{t}(s)+\frac{\delta s}{1}\frac{d\bar{t}}{ds}=\bar{t}+d\bar{t}.$$

Eroarea făcută este de ordinul al doilea şi vectorul $\bar{t}+d\bar{t}$ nu va mai fi un versor. In adevăr

$$(\bar{t}+d\bar{t})^2=\bar{t}^2+2\bar{t}\cdot d\bar{t}+(d\bar{t})^2=1+(d\bar{t})^2=1+\left(\frac{d\bar{t}}{ds}\right)^2 ds^2,$$

deoarece $\bar{t}\cdot d\bar{t}=0$, $\bar{t}$ fiind un versor.

Pentru a studia variaţia tangentei în deplasarea din $M$ în $M'$ vom aduce prin paralelism vectorul $\bar{t}+d\bar{t}$ în punctul $M$, formând astfel triunghiul $MTT'$ (fig. 151). Acest triunghi fiind dreptunghi în $T$, deoarece $d\bar{t}$ este perpendicular pe $\bar{t}$, vectorul

$$\overline{TT'}=d\bar{t}=\frac{d\bar{t}}{ds}ds=\bar{r}''(s)\,ds$$

nu este nul, dacă $\bar{r}''(s)\neq 0$.

Vectorii $\overline{MT}$ şi $\overline{MT'}$ determină un plan, planul triunghiului $MTT'$, care conţine vectorul $\overline{TT'}$ şi deci vectorul $\overline{MN}$, dus în $M$, paralel cu $\overline{TT'}$, luând

$$\overline{MN} = \frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{r}''(s).$$

Vom numi vectorul $\frac{d\bar{t}}{ds}$ *normală principală* la curba $C$ în punctul $M$. Putem astfel găsi planul osculator cu o nouă definiţie. Vom numi *plan osculator* la o curbă într'un punct $M$ limita planului dus prin tangenta $\overline{MT}$ paralel cu tangenta într'un punct vecin $M'$.

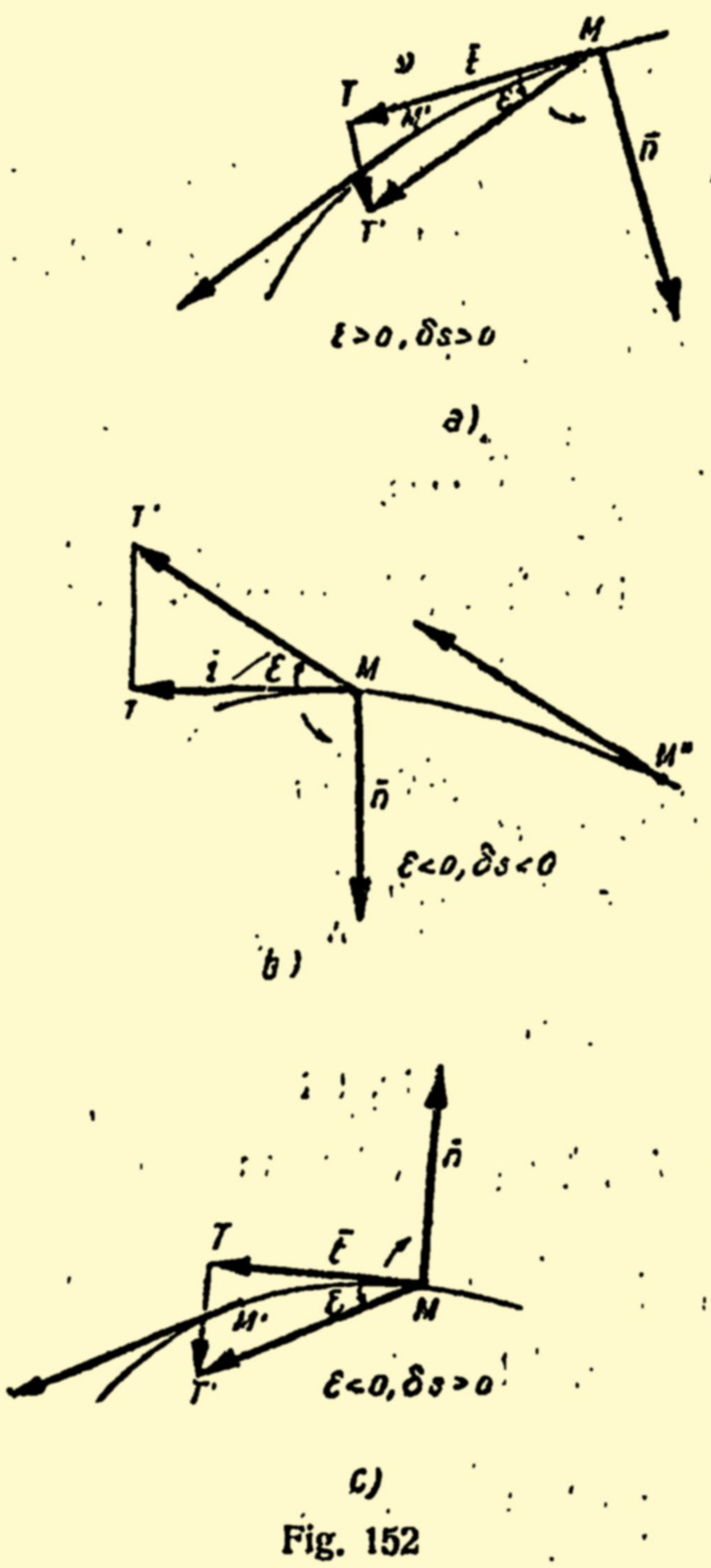


Fig. 152

*Planul osculator este determinat de vectorii $\overline{MT}$ şi $\overline{MN}$, deci de tangenta şi normala principală la curbă în punctul considerat.*

Proiectând ortogonal vecinătatea punctului $M$ pe planul osculator, obţinem un arc de curbă plană $\Gamma$, având aceeaşi tangentă ca şi curba $C$ şi ca normală, normala principală. Vom aproxima curba $C$ în vecinătatea lui $M$ prin acest arc $\Gamma$, numind *concavitate* a curbei $C$ concavitatea curbei $\Gamma$.

Vom putea stabili următoarea propoziţie :

*Normala principală $\bar{r}'' = \frac{d\bar{t}}{ds}$ este orientată spre concavitatea curbei în fiecare punct $M$, în care $\bar{r}' \times \bar{r}'' \neq 0$.*

In adevăr, dacă $\bar{r}' \times \bar{r}'' \neq 0$, planul osculator este determinat, curba $C$ poate fi proiectată pe acest plan în jurul punctului $M$ şi putem obţine arcul de curbă plană $\Gamma$. Pe de altă parte, dacă

$\bar{r}' \times \bar{r}'' \neq 0$, vom avea şi

$\bar{r}' \neq 0$, $\bar{r}'' \neq 0$

deci normala principală este un vector nenul în punctul $M$.

Să considerăm un punct $M'$ vecin cu $M$, corespunzător parametrului $\delta s$, cu $\delta s > 0$ (fig. 152,*a*). Vectorul

$$\overline{TT'} = \delta\bar{t}$$

va avea extremitatea $T'$ de aceeaşi parte a tangentei $\overline{MT}$ ca şi punctul $M'$, iar vectorul

$$\frac{\delta\bar{t}}{\delta s} = \frac{1}{\delta s}\overline{TT'}$$

va avea aceeaşi orientare ca şi $\overline{TT'}$.

Fie $M''$ un alt punct vecin cu $M$, dar corespunzând lui $\delta s<0$ (fig. 152,*b*). Vectorul

$$\overline{TT''}=\delta\bar{t}$$

va avea extremitatea $T''$ în planul osculator, situată în aşa fel încât vectorul

$$\frac{\delta\bar{t}}{\delta s}=\frac{1}{\delta s}\overline{TT''}$$

să aibă aceeaşi orientare ca în cazul precedent. Pentru aceasta este necesar ca $T''$ să fie de partea opusă lui $T'$ în raport cu tangenta $\overline{MT}$ şi deci ca $M''$ să fie faţă de această tangentă de aceeaşi parte cu $M'$.

Când toate punctele unei curbe plane $\Gamma$ din vecinătatea unui punct ordinar $M$ se găsesc de aceeaşi parte a tangentei în $M$, curba este concavă în $M$, având concavitatea de acea parte a tangentei, în care se află punctele $M'$ şi $M''$.

Pin urmare, cum vectorul $\frac{\delta\bar{t}}{\delta s}$ are extremitatea de aceeaşi parte a tangentei ca şi $M'$ şi $M''$ putem spune că, în condiţiile enunţului, curba $C$ este concavă în $M$ şi normala principală

$$\frac{d\bar{t}}{ds}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\bar{t}}{\delta s}$$

se găseşte în concavitatea curbei $C$ (conform cu convenţia făcută).

Astfel, *normala principală este determinată printr'un vector independent de reprezentarea parametrică a curbei, a cărui orientare pune în evidenţă concavitatea curbei în punctul M.*

Existenţa planului osculator şi a normalei principale este legată de aceea a triunghiului format de cele două tangente vecine $\overline{MT}$ şi $\overline{MT'}$, care trebue să aibă direcţii diferite.

Să notăm cu $\epsilon$ şi să numim *unghi de contingenţă*, unghiul format de tangentele în două puncte vecine $M$ şi $M'$ pe o curbă $C$.

Din triunghiul dreptunghi $MTT'$ deducem:

$$TT'=MT\,|\operatorname{tg}\epsilon|$$

unde

$$TT'=|d\bar{t}|,\quad MT=|\bar{t}|=1.$$

Luând $M'$ suficient de aproape de $M$, în ipoteza că tangenta variază continuu în domeniul lui $M$, vom putea face unghiul de contingenţă arbitrar-f de mic şi deci vom putea asimila $\operatorname{tg}\epsilon$ cu $\epsilon$ cu o eroare de ordinul al doilea (ig. 152,*a*).

Din relaţia găsită, vom deduce atunci:

$$|d\bar{t}|\simeq|\epsilon|.$$

*Unghiul de contingenţă este evaluat în valoare obsolută prin modulul vectorului* $d\bar{t}$, după cum arcul elementar este evaluat prin modulul vectorului $d\bar{r}$.

Vom putea astfel evalua şi modulul vectorului $\frac{d\bar{t}}{ds}=\bar{r}''(s)$, care defineşte normala principală, luând raportul

$$\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|=\lim_{\delta s\to 0}\left|\frac{d\bar{t}}{\delta s}\right|=\lim_{\delta s\to 0}\left|\frac{\epsilon}{\delta s}\right|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest raport măsoară rapiditatea cu care variază direcția tangentei, în deplasarea dintr'un punct $M$ într'un punct vecin.

Vom numi *curbură a curbei în punctul* $M$ limita raportului dintre unghiul de contingență a două tangente vecine orientate și elementul de arc orientat, cuprins între punctele de contact $M$ și $M'$, când $M'$ tinde către $M$.

Dacă notăm cu $\frac{1}{\rho(s)}$ curbura în $M$, expresia sa va fi:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\epsilon}{\delta s} \cdot \qquad (28,VI)$$

*Curbura este deci o mărime scalară.* Din definiția adoptată (28,VI) reiese că ea poate fi *pozitivă sau negativă*, deoarece atât $\delta s$ cât și $\epsilon$ sunt mărimi orientabile.

Din relațiile

$$\left|\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|\right| = \left|\bar{r}''\right| = \lim_{\delta s \to 0}\left|\frac{\epsilon}{\delta s}\right| = \left|\frac{1}{\rho}\right| \qquad (29,VI)$$

deducem că vom avea o curbură determinată în orice punct $M$, în care $\bar{r}''(s)$ este un vector finit.

Curbura este nulă în orice punct al unei drepte și în punctele unei curbe oarecare, în care $\bar{r}''=0$.

Pentru a preciza semnul curburii în fiecare punct, este necesar ca orientarea unghiului de contingență $\epsilon$ să fie făcută independent de poziția punctului $M$ pe curbă, folosind elemente determinate în fiecare punct.

Din cele expuse se vede că proprietățile locale ale curbei $C$, legate de tangentă și normala principală, pot fi deduse din proprietățile proiecției sale $\Gamma$ pe planul osculator. Spre deosebire de cazul curbelor plane, acest plan trebue considerat ca având două fețe și deci orientat printr'un bivector.

Fie $\bar{n}$ versorul normalei principale $\frac{d\bar{t}}{ds}$. Vom asocia planului osculator bivectorul $(\bar{t},\bar{n})$ format de tangenta $\bar{t}$ și normala principală $\bar{n}$, căreia îi dăm orientarea lui $\frac{d\bar{t}}{ds}$, deci spre concavitatea curbei.

*Bivectorul* $(\bar{t},\bar{n})$, *care orientează planul osculator, este la rândul său orientat prin orientarea curbei* $C$.

Fig. 152, *a* și *b* arată că vom avea în orice punct $M$, care nu este punct de inflexiune, $(\bar{r}'\times\bar{r}''\neq 0)$

$$\epsilon>0 \quad \text{dacă} \quad \delta s>0,$$
$$\epsilon<0 \quad \text{dacă} \quad \delta s<0,$$

dacă orientăm unghiul $\epsilon$ pe fața pozitivă a planului osculator, conform cu orientarea acestei fețe.

In acest caz, vom avea

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\epsilon}{\delta s} > 0$$

și vom putea enunța următorul rezultat important: *Curbura unei curbe* $C$ *într'un punct* $M$ *ordinar, pentru care*

$$\bar{r}'\times\bar{r}''\neq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

*este pozitivă dacă unghiul de contingenţă este orientat prin bivectorul* $(\bar{t},\bar{n})$ *şi independentă de orientarea curbei.*

Este uşor de văzut că, schimbând orientarea curbei, bivectorul $(\bar{t},\bar{n},)$ îşi schimbă orientarea, ceeace atrage după sine schimbarea semnului unghiului $\epsilon$. In acelaş timp însă şi $\delta s$ îşi schimbă semnul, ceeace face ca semnul curburii să rămână neschimbat.

Dacă însă alegem versorul normalei principale îndreptat înspre convexitatea curbei, curbura îşi va schimba semnul, cum se vede din fig. 152,*c*.

In aplicaţii, *curbura este considerată pozitivă, ceeace corespunde orientării versorului normalei principale spre concavitatea curbei.* Astfel, în Cinematică vectorul acceleraţie, care este derivata vectorului viteză, se găseşte în planul osculator şi este îndreptat spre concavitatea curbei.

Deaceea, *vom adopta, în general, această orientare pentru versorul normalei principale, considerând curbura pozitivă.*

Vom numi *rază de curbură* în punctul $M$ inversul $\rho$ al curburii $\frac{1}{\rho}$.

Expresia curburii în funcţie de vectorul de poziţie rezultă imediat din formula (29,VI). Vom avea:

$$\frac{1}{\rho^2}=\bar{r}''^2 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho}=\sqrt{\bar{r}''^2}, \tag{30,VI}$$

deci, în coordonate carteziene ortogonale,

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}, \tag{31,VI}$$

derivatele fiind calculate în raport cu arcul $s$.

Din formula (30, VI) se deduce că *singurele curbe care au curbura nulă în orice punct sunt dreptele.*

In adevăr, dacă

$$\frac{1}{\rho^2}=\bar{r}''^2(s)=0,$$

vom avea:

$$\bar{r}''(s)=0, \quad \text{deci} \quad \bar{r}=\bar{\alpha}s+\bar{\beta},$$

unde $\bar{\alpha}$ şi $\bar{\beta}$ sunt vectori constanţi.

## § 171. Binormala şi torsiunea

Prin orientarea planului osculator, acesta este reprezentat în vecinătatea fiecărui punct $M$, în care $r''(s)\neq 0$, printr'un bivector definit de versorii $\bar{t}$ şi $\bar{n}$. Acest bivector este reprezentat, la rândul său, printr'un vector normal din planul osculator. Deoarece $t$ şi $\bar{n}$ sunt versori ortogonali, acest vector, care are direcţia binormalei, va fi un versor, pe care îl vom nota cu $b$. Expresia lui $b$ va fi

$$\bar{b}=\bar{t}\times\bar{n}.$$

Vom orienta binormala prin acest versor $\bar{b}$, pe care îl vom numi *versorul binormalei* la curbă în $M$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest mod, în fiecare punct $M$, în care $\bar{r}''(s)\neq 0$, se pune în evidență un triedru ortogonal, pozitiv, format de versorii $\bar{t}$, $\bar{n}$ și $\bar{b}$, numit *triedrul principal* sau *triedrul lui Frenet*. Cele trei fețe ale acestui triedru sunt: planul osculator, $(\bar{t}, \bar{n})$, planul normal $(\bar{n}, \bar{b})$ și *planul rectificant* $(\bar{b}, \bar{t})$ (fig. 153).

În cazul când curba $C$ este plană, planul osculator este același în toate punctele și coincide cu planul curbei, deci binormala va avea direcția fixă a normalei la acest plan.

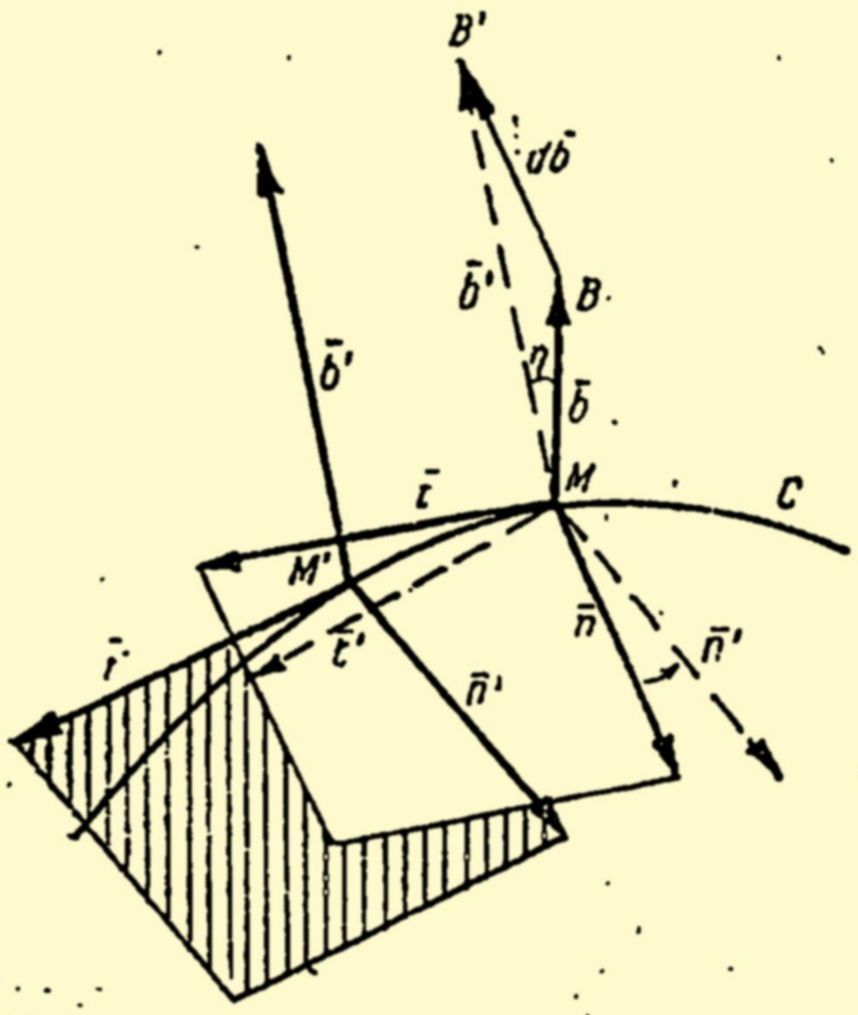



Fig. 153

În adevăr, fie $\bar{\lambda}$ vectorul normal la planul curbei. Vom avea:

$$\bar{\lambda}\cdot\bar{r}'(s)=0, \quad \text{deci} \quad \bar{\lambda}\cdot\bar{r}''(s)=0,$$

ceeace arată că normala principală se găsește în planul curbei, deci acesta coincide cu planul osculator, ceeace atrage după sine că binormala are direcția lui $\bar{\lambda}$.

Această observație ne conduce la concluzia că *ceeace deosebește curbele strâmbe de cele plane este faptul că pentru primele binormala își schimbă direcția, când punctul parcurge un arc de curbă, pe când pentru ultimele ea nu variază ca direcție.*

Variația binormalei înseamnă totodată variația planului osculator și poate fi calculată prin diferențierea relației $\bar{b}\cdot\bar{t}=0$, care exprimă ortogonalitatea versorilor $\bar{b}$ și $\bar{t}$. Vom avea astfel:

$$db\cdot\bar{t}+b\cdot d\bar{t}=db\cdot\bar{t}=0,$$

deoarece $d\bar{t}$ este perpendicular pe $\bar{b}$, având direcția lui $\bar{n}$.

Deducem deci că $d\bar{b}$ este un vector elementar, perpendicular pe $\bar{t}$.

Pe de altă parte, cum $\bar{b}$ este versor, vom avea:

$$b^2=1; \quad \bar{b}\cdot d\bar{b}=0,$$

deci $d\bar{b}$ este deasemenea perpendicular și pe $\bar{b}$. Urmează că *db va avea direcția lui* $\bar{n}$.

Considerând două puncte $M$ și $M'$ pe curbă, vectorul $d\bar{b}$ apare ca diferența $\overline{BB'}$ a vectorului $\overline{MB'}=\bar{b}'$ și $\overline{MB}=\bar{b}$, când transportăm prin paralelism din $M'$ în $M$ triedrul principal pentru a evalua variația direcțiilor muchiilor sale $\bar{t}$, $\bar{n}$ și $\bar{b}$, eroarea făcută fiind de ordinul al doilea (fig. 153).

Să notăm cu $\eta$ unghiul binormalelor $\bar{b}$ și $\bar{b}'$, corespunzând rotației locale a triedrului fundamental în deplasarea sa din $M$ în $M'$. Vom face observația că în această deplasare, planul osculator se rotește în jurul axei de rotație și, odată cu el, și normala principală $\bar{n}$. Această rotație poate fi orientată în raport cu axa sa și aceasta dă posibilitatea de a orienta și unghiul $\eta$.]

Vom considera rotaţia ca pozitivă când, privită din direcţia lui $\bar{\tau}$ rotaţia planului normal este pozitivă, deci când $\bar{n}$ se roteşte către $\bar{n}'$ şi $\bar{b}$, către $\bar{b}'$ în sens pozitiv.

Unghiul $\eta$ va fi considerat atunci ca pozitiv. In acest caz, vectorul $d\bar{b} = \overline{BB'}$ are sensul opus versorului $\bar{n}$. Dimpotrivă, pentru o rotaţie negativă, căreia îi corespunde un $\eta$ negativ, $d\bar{b}$ are sensul lui $\bar{n}$.

Pe de altă parte, din triunghiul $MBB'$, dreptunghi în $B$, deducem

$$BB' = MB\,|\operatorname{tg}\eta|,$$

de unde

$$|d\bar{b}| \simeq |\operatorname{tg}\eta| \simeq |\eta|$$

când $M'$ este suficient de vecin cu $M$.

Deducem imediat

$$\left|\frac{d\bar{b}}{ds}\right| = \lim_{\delta s \to 0}\left|\frac{\eta}{\delta s}\right|. \qquad (32,VI)$$

Vom numi *torsiunea curbei* $C$ în punctul $M$ mărimea

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{\delta s \to 0}\frac{\eta}{\delta s}, \qquad (33,VI)$$

*deci, limita raportului dintre unghiul orientat $\eta$ a două plane osculatoare în $M$ şi $M'$, vecine şi arcul orientat $\delta s$, când $M'$ tinde către $M$.*

Din discuţia făcută se vede că torsiunea $\frac{1}{\tau}$ este un scalar susceptibil de semn. Dacă schimbăm sensul lui $\bar{\tau}$, torsiunea îşi schimbă semnul, deoarece rotaţia triedrului capătă sens opus. Mai general, *torsiunea depinde de orientarea triedrului principal.*

In adevăr, semnul lui $\eta$ corespunde tocmai orientării triedrului principal.

Dacă vom considera rotaţiile ca pozitive în sensul trigonometric, dar vom schimba orientarea triedrului principal, $\eta$ îşi va schimba semnul şi, odată cu el, şi torsiunea.

*Torsiunea într'un punct $M$ al unei curbe este pozitivă, dacă rotaţia triedrului principal se vede de un observator aşezat dealungul lui $\bar{\tau}$ în sensul pozitiv şi negativă în cazul contrar, pentru o deplasare în sensul arcelor crescătoare.*

In adevăr, unei rotaţii pozitive îi corespunde un $\eta$ pozitiv. In acelaşi timp, deplasarea dela $M$ la $M'$ fiind în sensul arcelor crescătoare, vom avea $\delta s > 0$. Formula (33, VI) ne arată atunci că $\frac{1}{\tau} > 0$.

Dacă deplasarea s'ar face în sens contrar, am avea în aceleaşi condiţii o rotaţie negativă, deci $\eta < 0$, dar şi $\delta s < 0$, iar torsiunea ar avea tot semnul plus, ceeace arată că limita nu este influenţată de semnul lui $\delta s$.

Cazul rotaţiei negative, pentru $\delta s > 0$, este analog şi conduce la $\frac{1}{\tau} < 0$.

Aceste rezultate presupun triedrul principal $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ orientat pozitiv. Dacă triedrul principal ar fi orientat invers, am obţine rezultate de semne contrare.

Scanned with OKEN Scanner

Putem spune mai sugestiv că *torsiunea este pozitivă, dacă deplasarea triedrului în sensul lui $\bar{t}$ pare o înșurubare la dreapta, și negativă în caz contrar.*

Din formula (32,VI) deducem că torsiunea este nulă dealungul unui arc de curbă, dacă

$$\left|\frac{d\bar{b}}{ds}\right|=0, \quad \text{deci} \quad \frac{d\bar{b}}{ds}=0,$$

de unde deducem imediat

$$b-\bar{\alpha}=\text{const}$$

Cum, pe de altă parte, avem:

$$\bar{b}\bar{t}=b\,\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{\alpha}\,\frac{d\bar{r}}{ds}=0,$$

prin integrare obținem:

$$\bar{\alpha}\,\bar{r}=a=\text{const},$$

care reprezintă ecuația vectorială a unui plan.

Curba descrisă de punctul $M$ va fi în întregime în acest plan, a cărui normală este chiar $b=\bar{\alpha}$. Prin urmare: *Curbele a căror torsiune este nulă în fiecare punct sunt curbe plane.*

## § 172. Triedrul principal și curbura totală

Studiul proprietăților locale ale curbelor pune în evidență, odată cu versorii fundamentali $\bar{t}$, $\bar{n}$ și $\bar{b}$, triedrul ortogonal format de acești versori în punctul $M$. Deoarece toate aceste proprietăți se exprimă prin relații între $\bar{t}$, $\bar{n}$ și $\bar{b}$, este natural să raportăm spațiul în vecinătatea punctului $M$ de pe curbă la triedrul principal, astfel încât toate mărimile geometrice exprimabile în funcție de $\bar{t}$, $\bar{n}$ și $\bar{b}$ să fie raportate la acest triedru.

Când punctul $M$ se deplasează pe curbă, triedrul principal își schimbă poziția, deaceea el se mai numește și *triedrul mobil*. Pentru a compara mărimile geometrice, definite în vecinătatea unui punct $M'$, cu mărimile analoage definite în $M$, triedrul principal din $M'$ este readus prin paralelism în $M$. Din variația mărimilor geometrice, astfel comparate, rezultă relații geometrice (fig. 153).

Geometria diferențială a curbelor stabilește relații între mărimi definite în puncte vecine. Astfel, am văzut că variația tangentei este măsurată printr'un vector $d\bar{t}$, care are direcția lui $\bar{n}$, curbura este dată de limita raportului unghiului de contingență la variația arcului, etc.

Din deplasarea și orientarea triedrului principal a rezultat deasemenea torsiunea, sau *a doua curbură* a curbelor strâmbe, calculând variația binormalei. Prin analogie, putem defini o *a treia curbură*, calculând variația normalei principale. Să notăm cu $\theta$ unghiul format de normalele principale în $M$ și $M'$. Vom numi *curbură totală*, expresia:

$$\frac{1}{\varkappa}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\theta}{\delta s}. \qquad (34,VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din triunghiul dreptunghi $MNN'$, fig. 154 deducem:

$$\frac{1}{|x|} = \left|\frac{d\bar{n}}{ds}\right|.$$

Deoarece în cazul curbelor plane, atât rotaţia tangentei, cât şi a normalei principale se fac în planul curbei, iar $\theta = \epsilon$, vom atribui unghiului $\theta$ aceeaşi orientare ca şi lui $\epsilon$.

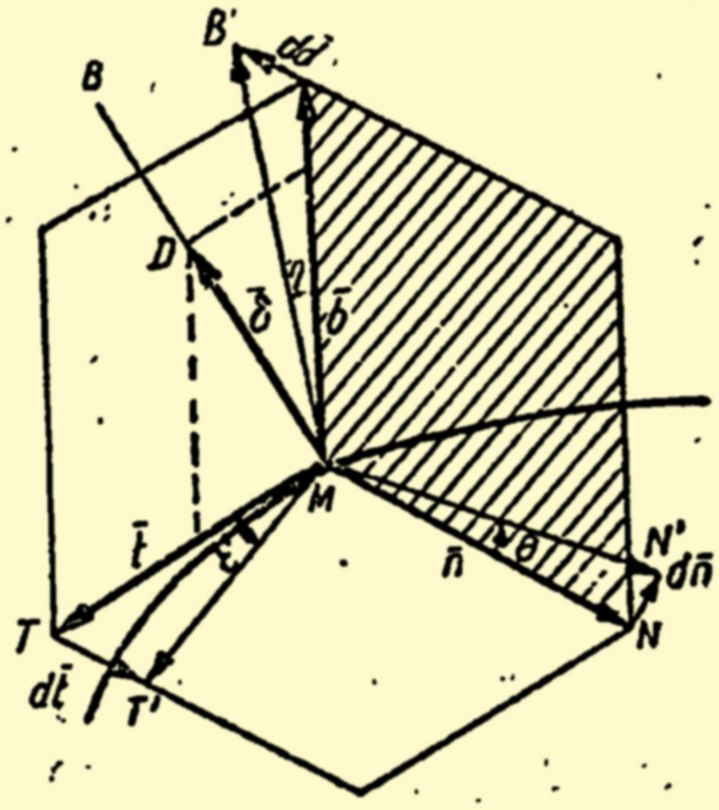



Fig. 154

Facem observaţia că prin constituirea triedrului principal, planul osculator este orientat, faţa pozitivă corespunzând celei vizibile dealungul lui $\bar{b}$, astfel încât rotaţia pozitivă a versorului $\bar{t}$, privită dealungul lui $b$, corespunde tocmai orientării normalei principale în concavitatea curbei, dacă $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ este orientat pozitiv. Astfel, triedrul principal ne permite să atribuim un semn precis celor trei curburi: *Curbura şi curbura totală sunt pozitive, dacă rotaţia triedrului principal, văzută dealungul lui $\bar{b}$, corespunde unei înşurubări la dreapta. In acest caz, normala principală trebue să fie în concavitatea curbei. Torsiunea este pozitivă, când înşurubarea în sensul lui $\bar{t}$ este deasemenea la dreapta.*

Deplasarea triedrului mobil, dealungul curbei, din punctul $M$ în punctul vecin $M'$ poate fi considerată ca fiind compusă dintr'o translaţie $\overline{MM'} = d\bar{r}$ şi o rotaţie elementară în jurul unei axe.

Reducând triedrul prin paralelism din $M'$ în $M$, această deplasare se reduce la o rotaţie elementară în jurul unei axe $\delta$, care poate fi determinată, rotaţie în care vectorii $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ suferă variaţiile $d\bar{t}, d\bar{n}, d\bar{b}$.

## § 173. Formulele lui Frenet

Calculul variaţiilor versorilor fundamentali $\bar{t}$, $\bar{n}$, şi $\bar{b}$ în deplasarea triedrului principal dintr'un punct $M$ într'un punct vecin $M'$ conduce la trei formule fundamentale pentru teoria curbelor strâmbe.

Am văzut că vectorul $d\bar{t}$, perpendicular pe $\bar{t}$, determină direcţia normalei principale $\bar{n}$.

Dacă $\delta s > 0$, $d\bar{t}$ este îndreptat spre concavitatea curbei, deci vectorul $\frac{d\bar{t}}{ds}$ va fi îndreptat în acelaşi sens. Cum, conform cu (29,VI)

$$\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right| = \left|\frac{1}{\rho}\right|,$$

vom putea scrie

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}, \qquad (35,VI)$$

deoarece pentru $\bar{n}$ îndreptat în concavitate, $\frac{1}{\rho} > 0$, iar pentru $\bar{n}$ opus, $\frac{1}{\rho} < 0$, ceeace face ca formula să fie valabilă pentru ambele orientări.

Dacă $\delta s < 0$, $d\bar{t}$ este orientat spre convexitate, dar $\frac{d\bar{t}}{ds}$ este din nou în concavitatea curbei, astfel încât formula (35,VI) rămâne valabilă în toate cazurile și reprezintă *prima formulă a lui Frenet.* Ea pune în evidență un vector $\frac{d\bar{t}}{ds}$ cu orientare precisă spre concavitatea curbei.

Vectorul $d\bar{b}$ are deasemenea direcția lui $\bar{n}$. El are sens opus lui $\bar{n}$, dacă rotația triedrului este pozitivă, văzută dealungul lui $\bar{t}$ și același sens cu $\bar{n}$, în caz contrar.

Dacă $\delta s > 0$ și $\eta > 0$, deci $\frac{1}{\tau} > 0$, vectorul $\frac{d\bar{b}}{ds}$ va avea sens opus lui $\bar{n}$. Ținând seama că modulul său este dat de (32,VI), vom scrie:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\bar{n}. \qquad (36,VI)$$

Dacă $\delta s < 0$, rotația se va face în sens opus, fiindcă înșurubarea este o retragere și vom avea $\eta < 0$, deci $\frac{1}{\tau} > 0$. Cum însă, pentru rotația negativă, $db$ are sensul lui $\bar{n}$, $\frac{d\bar{b}}{ds}$ va avea din nou sensul opus și formula (36,VI) rămâne valabilă.

Ea rămâne deasemenea valabilă și pentru torsiunea negativă, pe baza unui raționament analog, deci este generală și constitue *a treia formulă a lui Frenet.*

In sfârșit, putem deduce prin calcul expresia lui $\frac{d\bar{n}}{ds}$, folosind formulele stabilite. In adevăr, derivând în raport cu $s$ relația

$$\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t},$$

vom avea

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{d\bar{b}}{ds} \times \bar{t} + \bar{b} \times \frac{d\bar{t}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\bar{n} \times \bar{t} + b \times \frac{1}{\rho}\bar{n} = \frac{1}{\tau}\bar{b} - \frac{1}{\rho}\bar{t},$$

deci *a doua formulă a lui Frenet:*

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\bar{t} + \frac{1}{\tau}b. \qquad (37,VI)$$

Formulele:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\bar{t} + \frac{1}{\tau}b; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\bar{n}, \qquad (37',VI)$$

care exprimă variația versorilor fundamentali $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ în deplasarea triedrului principal din punctul $M$ de pe curbă într'un punct vecin $M'$, constitue la un loc *formulele lui Frenet.*

Intreaga teorie a proprietăților locale ale curbelor strâmbe este bazată pe aceste formule fundamentale, cum se va vedea din cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

## § 174. Indicatoarele sferice şi rotaţia triedrului principal

Variaţia versorilor fundamentali $\bar{t}, \bar{n}, b$ poate fi urmărită geometric construind hodografele respective, care vor fi curbe trasate pe o sferă de rază unitate şi având ca ecuaţii vectoriale

$$\bar{t}=\bar{t}(s), \quad \bar{n}=\bar{n}(s), \quad \bar{b}=\bar{b}(s).$$

Aceste curbe se numesc *indicatoare sferice*, respectiv ale tangenţei, normalei principale şi binormalei.

In fiecare punct vectorii tangenţi la aceste indicatoare vor fi perpendiculari pe vectorii de poziţie $\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)$.

Dacă, în particular, se consideră indicatoarea tangentelor ($\alpha$), aceasta se obţine ducând prin $O$ vectori $\overline{OT}$, echipolenţi cu versorii $\bar{t}=\overline{MT}$ (fig. 155)

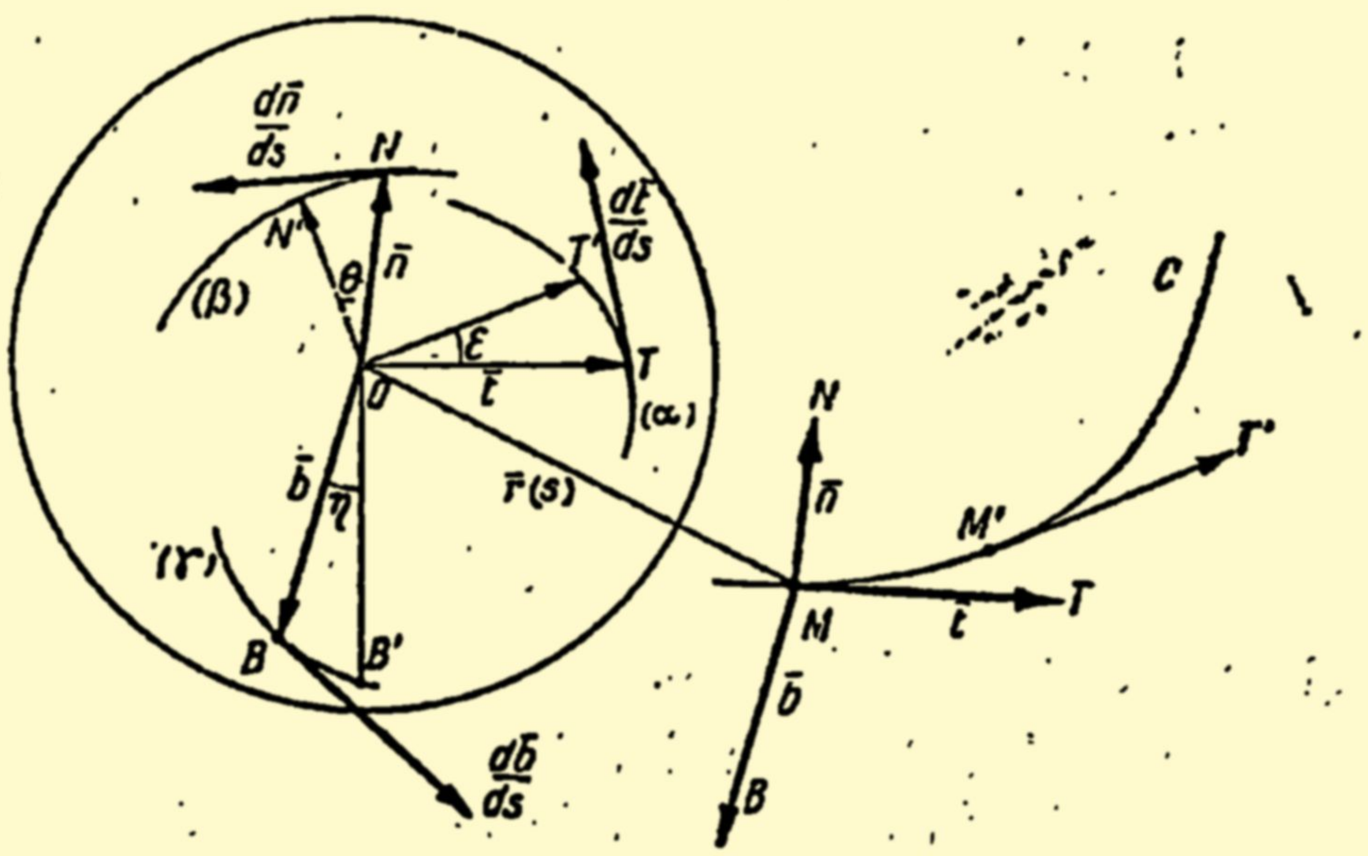



Fig. 155

Unghiului de contingenţă $\epsilon$ îi va corespunde unghiul format de $\overline{OT}$ şi $\overline{OT'}$ şi va fi măsurat prin arcul elementar $TT'$ al indicatoarei ($\alpha$), fiind asimilabil cu un arc elementar de cerc de rază unitate.

Notând cu $\sigma$ abscisa curbilinie pe curba ($\alpha$), aceasta va fi o funcţie

$$\sigma=\sigma(s).$$

Indicatoarea tangentelor poate fi orientată astfel, încât $\sigma$ să crească odată cu $s$, sau în sens invers. Dacă punem deci

$$\epsilon=\delta\sigma,$$

curbura va fi definită prin formula

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\epsilon}{\delta s}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\sigma}{\delta s}=\frac{d\sigma}{ds}, \tag{38,VI}$$

deci ca *limita raportului arcelor elementare orientate ale curbei şi indicatoarei tangentelor*, când $M'$ tinde către $M$. Se vede că *ea va fi pozitivă pentru prima orientare şi negativă pentru a doua.*

Pe de altă parte, versorul tangentei indicatoarei ($\alpha$) este $\frac{d\bar{t}}{d\sigma}$, astfel încât putem scrie:

$$\frac{d\bar{t}}{ds}=\frac{d\bar{t}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{\rho}\bar{n}, \tag{39,VI}$$

întrucât $\frac{d\bar{t}}{d\sigma}$ are direcţia lui $d\bar{t}$ şi deci a normalei principale.

Scanned with OKEN Scanner

Ori, vectorul $\frac{d\bar{t}}{ds}$ este îndreptat spre concavitatea curbei $C$. Dacă şi $\bar{n}$ are aceeaşi orientare, va trebui ca $\frac{1}{\rho} > 0$ şi reciproc. Prin urmare: formula (39,VI) care este prima formulă a lui Frenet se poate deduce cu ajutorul indicatoarei tangentelor.

*Dacă indicatoarea este orientată în acelaşi sens ca şi curba, versorul normalei principale va fi în concavitatea curbei şi curbura va fi pozitivă. Pentru o orientare inversă, $\bar{n}$ îşi schimbă sensul, iar $\frac{1}{\rho}$ semnul.*

Vectorul $\overline{ON}=\bar{n}$ va descrie la rândul său o curbă sferică ($\beta$), indicatoarea normalei principale. Se vede că prin orientarea indicatoarei ($\alpha$) poate fi orientată şi ($\beta$), luând ca sens de circulaţie sensul indicat de $\frac{d\bar{t}}{d\sigma}=\bar{n}$, care este sensul arcelor crescătoare $\sigma$ pe ($\alpha$). Astfel ($\alpha$) şi ($\beta$) sunt orientate în acelaşi sens. Notând cu $\sigma_1$ abscisa curbilinie pe ($\beta$), unghiul $\theta$, format de două normale vecine, va fi măsurat prin

$$\theta=\delta\sigma.$$

Curbura totală va fi definită prin

$$\frac{1}{\varkappa}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\theta}{\delta s}=\frac{d\sigma_1}{ds}$$

şi va avea semnul curburii.

Vectorul $\overline{OB}=\bar{b}$ va descrie *indicatoarea binormalei* ($\Gamma$).

Notând cu $\sigma_2$ abscisa curbilinie pe ($\Gamma$), unghiul a două binormale vecine va fi măsurat prin

$$\eta=\delta\sigma_2.$$

Dacă înşurubarea este la dreapta, când triedrul înaintează în sensul lui $\bar{t}$ deci al arcelor $s$ crescătoare, vom orienta pe ($\Gamma$) ca şi pe $C$, iar în caz contrar îi vom da o orientare negativă.

Astfel vom defini torsiunea prin

$$\frac{1}{\tau}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\eta}{\delta s}=\frac{d\sigma_2}{ds},$$

deci vom avea torsiuni pozitive în primul caz şi negative în al doilea.

Cum vectorul $d\bar{b}$ are direcţia lui $\bar{n}$ şi sens opus pentru o înşurubare la dreapta, vom scrie

$$\frac{d\bar{b}}{ds}=\frac{d\bar{b}}{d\sigma_2}\frac{d\sigma_2}{ds}=-\frac{1}{\tau}\bar{n},$$

formulă care este valabilă în toate cazurile, cum rezultă din discuţia făcută anterior şi reprezintă a treia formulă a lui Frenet.

Se poate regăsi şi proprietatea că, atât curbura, cât şi torsiunea nu depind de orientarea curbei $C$, ci de orientarea triedrului principal.

A doua formulă a lui Frenet obţinându-se prin calcul, putem spune că indicatoarele sferice ne conduc la aceleaşi rezultate ca şi studiul direct al deplasării elementare a triedrului principal.

Scanned with OKEN Scanner

## § 175. Semnificaţia cinematică a formulelor lui Frenet.

Introducerea indicatoarelor sferice permite considerarea familiei tuturor triedrelor principale, deduse din deplasarea dealungul unui arc de curbă, ca o succesiune de poziţii ale unui aceluiaşi triedru ortogonal, care are vârful fix. Porţiunea de spaţiu vecină punctului $M$ de pe curbă şi solidar legată de triedrul principal poate fi considerată ca un corp solid, care se mişcă păstrând un punct fix $O$.

Presupunând că mişcarea se face astfel, încât $s=t$, un punct oarecare $P$ va avea la momentul $s$ viteza

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds}=\bar{v}, \quad \text{unde} \quad \bar{\lambda}=\overline{OP}.$$

Raportând la triedrul principal, corespunzător momentului $s$, vom obţine componentele vitezei $\bar{v}$ în deplasarea elementară a triedrului în intervalul de timp $s$, $s+\delta s$, care este o rotaţie elementară în jurul unei axe ce trece prin 0.

Se ştie (§ 44) că viteza liniară într'o rotaţie este dată de expresia

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r},$$

unde $\bar{\omega}$ este un vector situat pe axa de rotaţie, iar $\omega$ este viteza unghiulară.

In cazul rotaţiei triedrului principal, vom nota cu $\bar{\delta}$ vectorul rotaţie şi-l vom numi *vectorul lui Darboux*. Fie

$$\bar{\delta}=a_1\bar{t}+a_2\bar{n}+a_3\bar{b},$$

raportat la triedrul principal. Pentru un punct oarecare $P$ de vector de poziţie

$$\bar{\lambda}=\lambda_1\bar{t}+\lambda_2\bar{n}+\lambda_3\bar{b},$$

vom avea

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds}=\bar{v}=\bar{\delta}\times\bar{\lambda}=\begin{vmatrix}\bar{t} & \bar{n} & \bar{b}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{vmatrix}.$$

In cazul particular, când considerăm vitezele extremităţilor vectorilor fundamentali $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, vom avea

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{ds}&=\bar{\delta}\times\bar{t}=a_3\bar{n}-a_2\bar{b};\\ \frac{d\bar{n}}{ds}&=\bar{\delta}\times\bar{n}=a_1\bar{b}-a_3\bar{t};\\ \frac{d\bar{b}}{ds}&=\bar{\delta}\times\bar{b}=a_2\bar{t}-a_1\bar{n}.\end{aligned} \qquad (40,\text{VI})$$

Pentru determinarea vectorului lui Darboux, deci a componentelor $a_1, a_2, a_3$, observăm că înmulţind scalar cu $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ ambii membri ai ecuaţiilor (40,VI), obţinem

$$\begin{aligned}a_3&=\bar{n}\frac{d\bar{t}}{ds}=-\bar{t}\,\frac{d\bar{n}}{ds};\\ a_1&=\bar{b}\frac{d\bar{n}}{ds}=-\bar{n}\,\frac{d\bar{b}}{ds};\\ a_2&=\bar{t}\frac{d\bar{b}}{ds}=-\bar{b}\,\frac{d\bar{t}}{ds}.\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\bar{t}$ şi $\frac{d\bar{t}}{ds}$ definesc planul osculator, iar $b$ este perpendicular pe planul osculator, vom avea:

$$a_2 = -b\,\frac{d\bar{t}}{ds} = 0.$$

iar vectorul lui Darboux se reduce la

$$\bar{\delta} = a_1\bar{t} + a_3\bar{b}$$

fiind deci situat în planul rectificant.

Ecuaţiile (40,VI) reducându-se la forma

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = a_3\bar{n}\,; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -a_1\bar{n}\,; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = a_1\bar{b} - a_3\bar{t},$$

se vede că *rotaţiile lui $\bar{t}$ şi $\bar{b}$ sunt normale la planul rectificant*, deoarece vitezele respective au direcţia lui $\bar{n}$.

Vom avea atunci

$$a_3 = \bar{n}\,\frac{d\bar{t}}{ds} = \pm\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|,$$

după cum $\bar{n}$ are direcţia lui $\frac{d\bar{t}}{ds}$ sau direcţia opusă, deci după cum $\bar{n}$ este în concavitatea sau în convexitatea curbei.

Ţinând seama de definiţia curburii, vom scrie deci

$$a_3 = \frac{1}{\rho}\,.$$

Deasemenea

$$a_1 = -\bar{n}\,\frac{d\bar{b}}{ds} = \mp\left|\frac{d\bar{b}}{ds}\right|,$$

după cum $\bar{n}$ şi $\frac{d\bar{b}}{ds}$ au aceeaşi orientare sau orientarea contrară. Ţinând seama de definiţia torsiunii, aceasta va fi negativă în primul caz şi pozitivă în al doilea, deci vom lua

$$a_1 = \frac{1}{\tau}\,.$$

Formulele (40, VI) devin deci

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\bar{n}\,; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\,\bar{t} + \frac{1}{\tau}\,\bar{b}\,; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\,\bar{n} \qquad (41,\text{VI})$$

şi *reprezintă formulele lui Frenet.*

Vectorul lui Darboux are expresia

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\tau}\,\bar{t} + \frac{1}{\rho}\,b, \qquad (42,\text{VI})$$

deci putem enunţa următorul rezultat: *Rotaţia elementară a triedrului principal se face în jurul unei axe conţinută în planul rectificant, vectorul de rotaţie $\bar{\delta}$ având drept componente: torsiunea pe $\bar{t}$ şi curbura pe $\bar{b}$.*

*Formulele lui Frenet exprimă vitezele liniare ale vectorilor fundamentali $t$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, raportate chiar la triedrul principal, timpul fiind egal cu arcul $s$.*

Scanned with OKEN Scanner

Din a doua formulă a lui Frenet se deduce imediat expresia curburii totale $\frac{1}{\varkappa}$, ridicând-o la pătrat scalar. Vom avea,

$$\left(\frac{d\bar{n}}{ds}\right)^2 = \left|\frac{d\bar{n}}{ds}\right|^2 = \frac{1}{\varkappa^2} = \left(-\frac{1}{\rho}\bar{l} + \frac{1}{\tau}\bar{b}\right)^2,$$

de unde

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}. \qquad (43,VI)$$

Se vede că această *curbură totală* se exprimă prin curbură și torsiune, deci nu constitue un element geometric independent. In același timp, calculând modulul vectorului lui Darboux din formula (42,VI), vom avea:

$$\delta^2 = \left(\frac{1}{\tau}\bar{l} + \frac{1}{\rho}\bar{b}\right)^2 = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\varkappa^2}.$$

Astfel: *Valoarea absolută a curburii totale este egală cu modulul vectorului lui Darboux, deci reprezintă viteza unghiulară în rotația locală a triedrului principal.*

## § 176. Expresiile curburii și torsiunii

Formulele lui Frenet permit determinarea valorilor curburii și torsiunii în funcție de derivatele vectorului de poziție, atât în cazul când parametrul pe curbă este $s$, cât și pentru altă reprezentare parametrică.

In cazul parametrului $s$, curbura este dată de formula (30,VI)

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\bar{r}''^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \qquad (30,VI)$$

semnul în fața radicalului fiind determinat prin orientarea lui $\bar{n}$.

Torsiunea se obține din a treia formulă a lui Frenet (41,VI) înmulțind scalar în ambii membri cu $\bar{n}$:

$$\frac{1}{\tau} = -\bar{n}\frac{d\bar{b}}{ds}.$$

Din prima formulă a lui Frenet deducem expresia foarte utilă în aplicații a lui $\bar{n}$ în funcție de $\bar{r}(s)$

$$\bar{n} = \rho\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \rho\bar{r}''. \qquad (44,VI)$$

Cum pe de altă parte

$$\bar{b} = \bar{l}\times\bar{n} = \rho(\bar{r}'\times\bar{r}''),$$

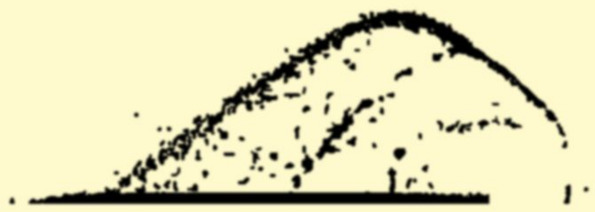
vom avea și

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \rho'(\bar{r}'\times\bar{r}'') + \rho(\bar{r}'\times\bar{r}'''),$$

astfel încât

$$\frac{1}{\tau} = -\rho\bar{r}''[\rho'(\bar{r}'\times\bar{r}'') + \rho(\bar{r}'\times\bar{r}''')] = -\rho^2\bar{r}''(\bar{r}'\times\bar{r}''').$$





Scanned with OKEN Scanner

Permutând factorii $\bar{r}'$ și $\bar{r}''$ în produsul mixt, avem expresia torsiunii

$$\frac{1}{\tau} = \rho^2 \bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''' = \frac{\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''}{\bar{r}''^2}. \qquad (45,VI)$$

Raportând vectorul de poziție $\bar{r}(s)$ la un triedru ortogonal $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, obținem expresia carteziană a torsiunii

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2+y''^2+z''^2}, \qquad (46,VI)$$

Trebue să observăm că *spre deosebire de curbură, torsiunea se exprimă rațional prin derivatele vectorului de poziție,* semnul său provenind, nu dintr'o alegere între două posibilități de orientare, ci din însăși orientarea spațiului.

Cum în aplicațiile cele mai frecvente curbele sunt reprezentate în funcție de alți parametri decât arcul, este necesar să regăsim expresiile curburii și torsiunii, pentru un parametru oarecare $u$. Este drept că majoritatea formulelor sunt mai simple, când se utilizează arcul $s$ ca parametru, dar cum trecerea dela un alt parametru $u$ la $s$ necesită determinarea efectivă a funcției $s=s(u)$, deci calculul integralei (9,VI), este preferabil ca în aplicații să se folosească formulele generale, iar în desvoltările teoretice, cele în care parametrul este abscisa curbilinie $s$.

Vom calcula derivatele succesive ale lui $\bar{r}(u)$, presupunând că știm să facem trecerea dela $u$ la $s$ și punând

$$\frac{ds}{du} = w(u) \neq 0.$$

Vom avea

$$\frac{d\bar{r}}{du} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{du} = w\bar{t},$$

de unde

$$\bar{t} = \frac{1}{w}\frac{d\bar{r}}{du} = \frac{\dot{\bar{r}}}{w},$$

convenind să notăm pentru ușurință prin punct derivatele în raport cu $u$.

Continuând calculul, vom scrie, folosind formulele lui Frenet,

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{du^2} = \frac{d}{du}(w\bar{t}) = \dot{w}\bar{t} + w\frac{d\bar{t}}{ds}\frac{ds}{du} = \dot{w}\bar{t} + \frac{w^2}{\rho}\bar{n}. \qquad (47,VI)$$

În membrul al doilea a apărut curbura. Pentru a o putea izola, vom înmulți *vectorial* în ambii membri cu $\bar{t}$, a cărui expresie este cunoscută în funcție de $\dot{\bar{r}}$. Vom avea astfel:

$$\bar{t} \times \ddot{\bar{r}} = \frac{1}{w}(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}) = \frac{w^2}{\rho}(\bar{t} \times \bar{n}) = \frac{w^2}{\rho}\bar{b},$$

de unde

$$\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}} = \frac{w^3}{\rho}\bar{b}. \qquad (48,VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ridicând apoi la pătrat scalar ambii membri, vom avea

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{w^6}(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})^2. \qquad (49,VI)$$

Insă

$$w^2 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{ds^2}{du^2} = \left(\frac{d\bar{r}}{du}\right)^2 = (\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}}).$$

Curbura va fi dată deci de expresia

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})^2}{(\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}})^3} \qquad (50,VI)$$

Pentru calculul torsiunii vom calcula derivata $\dddot{\bar{r}}$, folosind expresia (47,VI) a lui $\ddot{\bar{r}}$ şi vom obţine

$$\dddot{\bar{r}} = \ddot{w}\bar{t} + \frac{w\dot{w}}{\rho}\bar{n} + \frac{2w\dot{w}}{\rho}\bar{n} - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}w^3\bar{n} + \frac{w^3}{\rho}\left[-\frac{1}{\rho}\bar{t} + \frac{1}{\tau}\bar{b}\right].$$

Torsiunea apărând sub forma de coeficient al lui $\bar{b}$, dacă înmulţim scalar cu $\dddot{\bar{r}}$ ambii membri ai relaţiei (48,VI) obţinem imediat

$$\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}} = \frac{\dot{w}^6}{\rho^2\tau},$$

de unde, ţinând seama de (49,VI) deducem

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}}}{(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})^2}. \qquad (51,VI)$$

Când parametrul este oarecare, expresiile carteziene ale curburii şi torsiunii se obţin uşor, deoarece avem:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{i}\frac{dx}{du} + \bar{j}\frac{dy}{du} + \bar{k}\frac{dz}{du} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z};$$

$$\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

$$\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix};$$

$$(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})^2 = (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2.$$

Notând cu $A$, $B$, $C$ expresiile

$$A = \dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}; \quad B = \dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}; \quad C = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x},$$

Scanned with OKEN Scanner

din (50,VI) și (51,VI) deducem

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{A^2+B^2+C^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3};$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2}. \qquad (52,VI)$$

Pentru a reveni la cazul parametrului $s$, este suficient să observăm că dacă $s=u$, vom avea

$$(\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}})^2 = \dot{r}^2\ddot{r}^2 - (\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}})^2 = \ddot{r}^2 = \ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2,$$

deoarece

$$\dot{\bar{r}}^2 = \left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)^2 = 1 \quad \text{și} \quad \dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}} = 0.$$

## § 177. Formulele lui Frenet pentru curbe plane

Curbele plane fiind caracterizate prin torsiunea nulă, formulele lui Frenet se reduc la

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\bar{t}; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = 0; \quad \frac{1}{\tau} = 0. \qquad (53,VI)$$

Dacă raportăm curba $C$ la un sistem de referință ortogonal în planul său, ecuațiile parametrice ale curbei vor fi (fig. 156):

$$x = x(s); \quad y = y(s);$$
$$\bar{r} = \bar{r}(s) = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

Dacă notăm cu $\alpha(s)$ unghiul făcut de $\bar{t}$ cu $Ox$, după ce curba a fost orientată, vom putea pune

$$x'(s) = \cos\alpha(s); \quad y'(s) = \sin\alpha(s);$$
$$\bar{t} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha.$$

Normala principală, fiind perpendiculară pe $\bar{t}$, se obține printr'o rotație a lui $\bar{t}$ de amplitudine $\frac{\pi}{2}$ într'un sens sau în celălalt, deci *poate fi orientată independent de concavitatea curbei, de exemplu printr'o rotație pozitivă* și se reduce la normala la curbă.

Deoarece $\bar{n} = \rho\bar{r}''$, componentele lui $\bar{n}$ vor fi

$$\rho x'' = \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right); \quad \rho y'' = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

deci vom avea

$$\rho x'' = -\sin\alpha = -y'; \quad \rho y'' = \cos\alpha = x'. \qquad (54,VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds},$$

curbura va fi pozitivă, dacă $\alpha$ creşte odată cu $s$, deci dacă $\alpha(s)$ este o funcţie crescătoare. Se vede că acest caz corespunde deasemenea unui $\bar{n}$ îndreptat spre concavitatea curbei.

Schimbând orientarea curbei, $\alpha$ se schimbă în $\alpha + \pi$ şi când $s$ creşte, $\alpha + \pi$ va descreşte ca şi $\alpha$. Vom avea deci $d\alpha < 0$ cu $ds > 0$ şi curbura îşi va schimba semnul.

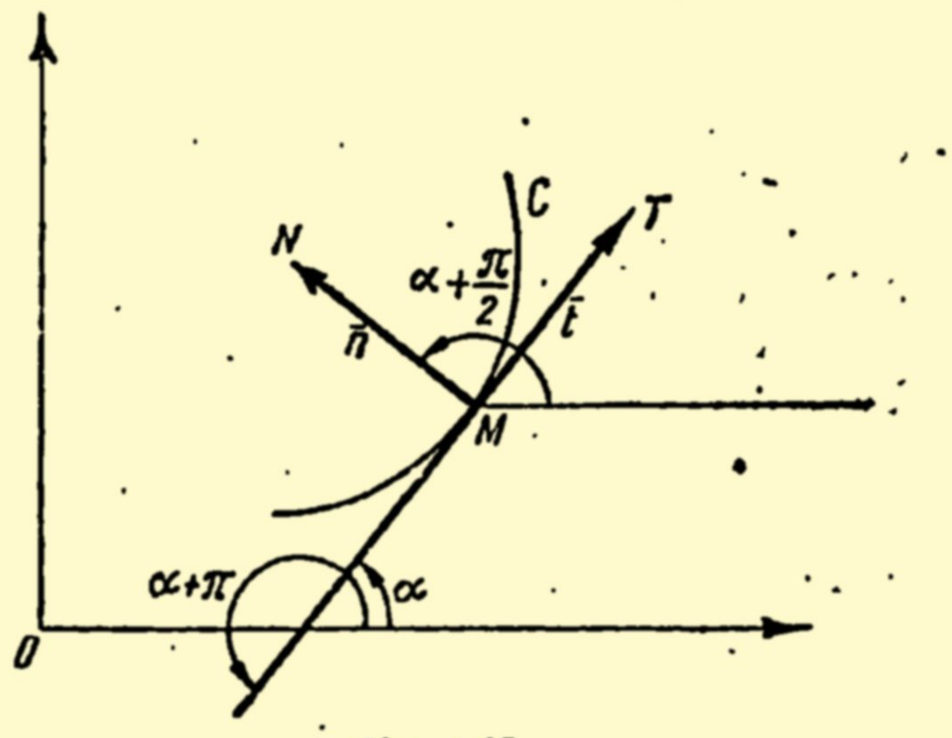


Fig. 156

S'ar părea că am ajuns la o *contradicţie*: curbura depinde de orientarea curbei. In realitate, orientarea normalei principale fiind făcută independent de concavitatea curbei, prin schimbarea orientării tangentei, ea îşi schimbă deasemenea sensul, astfel încât curbura trebue să-şi schimbe semnul.

Formulele (54,VI) obţinute direct, înlocuesc formulele lui Frenet pentru curbele plane. Ele se pot deduce dealtfel din (53,VI). Expresia curburii se obţine calculând derivatele secunde

$$x'' = -\sin\alpha \frac{d\alpha}{ds}; \qquad y'' = \cos\alpha \frac{d\alpha}{ds}$$

şi comparând cu (54,VI).

**Exemplu.** *Cazul cercului.* Ecuaţia vectorială fiind

$$\bar{r} = \bar{i} r\cos\theta + \bar{j} r\sin\theta,$$

dacă luăm ca origine a arcelor punctul de intersecţie al semiaxei pozitive $Ox$ cu cercul şi orientarea în sensul trigonometric, vom avea

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = r^2 d\theta^2; \quad ds = r d\theta; \quad s = r\theta,$$

iar pentru orientarea opusă

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = r^2 d\theta^2; \quad ds = -r d\theta; \quad s = -r\theta.$$

Ecuaţiile parametrice în funcţie de $s$ vor fi

$$x = r\cos\left(\pm\frac{s}{r}\right); \quad y = r\sin\left(\pm\frac{s}{r}\right),$$

de unde

$$x'(s) = \mp\sin\left(\pm\frac{s}{r}\right); \quad y'(s) = \pm\cos\left(\pm\frac{s}{r}\right);$$

$$x'' = \mp\frac{1}{r}\cos\left(\pm\frac{s}{r}\right) = \mp\frac{1}{r}y'; \quad y'' = \mp\frac{1}{r}\sin\left(\pm\frac{s}{r}\right) = \pm\frac{1}{r}x'.$$

Introducând aceste valori în (54,VI), deducem

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{1}{r},$$

după cum alegem prima sau a doua orientare.

In ambele cazuri vom avea

$$\rho x'' = -y'; \qquad \rho y'' = x',$$

astfel încât, cu prima orientare, normala

$$\bar{n} = \rho \bar{r}'' = -\bar{i}y' + \bar{j}x'$$

este interioară cercului, pe când cu a doua orientare, este exterioară.

Expresia curburii unei curbe plane raportată la un sistem de referință ortogonal din planul său se obține punând $z=0$ în formula (31,VI) când parametrul este $s$, sau în formula (52,VI) când parametrul este oarecare. Vom avea

$$\frac{1}{\rho^2} = x''^2 + y''^2, \quad \text{deci} \quad \frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

în primul caz și

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}, \quad \text{deci} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

semnul fiind precizat de fiecare dată prin orientarea normalei.

Condiția necesară și suficientă, ca o curbă să fie plană, este ca torsiunea să fie nulă în fiecare punct, deci

$$[\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}}] = \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix} = 0. \qquad (55,VI)$$

Planele osculatoare la o curbă strâmbă, în punctele pentru care

$$\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}} = 0,$$

se numesc *staționare.*

*O curbă plană este deci o curbă ale cărei plane osculatoare sunt staționare în fiecare punct.*

## § 178. Ecuațiile canonice ale unei curbe

Proprietățile locale ale curbelor se exprimă prin relații între derivatele succesive ale vectorului de poziție, cu ajutorul cărora se calculează diferitele mărimi geometrice, care intervin în aceste relații.

Formulele lui Frenet permit reprezentarea acestor derivate vectoriale în funcție de cei trei vectori fundamentali $\bar{i}$, $\bar{n}$ și $b$, astfel încât ele sunt raportate în mod natural la triedrul mobil în fiecare punct al curbei.

Suntem deci conduși să constatăm că, *deși definiția analitică a unei curbe implică folosirea unui anumit triedru de referință, proprietățile geometrice*

Scanned with OKEN Scanner

*locale pun în evidență un alt sistem de referință local și variabil cu punctul de pe curbă.* Putem face dealtfel observația că definiția cinematică a curbelor, ca loc al extremității unui vector de poziție, variabil în funcție de un parametru, evită folosirea explicită a triedrului fix $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ și conduce direct la adoptarea triedrului mobil ca triedru de referință local.

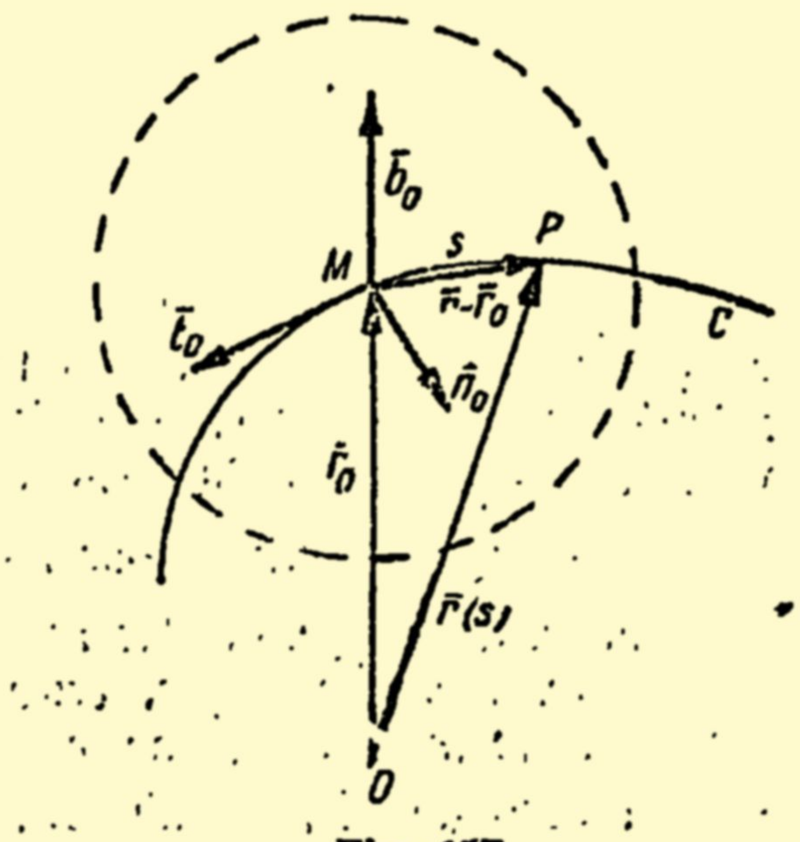


Fig. 157

La acest triedru vom raporta vectorul de poziție al unui punct oarecare $P$ situat pe curbă, suficient de aproape de un punct dat $M$ (fig. 157). Considerând originea arcelor chiar în $M$, vom putea scrie ecuația vectorială a curbei în domeniul acestui punct sub forma

$$\bar{r}=\overline{OP}=\bar{r}(s).$$

Presupunând că $\bar{r}(s)$ admite un număr $p\geq 3$ de derivate continue pentru $|s|$ suficient de mic, vom putea folosi formula lui Mac-Laurin pentru desvoltarea lui $\bar{r}(s)$, scriind

$$\bar{r}(s)=\bar{r}(0)+\frac{s}{1}\bar{r}'(0)+\frac{s^2}{2!}\bar{r}''(0)+\frac{s^3}{3!}(\bar{r}'''(0)+\bar{\epsilon})$$

putând prelungi desvoltarea, dacă $p>3$. In cazul când $\bar{r}(s)$ este un vector analitic în jurul lui $s=0$, suma devine o serie uniform convergentă.

Vom nota pentru simplificare cu indicele zero mărimile calculate în punctul $s=0$, deci în $M$. Formulele lui Frenet ne permit să exprimăm derivatele succesive astfel:

$$\bar{r}'(0)=\bar{r}_0'=\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)_0=\bar{t}_0;$$

$$\bar{r}''(0)=\bar{r}_0''=\left(\frac{d\bar{t}}{ds}\right)_0=\frac{1}{\rho_0}\bar{n}_0;$$

$$\bar{r}_0'''(0)=\bar{r}_0'''=\left(\frac{d\bar{r}''}{ds}\right)_0=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\bar{n}\right)_0=-\frac{\rho_0'}{\rho_0^2}\bar{n}_0+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\bar{n}}{ds}\right)_0=\frac{\rho_0'}{\rho_0^2}\bar{n}_0-\frac{1}{\rho_0^2}\bar{t}_0+\frac{1}{\rho_0\tau_0}\bar{b}_0.$$

Desvoltarea lui $\bar{r}(s)$ devine

$$\bar{r}(s)=\bar{r}_0+\frac{s}{1}\bar{t}_0+\frac{s^2}{2\rho_0}\bar{n}_0+\frac{s^3}{6}\left[-\frac{1}{\rho_0^2}\bar{t}_0-\frac{\rho_0'}{\rho_0^2}\bar{n}_0+\frac{1}{\rho_0\tau_0}\bar{b}_0\right]+\cdots \qquad (56,VI)$$

Vectorul $\overline{MP}=\bar{r}(s)-\bar{r}_0$ poate fi raportat la triedrul principal $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ și avem:

$$\bar{r}-\bar{r}_0=\left(s-\frac{s^3}{6\rho_0^2}+\cdots\right)\bar{t}_0+\left(\frac{s^2}{2\rho_0}-\frac{\rho_0's^3}{6\rho_0^2}+\cdots\right)\bar{n}_0+\left(\frac{s^3}{6\rho_0\tau_0}+\cdots\right)\bar{b}_0.$$

Dacă alegem punctul de reper $O$ chiar în $M$, componentele vectorului de poziție $\overline{MP}$ pe direcțiile $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ vor fi:

Scanned with OKEN Scanner

$$x = s - \frac{1}{6\rho_0^2} s^3 + \dots$$

$$y = \frac{1}{2\rho_0} s^2 - \frac{\rho_0'}{6\rho_0^2} s^3 + \dots \qquad (57,VI)$$

$$z = \frac{1}{6\rho_0\tau_0} s^3 + \dots$$

Am obținut astfel o reprezentare parametrică a curbei, valabilă pe un arc, care conține punctul $M$, parametrul fiind abscisa curbilinie $s$, iar *coeficienții exprimându-se exclusiv în funcție de curbura și torsiunea curbei în $M$*, cu excepția vectorului $\bar{\epsilon}$ ce apare în termenul rest, fără a fi evaluat.

Această reprezentare parametrică constitue *ecuațiile canonice* ale curbei $C$.

Ele arată că *fiind dat triedrul principal $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$, curba este determinată cu o aproximație, care crește cu numărul termenilor, când $s$ este suficient de mic, dacă se cunoaște curbura și torsiunea în funcție de $s$.*

In vecinătatea punctului $M$, deci pentru $s$ destul de mic, coordonatele $y$ și $z$ sunt neglijabile față de $x$, ceeace înseamnă că *arcul de curbă poate fi asimiliat, când $s \to 0$, cu vectorul tangent elementar.*

In același timp

$$y \simeq \frac{1}{2\rho_0} s^2$$

are semnul lui $\rho_0$, deci *curba rămâne atât pentru $s>0$, cât și pentru $s<0$ de aceeași parte a planului rectificant.* Dacă $\rho_0>0$, vom avea $y>0$, deci normala principală va fi în concavitatea curbei. Dacă $\rho_0<0$, ea va fi în convexitate.

Fiindcă $z$ începe cu un termen de ordinul al treilea, în vecinătatea lui $M$ vom putea neglija pe $z$ în fața lui $x$ și $y$, astfel încât *curba va putea fi asimilată cu o curbă plană din planul $(\bar{t}_0, \bar{n}_0)$, deci din planul osculator.*

Prin concavitatea curbei se înțelege concavitatea acestei curbe elementare de aproximație.

Deoarece

$$z \simeq \frac{1}{6\rho_0\tau_0} s^3,$$

el își schimbă semnul, când punctul $P$ trece prin $M$, deci *curba traversează planul osculator.*

Toate aceste rezultate sunt valabile dacă $\frac{1}{\rho_0}$ și $\frac{1}{\tau_0}$ sunt diferite de zero, deci în punctele în care curbura și torsiunea nu sunt nule. In punctele de inflexiune, unde $\frac{1}{\rho}=0$, sau în punctele cu plane osculatoare staționare, unde $\frac{1}{\tau}=0$, ele suferă modificări, după cum se vede pe ecuațiile canonice.

Proiecțiile curbei pe cele trei plane fundamentale ale triedrului principal sunt arce de curbă, care admit reprezentările parametrice, obținute considerând

Scanned with OKEN Scanner

câte două din cele trei coordonate. Astfel, *proiecţia pe planul osculator* va fi curba:

$$x = s - \frac{1}{6\rho_0^2} s^3 + \dots$$

$$y = \frac{1}{2\rho_0} s^2 - \frac{\rho_0'}{6\rho_0^2} s^3 + \dots$$

Deoarece desvoltarea uneia din coordonate începe cu un termen de gradul întâi, punctul $M$ va fi *un punct ordinar* al acestei curbe admiţând o tangentă unică şi determinată.

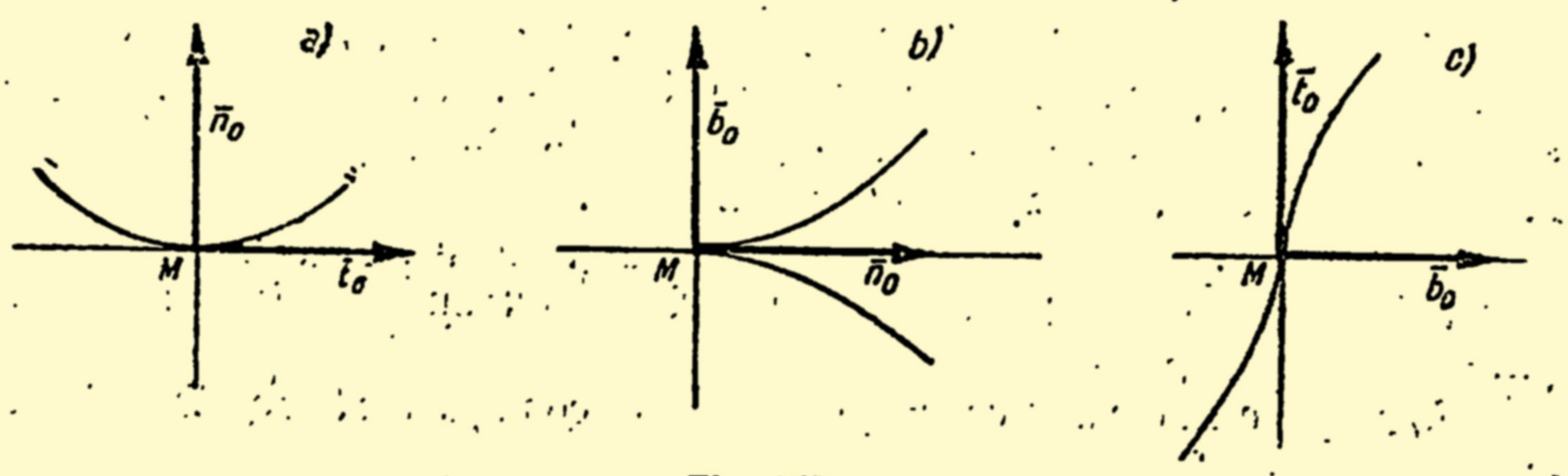



Fig. 158

*Proiecţia pe planul normal* va fi curba

$$y = \frac{1}{2\rho_0} s^2 - \frac{\rho_0'}{6\rho_0^2} s^3 + \dots$$

$$z = \frac{1}{6\rho_0\tau_0} s^3 + \dots$$

Deoarece în desvoltarea expresiilor coordonatelor lipseşte termenul de gradul întâi în $s$, iar ordinul cel mai mic este doi, curba va admite în $M$ un *punct de înapoiere.*

In sfârşit, *proiecţia pe planul rectificant* va fi curba

$$x = s - \frac{1}{6\rho_0^2} s^3 + \dots$$

$$z = \frac{1}{6\rho_0\tau_0} s^3 + \dots$$

Deoarece termenul în $s^2$ lipseşte, această curbă va admite punctul $M$ ca *punct de inflexiune.*

Este dealtfel uşor de găsit reprezentarea carteziană a fiecăreia din curbele de aproximaţie a proiecţiilor considerate, reţinând numai primii termeni din desvoltare şi eliminând pe $s$.

Vom obţine în planul osculator parabola (fig. 158,*a*)

$$y = \frac{1}{2\rho_0} x^2;$$

Scanned with OKEN Scanner

în planul normal semicubica (fig. 158,*b*)

$$z^2 = \frac{2\rho_0}{9\tau_0^2} y^3,$$

cu punct de întoarcere în origine, iar în planul rectificant cubica (fig. 158,*c*)

$$z = \frac{1}{6\rho_0\tau_0} x^3,$$

cu punct de inflexiune în origine.

## § 179. Ecuațiile intrinseci ale unei curbe

Din ecuațiile canonice (57,VI) rezultă că o curbă strâmbă analitică este determinată, când se cunoaște curbura și torsiunea sa, date prin două funcții $\rho(s)$ și $\tau(s)$, analitice în domeniul punctului $s = 0$, cu condiția ca triedrul său fundamental $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ să fie dat în punctul $M$.

Această proprietate se extinde la o curbă neanalitică, definită printr'un vector de poziție $\bar{r}=\bar{r}(s)$, care admite derivate continue până la ordinul $p \geqq 3$, într'un interval $|s|<a$.

Vom spune că o curbă ce îndeplinește aceste condițiuni este *regulată* de clasa $C^p$ în intervalul $|s|<a$.

*O curbă regulată de clasa $C^p$, cu $p \geqq 3$ este determinată înafară de poziție, când se cunoaște curbura și torsiunea sa, date prin două funcții*

$$\rho=\rho(s); \quad \tau=\tau(s) \tag{58,VI}$$

*continue într'un interval $a < s < b$.*

Vom spune că ecuațiile (58,VI) definesc curba în mod intrinsec, adică îi determină forma, dar nu o pot situa în spațiu și le vom numi *ecuațiile intrinseci* ale curbei.

Vom arăta că aceste ecuații determină triedrul lui Frenet $\bar{t}$, $\bar{n}$, $b$ în raport cu un triedru de referință $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, înafară de o rotație arbitrară, apoi vom determina vectorul de poziție $\bar{r}=\bar{r}(s)$ cu ajutorul vectorului $\bar{t}(s)$. Demonstrația arată legătura organică între diversele sectoare ale matematicei, folosind proprietăți ale sistemelor de ecuații diferențiale.

Raportând triedrul $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ la un triedru fix $\bar{i}$, $j$, $\bar{k}$, vom pune

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \alpha_1\bar{i}+\beta_1 j+\gamma_1\bar{k}; \\ \bar{n} &= \alpha_2\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\gamma_2\bar{k}; \\ \bar{b} &= \alpha_3\bar{i}+\beta_3\bar{j}+\gamma_3\bar{k}, \end{aligned} \tag{59,VI}$$

unde $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, etc. sunt cosinusuri directoare.

Știm că putem rezolva aceste ecuații în raport cu $\bar{i}$, $j$, $\bar{k}$ și vom avea, conform cu (48,III) și (50,III),

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \alpha_1\bar{t}+\alpha_2\bar{n}+\alpha_3 b; \\ \bar{j} &= \beta_1\bar{t}+\beta_2\bar{n}+\beta_3 b; \\ \bar{k} &= \gamma_1\bar{t}+\gamma_2\bar{n}+\gamma_3 b. \end{aligned} \tag{60,VI}$$

Introducând expresiile (59,VI) în formulele lui Frenet (41,VI), obținem un sistem de nouă relații, care reprezintă forma carteziană a acestor formule:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{\alpha_2}{\rho};\quad \frac{d\alpha_2}{ds}=-\frac{\alpha_1}{\rho}+\frac{\alpha_3}{\tau};\quad \frac{d\alpha_3}{ds}=-\frac{\alpha_2}{\tau};\\
&\frac{d\beta_1}{ds}=\frac{\beta_2}{\rho};\quad \frac{d\beta_2}{ds}=-\frac{\beta_1}{\rho}+\frac{\beta_3}{\tau};\quad \frac{d\beta_3}{ds}=-\frac{\beta_2}{\tau};\\
&\frac{d\gamma_1}{ds}=\frac{\gamma_2}{\rho};\quad \frac{d\gamma_2}{ds}=-\frac{\gamma_1}{\rho}+\frac{\gamma_3}{\tau};\quad \frac{d\gamma_3}{ds}=-\frac{\gamma_2}{\tau},
\end{aligned}\qquad (61,VI)$$

Citite vertical, ele exprimă pe axe cele trei formule, dând expresiile componentelor derivatelor celor trei versori $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$.

Citite orizontal ele dau componentele derivatelor versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ raportați la $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, considerat ca fix, deci *mișcarea relativă* a lui $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ față de $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$.

Facem observația că sistemul (61,VI), astfel citit, se descompune în trei sisteme parțiale conținând câte trei din cele nouă necunoscute. Va fi suficient să schimbăm literele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, păstrând indicii, pentru a trece dela un sistem la celălalt.

Deci $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ pot fi considerate ca trei sisteme particulare de soluții ale unui aceluiași sistem de forma

$$\frac{dX}{ds}=rY-qZ;\quad \frac{dY}{ds}=pZ-rX;\quad \frac{dZ}{ds}=qX-pY,\qquad (62,VI)$$

unde am notat

$$p=\frac{1}{\tau};\quad q=0;\quad r=\frac{1}{\rho}.$$

Acest sistem diferențial de ordinul întâi, liniar și omogen, admite, conform teoriei generale, trei sisteme de soluții liniar independente, formând un sistem fundamental și chiar o infinitate de sisteme fundamentale, cu ajutorul cărora se poate exprima integrala sa generală.

Dându-se valorile inițiale $x_0$, $y_0$, $z_0$ ale funcțiilor $X$, $Y$, $Z$ pentru $s=0$, de exemplu, există un sistem de soluții și numai unul, care ia aceste valori, în ipotezele admise că $p$, $q$, $r$ sunt funcții continue.

Sistemul (62,VI) este însă un sistem special, care are proprietăți deosebite datorită semnificației sale. Se poate arăta că integrarea sa revine la aceea a unei ecuații a lui Riccati. Dar pentru problema urmărită nu integrarea sa este importantă, ci proprietățile soluțiilor sale.

Ținând seama de semnificațiile lui $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, etc. nu orice sisteme de soluții ale lui (62,VI) pot reprezenta versorii $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$. Va fi necesar ca relațiile de ortogonalitate ale cosinusurilor directoare să fie îndeplinite în tot timpul deplasării triedrului mobil.

Ori, dacă $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ și $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ sunt două sisteme de soluții ale sistemului (59,VI), vom avea

$$X_1\frac{dX_1}{ds}+Y_1\frac{dY_1}{ds}+Z_1\frac{dZ_1}{ds}=0$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\left(X_1 \frac{dX_2}{ds} + Y_1 \frac{dY_2}{ds} + Z_1 \frac{dZ_2}{ds}\right) + \left(X_2 \frac{dX_1}{ds} + Y_2 \frac{dY_1}{ds} + Z_2 \frac{dZ_1}{ds}\right) = 0,$$

cum se verifică imediat. Deducem

$$\frac{d}{ds}(X_1^2 + Y_2^2 + Z_1^2) = 0;$$

$$\frac{d}{ds}(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2) = 0,$$

deci integrala primă

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = c^2 = \text{const},$$

și relația

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = d = \text{const},$$

valabile pentru orice $s$ din intervalul $(a, b)$.

Putem deci găsi sisteme de soluții pentru care $c=1$ și $d=0$ și ținând seama că sistemul (62,VI) admite trei sisteme de soluții liniar independente, notând aceste soluții cu $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ etc., vom putea scrie

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1; \quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1; \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^3=1; \\ &\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0; \quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0; \quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0. \end{aligned} \tag{63,VI}$$

Dacă aceste relații sunt îndeplinite pentru $s=0$, ele vor rămâne valabile în tot intervalul și *vom putea considera soluțiile* $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, *etc. ca formând componentele a trei versori* $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, *ortogonali în tot timpul deplasării.*

Conform cu teoria ecuațiilor diferențiale, soluțiile vor fi complect determinate prin valorile lor inițiale, legate însă prin relațiile (63,VI). Deci, dându-ne arbitrar pentru $s=0$, vectorul $\bar{t}$ prin $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, cu $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$, vom alege opoi pe $\bar{n}$, astfel încât $\bar{n}\bar{t}=0$; $\bar{n}^2=1$, iar $\bar{b}$ va fi perfect determinat cu condiția ca triedrul $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ să fie orientat.

Obținem astfel următorul rezultat: *Triedrul principal este complect determinat prtn formulele lui Frenet, când se cunoaște curbura și torsiunea în funcție de s, dacă poziția sa este cunoscută în raport cu triedrul de referință* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ *pentru o valoare a lui s.*

In lipsa condițiilor inițiale, triedrul poate suferi o rotație arbitrară, deoarece putem alege ca triedru inițial un triedru oarecare.

Pentru determinarea curbei $C$, vom folosi ecuația vectorială

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}(s),$$

unde $\bar{t}(s)$ este determinat. Vom avea imediat

$$\bar{r} = \int_0^s \bar{t}(s)\,ds + \bar{r}(0),$$

deci $\bar{r}(s)$ va fi determinat, dacă se cunoaște, pentru $s=0$, vectorul $\bar{r}(0)$. In caz contrar, o translație arbitrară poate fi adăugată punctelor curbei. In con-

cluzie: *O curbă C regulată de clasa $C^p$, cu $p \geq 3$ este determinată înafară de o deplasare în spațiu, prin cunoașterea curburii și torsiunii sale, date ca funcții continue de s.*

## § 180. Demonstrația vectorială a ecuațiilor intrinseci

Proprietatea fundamentală că ecuațiile intrinseci definesc o curbă, înafară de o deplasare în spațiu, este o consecință a proprietăților integralelor sistemului lui Frenet.

Ori, acest sistem, reprezentând rotația triedrului principal, când se consideră vârful său ca fix, poate fi redus la o singură ecuație vectorială de forma (40,VI)

$$\frac{d\bar{V}}{ds} = \bar{\delta} \times \bar{V} \qquad (64,VI)$$

unde $\bar{\delta}$ este vectorul lui Darboux, ecuație care admite ca soluții $\bar{V} = \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$, deci trei versori ortogonali pentru orice valoare a lui *s*.

Invers, fiind dată ecuația vectorială (64,VI), unde $\bar{\delta}$ este un vector cunoscut, funcție de *s*, ne putem pune problema dacă ea admite trei soluții $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$, care să fie trei versori ortogonali și să reprezinte versorii fundamentali ai triedrului principal al unei curbe.

In primul rând, ecuația (64,VI) admite soluții, deoarece ea condensează un sistem diferențial liniar de forma (62,VI), dacă punem

$$\bar{V} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}; \quad -\bar{\delta} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$$

semnul minus provenind din faptul că (59,VI) reprezintă rotația relativă a triedrului $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ față de $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$, pe când (64,VI) reprezintă rotația relativă a lui $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ față de $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Existența soluțiilor ecuației (64,VI) fiind astfel asigurată prin teorema de existență a sistemelor diferențiale liniare, rămâne să arătăm că printre aceste soluții există trei versori ortogonali. Pentru aceasta, dacă notăm cu $\bar{V}$ și $\bar{W}$ două soluții liniar independente, vom putea scrie

$$\bar{V}\frac{d\bar{V}}{ds} = (\bar{\delta} \times \bar{V})\,\bar{V} = 0,$$

de unde

$$\frac{d}{ds}\bar{V}^2 = 0; \qquad \bar{V}^2 = c^2 = \text{const.}$$

Deasemenea

$$\bar{W}\frac{d\bar{V}}{ds} + \bar{V}\frac{d\bar{W}}{ds} = (\bar{\delta} \times \bar{V})\,\bar{W} + (\bar{\delta} \times \bar{W})\,\bar{V} = 0,$$

de unde

$$\frac{d}{ds}(\bar{V}\bar{W}) = 0; \qquad \bar{V}\bar{W} = d = \text{const.}$$

Prin urmare, dacă inițial $\bar{V}^2(0) = c^2 = 1$, vom avea $\bar{V}^2(s) = 1$ și dacă $\bar{V}(0)\,\bar{W}(0) = d = 0$, vom avea $\bar{V}(s)\,\bar{W}(s) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Este deci suficient să dăm pentru $s=0$, trei versori $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ formând un triedru pozitiv ortogonal, pentru ca să existe trei versori $\bar{t}(s)$, $\bar{n}(s)$, $\bar{b}(s)$ ortogonali, care verifică ecuația (64,VI).

Am stabilit astfel următorul rezultat: *Ecuația vectorială* (64,VI) *admite ca soluție trei versori ortogonali* $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, *perfect determinați pentru orice* $s$ *din intervalul* $(a, b)$, *dacă acești versori sunt dați pentru* $s=0$.

*Punând*

$$\bar{t}=\frac{d\bar{r}}{ds},$$

*există o curbă de ecuație vectorială*

$$\bar{r}(s)=\int_0^s \bar{t}(s)\,ds+\bar{r}(0)$$

*perfect determinată, dacă* $\bar{r}(0)$ *este dat, care admite triedrul* $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ *ca triedru principal în fiecare punct, dacă*

$$\bar{\delta}=\frac{1}{\tau}\bar{t}+\frac{1}{\rho}\bar{b},$$

*unde* $\rho=\rho(s)$ *și* $\tau=\tau(s)$ *sunt două funcții continue de* $s$.

*In acest caz,* $\rho(s)$ *și* $\tau(s)$ *reprezintă respectiv curbura și torsiunea curbei, iar* $\bar{\delta}$ *este vectorul lui Darboux în punctul M.*

Din această teoremă deducem imediat că, prin cunoașterea curburii și torsiunii curba este determinată, înafară de poziția sa în spațiu. Demonstrația dată este valabilă în cazul general, când $\bar{\delta}$ este un vector oarecare, dat în funcție de $s$ și rezultatul obținut se aplică la rotația unui corp solid în jurul unui punct fix, asupra căreia vom reveni ulterior.

*Demonstrația ilustrează posibilitățile metodei vectoriale în studiul proprietăților geometrice sau fizice, exprimate prin ecuații diferențiale vectoriale, în comparație cu metoda scalară utilizată anterior.* Se vede că înafară de faptul că este mai rapidă, ea explică existența atât a integralei prime, cât și a relației între două integrale liniar independente, evitând artificiile de demonstrație.

**Exemplu.** *Ecuațiile intrinseci ale epicicloidei.* Dacă pe un cerc de rază $a$ se rostogolește fără alunecare un alt cerc exterior de rază $\lambda a$, un punct fix al acestuia descrie o epicicloidă.

Fie $A_0$ punctul fix, considerat în poziția de contact între cele două cercuri și $A_1, A_2, A_3$, etc. pozițiile succesive ale lui $A_0$ în rostogolirea cercului.

Notând cu $\psi$ arcul $A_0B$ pe cercul fix, corespunzând poziției $A_1$ (fig. 159) și cu $\varphi$ arcul $BA_1$ pe cercul ce se rostogolește, vom alege ca axă $Ox$ direcția $OA_0$. Pentru calculul coordonatelor lui $A_1$, vom scrie:

$$\overline{OA_1}=\overline{OI}+\overline{IA_1},$$

$I$ fiind centrul cercului mobil. Cum între arcele $\varphi$ și $\psi$ avem relația

$$\frac{\varphi}{\psi}=\frac{a}{a\lambda}; \qquad \psi=\lambda\varphi,$$

deoarece sunt invers proporționale cu razele, iar pe de altă parte $\overline{A_1I}$ face cu $Ox$ unghiul $\varphi+\psi$ exterior triunghiului $OIC$, vom avea:

$$\overline{OI}=\bar{i}\,a(1+\lambda)\cos\psi+\bar{j}a(1+\lambda)\sin\psi;$$
$$\overline{A_1I}=\bar{i}\,a\lambda\cos(\varphi+\psi)+\bar{j}\,a\lambda\sin(\varphi+\psi).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deducem imediat coordonatele $x$, $y$ ale lui $A$.

$$x=a[(1+\lambda)\cos\lambda\varphi-\lambda\cos(1+\lambda)\varphi];$$
$$y=a[(1+\lambda)\sin\lambda\varphi-\lambda\sin(1+\lambda)\varphi],$$

în funcție de parametrul $\varphi$.

Pentru a obține ecuațiile intrinseci, vom calcula abscisa curbilinie și curbura în funcție de $\varphi$, eliminând apoi acest parametru. Vom avea

$$ds=\pm 2a\lambda(1+\lambda)\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Deoarece $\sin\frac{\varphi}{2}$ este pozitiv pentru $0,<\varphi<2\pi$ și arcul crește odată cu $\varphi$, va trebui ca $ds>0$, pentru $d\varphi>0$ și deci vom lua semnul plus în expresia lui $ds$.

Luând ca origine a arcelor punctul $A_2$, corespunzător lui $\varphi=\pi$, vom avea:

$$s=4a\lambda(\lambda+1)\int_{\pi}^{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{2}=$$

$$=-4a\lambda(1+\lambda)\cos\frac{\varphi}{2}$$

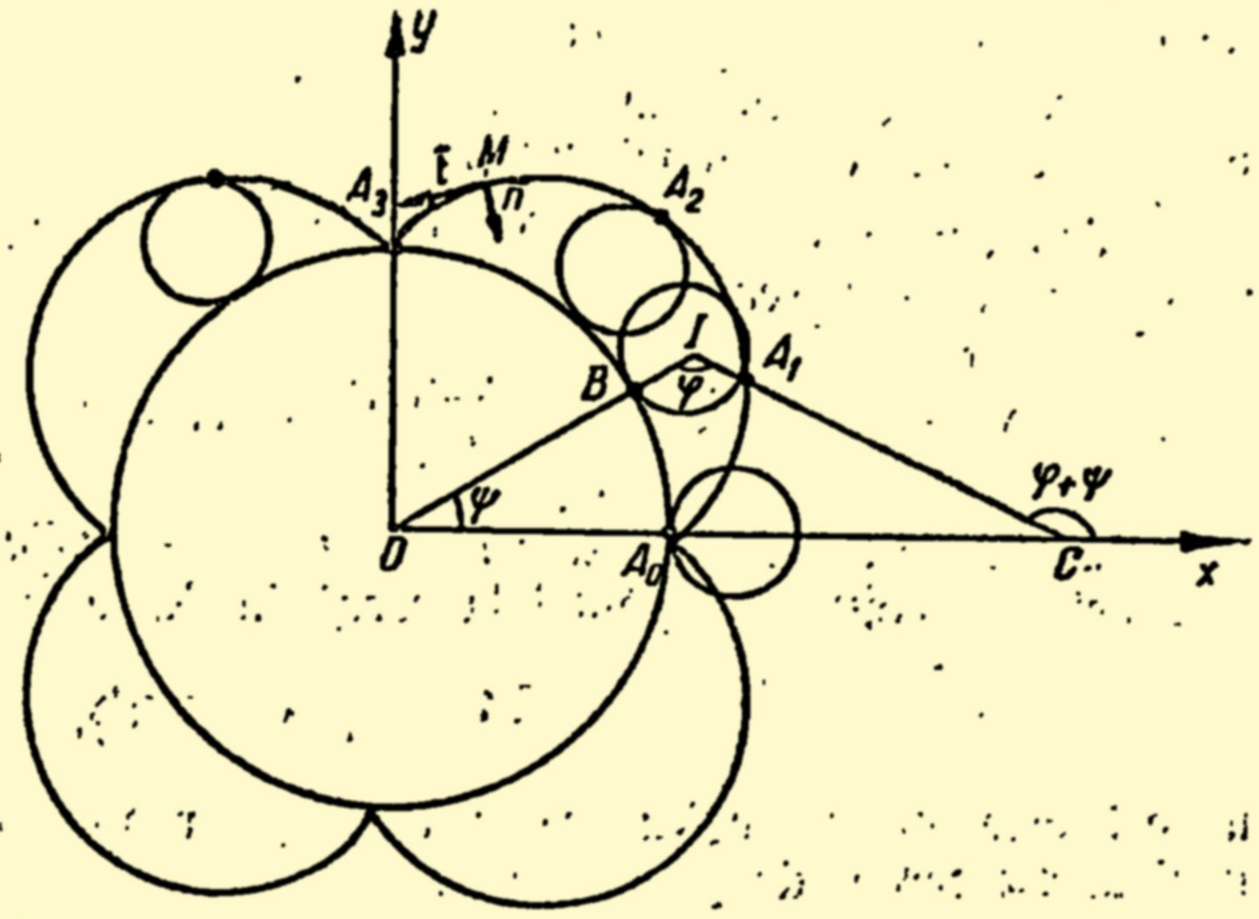



Fig. 159

pentru $0\leq\varphi\leq 2\pi$. Abscisa curbilinie $s$ va fi pozitivă pentru $\pi<\varphi\leq 2\pi$ și negativă pentru $0\leq\varphi<\pi$.

Calculul razei de curbură ne conduce la expresia

$$\rho=\frac{4\lambda(1+\lambda)a}{1+2\lambda}\sin\frac{\varphi}{2}$$

normala obținută prin rotația tangentei de $\frac{\pi}{2}$ în sensul direct fiind în concavitatea curbei.

Eliminând $\sin\frac{\varphi}{2}$ și $\cos\frac{\varphi}{2}$ între expresiile lui $s$ și $\rho$, obținem ecuația

$$s^2+(1+2\lambda)^2\rho^2=16a^2\lambda^2(1+\lambda)^2$$

care, împreună cu

$$\tau=0,$$

fiindcă torsiunea curbelor plane este nulă, constituie cele două ecuații intrinseci ale epicicloidei.

## § 181. Noțiuni asupra contactului

Studiul proprietăților locale ale curbelor conduce dela început la noțiunea de tangentă, definită prin proprietatea de a fi limita unei secante, care taie curba în două puncte vecine, din care unul este fix, iar celălalt poate fi luat oricât de apropiat de primul. Se spune că tangenta taie curba în două puncte confundate, sau că are un contact cu curba în punctul de tangență.

Deasemenea, planul osculator este definit ca limita unui plan, care taie curba în trei puncte vecine, din care unul este fix, iar celelalte tind pe curbă către primul. Se spune că planul osculator taie curba în trei puncte confundate, sau că are un contact cu curba în punctul de tangență.

Dealtfel, orice plan care trece prin tangenta la curbă poate fi considerat ca un plan, care taie curba în două puncte confundate, deci ca un plan ce are un contact cu curba. Pentru a se distinge planul osculator, se spune că el are un contact de ordinul al doilea cu curba.

Noțiunea de contact se extinde la două curbe oarecare, la o curbă și o suprafață și la două suprafețe.

Daoarece tangenta este elementul de bază al contactului, vom presupune că ea este bine determinată în punctul considerat.

Fiind dată o curbă regulată de clasa $C^p$, cu $p \geqslant 2$, aceasta se poate reprezenta prin desvoltarea

$$\bar{r}(t)=r(t_0)+\frac{t-t_0}{1}\bar{r}'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\bar{r}''(t_0)+\cdots+\frac{(t-t_0)^p}{p!}[\bar{r}^{(p)}(t_0)+\bar{\epsilon}]. \qquad (65,VI)$$

Punctul $M_0$, corespunzător lui $t=t_0$, este *ordinar* dacă $\bar{r}'(t_0)\neq 0$ (§ 166). In acest caz, ecuația tangentei la curbă în $M_0$ este de forma

$$\bar{R}(t)=\bar{r}(t_0)+\lambda\bar{r}'(t_0),$$

unde $\lambda$ este un parametru scalar, iar $\bar{R}(t)$ reprezintă vectorul de poziție al unui punct curent de pe tangentă.

Orice punct, care nu este ordinar, se numește *singular*. Intr'un punct singular, $\bar{r}'(t_0)=0$, deci în desvoltarea (65,VI) lipsește termenul de gradul întâi în $t-t_0$.

Dacă

$$\bar{r}'(t_0)=0,\ \bar{r}''(t_0)=0,\ \ldots,\ r^{k-1}(t_0)=0; \quad (1<k\leqslant p),$$

ecuația tangentei în punctul singular $M_0$ va fi

$$\bar{R}(t)=\bar{r}(t_0)+\lambda\bar{r}^k(t_0).$$

In problemele de contact, vom presupune că punctul $M$ este ordinar pe curbă.

Fie două curbe $C_1$ și $C_2$ de ecuații vectoriale (fig. 160 *a*)

$$\bar{r}_1=\bar{r}_1(t);\quad \bar{r}_2=\bar{r}_2(u).$$

Să presupunem că aceste curbe au un punct comun $M_0$, corespunzând valorilor $t_0$, $u_0$, ai parametrilor, deci

$$\bar{r}_1(t_0)=\bar{r}_2(u_0).$$

Calculând abscisele curbilinii pe ambele curbe, începând din $M_0$, vom obține

$$s_1=s_1(t) \quad \text{și} \quad s_2=s_2(u).$$

Dacă egalăm aceste abscise, scriind

$$s_1(t)=s_2(u)=s,$$

putem stabili între cele două curbe o corespondență punctuală biunivocă, în care punctele $M_1$ și $M_2$ corespunzătoare au același $s$.

Scanned with OKEN Scanner

Luând atunci ca parametru abscisa curbilinie $s$, vom putea considera dela început curbele $C_1$ și $C_2$ date de ecuațiile vectoriale

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(s), \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_2(s),$$

punctul comun $M_0$ corespunzând lui $s=0$.

Vom spune că două curbe $C_1$ și $C_2$ au un *contact de ordinul n* în punctul $M_0$, dacă în acest punct vectorii lor de poziție și derivatele lor până la ordinul $n$ inclusiv sunt egali. Condițiile contactului de ordinul $n$ sunt:

$$\bar{r}_1(0)=\bar{r}_2(0),\ \bar{r}_1'(0)=\bar{r}_2'(0),\ \ldots,\ \bar{r}_1^{(n)}(0)=\bar{r}_2^{(n)}(0),\ \bar{r}_1^{(n+1)}(0)\neq\bar{r}_2^{(n+1)}(0), \qquad (66,VI)$$

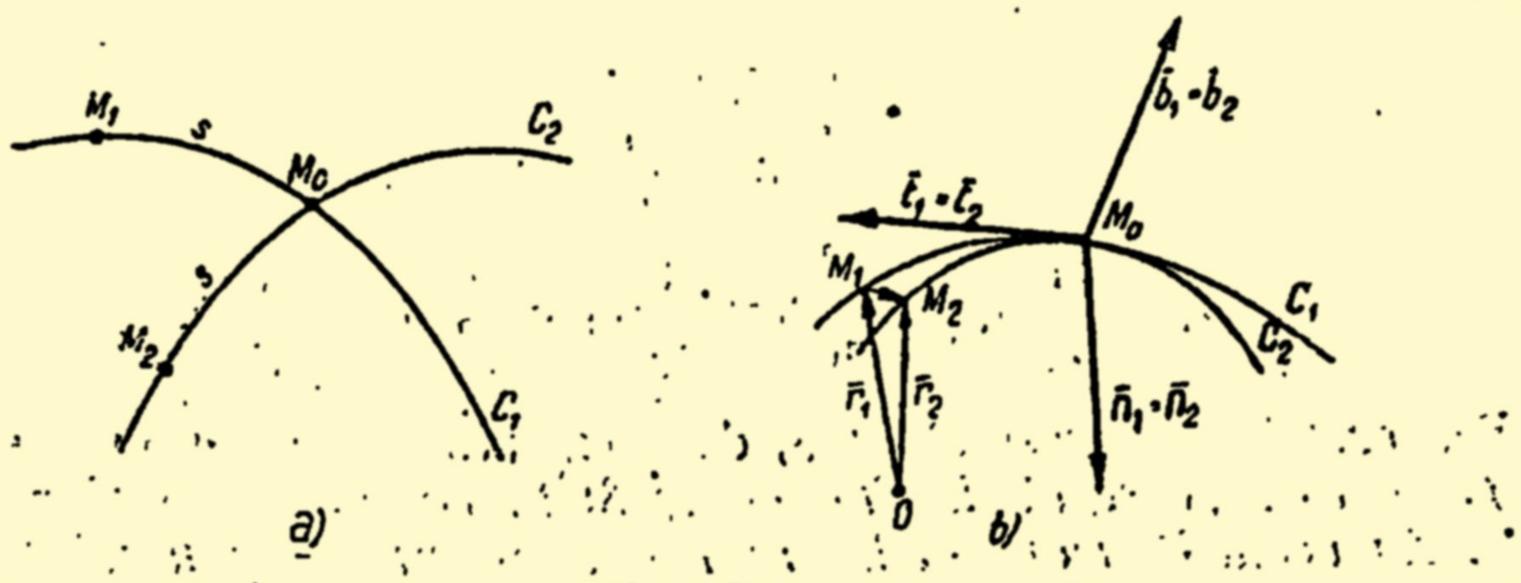



Fig. 160

Din această definiție rezultă că: *desvoltările Mac-Laurin a două curbe ce au un contact de ordinul n coincid până la termenii de ordinul n inclusiv.*

Scriind aceste desvoltări, vom avea deci

$$\bar{r}_2(s)-\bar{r}_1(s)=\frac{s^{(n+1)}}{(n+1)!}[\bar{r}_2^{(n+1)}(0)-\bar{r}_1^{(n+1)}(0)]+\frac{s^{(n+2)}}{(n+2)!}[\bar{r}_2^{(n+2)}(0)-\bar{r}_1^{(n+2)}(0)]+\cdots=$$

$$=s^{(n+1)}[\bar{\alpha}+s\bar{\beta}+\cdots],$$

unde $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$, sunt vectori constanți, iar $\bar{\alpha}\neq 0$.

Dacă $M_1$ și $M_2$ sunt punctele de abscisă $s$ pe cele două curbe (fig. 160 *b*), vom avea deci

$$\overline{M_1M_2}=\bar{r}_2(s)-\bar{r}_1(s)=s^{n+1}[\bar{\alpha}+s\bar{\beta}+\cdots];$$

$$M_1M_2 \leqq |s^{n+1}|\alpha+|s^{n+2}|\beta+\cdots$$

Când $|s|$ este suficient de mic

$$M_1M_2 \simeq |s^{n+1}|\alpha,$$

deoarece $\alpha\neq 0$, iar termenii următori sunt neglijabili.

Mai corect, vom avea:

$$\left|\frac{\overline{M_1M_2}}{s^{n+1}}-\bar{\alpha}\right| \leqq |s|\beta+\cdots<\epsilon,$$

$\epsilon>0$ fiind dat, dacă $|s|$ este suficient de mic. Vom spune că distanța dintre cele două puncte $M_1$ și $M_2$, corespunzătoare pe cele două curbe, este de ordinul lui $s^{n+1}$.

Ecuația

$$\bar{r}_2(s)-\bar{r}_1(s)=0,$$

care dă punctele comune celor două curbe, are o rădăcină multiplă de ordinul $n+1$ în punctul $s=0$. Spunem că *cele două curbe au $n+1$ puncte de intersecție confundate în $M_0$*, când în acest punct au un contact de ordinul $n$.

Ecuațiile canonice ne permit să interpretăm geometric condițiile de contact. In adevăr, să presupunem, de exemplu, că aceste curbe au un contact de ordinul al treilea. Ecuația (56,VI) scrisă pentru ambele curbe și în care înlocuim, pentru ușurință, indicele zero pe rând cu 1 și 2 pentru cele două curbe, va da următoarele condiții, deduse din (66,VI):

$$\left.\begin{aligned} \bar{t}_1 &= \bar{t}_2;\\ \frac{1}{\rho_1}\bar{n}_1 &= \frac{1}{\rho_2}n_2;\\ \frac{1}{\rho_1^2}\bar{t}_1+\frac{\rho_1'}{\rho_1^2}n_1-\frac{1}{\rho_1\tau_1}\bar{b}_1 &= \frac{1}{\rho_2^2}\bar{t}_2+\frac{\rho_2}{\rho_2^2}\bar{n}_2-\frac{1}{\rho_2\tau_2}\bar{b}_2. \end{aligned}\right\} \quad (67,VI)$$

Din examinarea acestor relații, deducem următoarea propoziție:
*Două curbe, care au într'un punct $M$ un contact de ordinul al treilea:*
1. *Au același triedru al lui Frenet în punctul de contact $M$.*
2. *Au curburile și derivatele lor de primul ordin egale în acest punct.*
3. *Au torsiunile egale în punctul de contact $M$.*

Importanța planului osculator în studiul curbelor impune să definim deasemenea și contactul dintre o curbă și o suprafață.

Dacă spațiul este raportat la un sistem de referință cartezian, am numit suprafață mulțimea punctelor ale căror coordonate $x$, $y$, $z$ satisfac o ecuație de forma

$$F(x,y,z)=0,$$

unde $F$ este o funcție continuă și derivabilă continuu până la un ordin $p\geqq 1$. (§ 165).

Asociind punctului $M(x,y,z)$ vectorul său de poziție $\bar{r}$, ecuația suprafeței se poate scrie vectorial sub forma

$$F(\bar{r})=0,$$

unde $F(\bar{r})$ este o funcție scalară de vectorul $\bar{r}$. Vom presupune în aplicații că dacă funcția $F(\bar{r})$ are o expresie analitică, vectorul $\bar{r}$ este supus la operațiile algebrei și analizei vectoriale; în orice caz, $F(\bar{r})$ este un scalar.

Dacă vectorul $\bar{r}$, funcție continuă și derivabilă până la un anumit ordin $q\leqq p$ de un parametru $t$, verifică ecuația suprafeței, punctul $M$ va descrie o curbă trasată pe suprafața $F(\bar{r})=0$.

Fiind dată o curbă regulată $C$, care intersectează suprafața $S$ într'un punct $M_0$, dacă în ecuația $F(\bar{r})=0$ înlocuim pe $\bar{r}$ prin desvoltarea sa Taylor

$$\bar{r}(t)=\bar{r}(t_0)+\frac{t-t_0}{1!}\bar{r}'(t_0)+\frac{(t-t_0)}{2!}\bar{r}''(t_0)+\cdots$$

vom obține o ecuație scalară în $t-t_0$, de forma

$$F(\bar{r})\equiv a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\cdots+a_n(t-t_0)^n+a_{n+1}(t-t_0)^{n+1}+\cdots=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $a_0=0$, deoarece $F(\bar{r}_0)=0$ și $\bar{r}_0=\bar{r}(t_0)$.

Dacă în același timp vom avea

$$a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ldots,\ a_n=0,\ a_{n+1}\neq 0,$$

ecuația

$$F[\bar{r}(t)]\equiv(t-t_0)^{n+1}[a_{n+1}+a_{n+2}(t-t_0)+\cdots]=0$$

va avea o rădăcină multiplă de ordinul $n$ în punctul $t=t_0$.

Vom spune atunci că *suprafața are cu curba un contact de ordinul $n$ în punctul $M_0$*, curba intersectând suprafața în $n+1$ puncte confundate în $M_0$.

Consecințele acestei definiții vor fi adâncite ulterior în studiul suprafețelor.

**Exemplu.** *Contactul unui plan cu o curbă.* Pentru ca planul de ecuație vectorială

$$\overline{pr}=a$$

să aibă un contact cu curba de ecuație

$$\bar{r}=\bar{r}_0+(t-t_0)\bar{r}'_0+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\bar{r}''_0+\cdots$$

va trebui verificată relația

$$\overline{pr}=\overline{pr}_0+(t-t_0)\overline{pr}'_0+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\overline{pr}''_0+\cdots=a \qquad (68,VI)$$

pentru $t=t_0$, deci, în primul rând, vom avea

$$\overline{pr}_0=a,$$

corespunzând unui punct de intersecție $M_0$, sau unui *contact de ordinul zero*.

Dacă în plus

$$\overline{pr}'_0=0,$$

contactul este de ordinul întâi, iar dacă și

$$\overline{pr}''_0=0,$$

contactul va fi de ordinul al doilea.

Vom putea determina un plan, astfel încât să aibă un contact de ordinul al doilea cu curba în punctul $M_0$. In adevăr, din

$$\overline{pr}'_0=0 \text{ și } \overline{pr}''_0=0$$

deducem

$$p=\lambda(\bar{r}'_0\times\bar{r}''_0)$$

dacă

$$\bar{r}'_0\times\bar{r}''_0\neq 0.$$

Introducând în prima condiție valoarea lui $\bar{p}$, obținem

$$a=\lambda\bar{r}_0\bar{r}'_0\bar{r}''_0.$$

Planul căutat are ecuația

$$(\bar{r}-\bar{r}_0,\ \bar{r}'_0,\ \bar{r}''_0)=0$$

și este planul osculator la curbă în punctul $M_0$.

Scanned with OKEN Scanner

## § 182. Osculația

Două curbe oarecare nu au, în general, niciun contact. Fiind dată o curbă $C$ și o familie de curbe depinzând de $k$ parametri, este posibil ca una din curbele familiei să aibă cu $C$ un contact de un anumit ordin. Deasemenea, se poate căuta să se determine parametrii, astfel încât contactul să fie de ordinul cel mai înalt.

Vom spune că o curbă $\Gamma$ sau o suprafață $\Sigma$, aparținând unei familii de curbe, respectiv de suprafețe, depinzând de $k$ parametri, este *osculatoare* unei curbe $C$ într'un punct $M$, dacă parametrii au fost determinați astfel, încât contactul să fie de ordin maxim.

Dacă punctul $M$ poate fi ales astfel, încât contactul să fie de un ordin mai mare decât într'un punct curent, vom spune că $\Gamma$, sau $\Sigma$, este *supraosculatoare* la $C$ în acel punct $M$. Osculația depinde de numărul de parametri ai familiei. Astfel, mulțimea tuturor dreptelor, care trec printr'un punct $M$ al unei curbe, este o familie cu doi parametri. Aceștia vor fi determinați prin condiția ca dreapta să fie tangentă la curbă în $M$, deci tangenta la curbă este dreapta osculatoare și contactul este de ordinul întâi.

In cazul curbelor plane, punctele în care acest contact este de ordinul al doilea sunt punctele de inflexiune, în care vom avea deci supraosculație.

Folosind raționamentele făcute asupra contactului, se poate arăta că suprafața osculatoare unei curbe $C$ într'un punct $M$ este poziția limită a unei suprafețe din familia considerată cu $k+1$ parametri, care intersectează pe $C$ în $k$ puncte vecine cu $M$, iar contactul va fi de ordinul $k$.

In cazul curbelor plane, avem un rezultat analog pentru o familie de curbe cu $k$ parametri. In cazul curbelor osculatoare unei curbe strâmbe, dacă familia de curbe depinde de $2k$ parametri, este posibil să existe o curbă osculatoare curbei $C$.

**Exemplul 1.** *Cercul osculator unei curbe strâmbe.* Multimea tuturor cercurilor din spațiu formează o familie de curbe cu șase parametri, rezultând din intersecția unei sfere arbitrare, care depinde de patru parametri, cu un plan ce trece prin centrul sferei și deci depinde de doi parametri.

Un cerc va avea un contact de ordinul al doilea cu o curbă strâmbă într'un punct $M$, dacă trece prin acest punct și dacă are același versor tangent $\bar{\tau}$, aceeași normală principală $\bar{n}$ și aceeași rază de curbură $\rho$, după cum rezultă din (67,VI). Ori, prin aceste conditii cercul este determinat, găsindu-se în planul osculator, cu centrul pe normala principală $\bar{n}$ și având, ca rază, raza de curbură $\rho$ a curbei. Centrul său se numește *centrul de curbură* al curbei.

Curbura cercului osculator măsoară curbura curbei în punctul $M$.

**Exemplul 2.** *Planul supraosculator sau osculator staționar.* Contactul cel mai înalt pe care îl poate avea un plan cu o curbă strâmbă într'un punct oarecare $M$, este de ordinul al doilea. Pentru ca ordinul contactului să fie mai mare, trebue, conform cu relația (68,VI), să avem

$$\bar{p}\bar{r}_0'''=0.$$

Ținând seama de valoarea găsită pentru $\bar{p}$, într'un astfel de punct va fi verificată condiția:

$$\bar{r}_0'\bar{r}_0''\bar{r}_0'''=0,$$

deci torsiunea curbei va fi nulă în acest punct. Contactul planului cu curba va fi cel puțin de ordinul al treilea și planul osculator va fi staționar (§. 177). Punctele în care planul osculator este staționar sunt excepționale și nu există pe orice curbă.

Scanned with OKEN Scanner

Curba de ecuaţie vectorială

$$\bar{r}=a\left(\bar{i}\cos\varphi+\bar{j}\sin\varphi+\bar{k}\frac{2}{\mu}\sin\frac{\mu\varphi}{2}\right),$$

unde $a$ şi $\mu$ sunt constante date, iar $\varphi$ un parametru, admite plane osculatoare staţionare.

Această curbă se găseşte pe cilindrul circular drept

$$x^2+y^2=a^2$$

şi deoarece

$$|z|\leq\frac{2a}{\mu},$$

este în întregime cuprinsă între planele $z=\pm\frac{2a}{\mu}$.

Dacă $\mu$ este un număr raţional, proiecţiile curbei pe planele *yoz* şi *zox* sunt curbe *Lissajous*[1]).

Vom avea

$$\bar{r}'=a\left(-\bar{i}\sin\varphi+\bar{j}\cos\varphi+\bar{k}\cos\frac{\mu\varphi}{2}\right);$$

$$\bar{r}''=a\left(-\bar{i}\cos\varphi-\bar{j}\sin\varphi-k\frac{\mu}{2}\sin\frac{\mu\varphi}{2}\right);$$

$$\bar{r}'''=a\left(\bar{i}\sin\varphi-\bar{j}\cos\varphi-k\frac{\mu^2}{4}\cos\frac{\mu\varphi}{2}\right).$$

Punctele staţionare vor fi date de ecuaţia

$$\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''=a^3\begin{vmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi & \cos\frac{\mu\varphi}{2}\\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & -\frac{\mu}{2}\sin\frac{\mu\varphi}{2}\\ \sin\varphi & -\cos\varphi & -\frac{\mu^2}{4}\cos\frac{\mu\varphi}{2}\end{vmatrix}=0,$$

sau, sub formă desvoltată,

$$\left(1-\frac{\mu^2}{4}\right)\cos\frac{\mu\varphi}{2}=0;\quad\cos\frac{\mu\varphi}{2}=0;\quad\mu\neq 2,$$

care admite o infinitate de rădăcini. In cazul $\mu=2$, toate punctele curbei sunt staţionare, torsiunea este nulă şi curba se reduce la o curbă plană.

## § 138. Centrul de curbură şi sfera osculatoare

Mulţimea sferelor din spaţiu formând o familie cu patru parametri, vom putea determina sfere, care au un contact de ordinul $k=1,2,3$ cu o curbă strâmbă $C$, într'un punct $M$.

Fie

$$\bar{r}=\bar{r}(s)\quad\text{şi}\quad(\bar{r}-\bar{p})^2-a^2=0$$

ecuaţiile vectoriale ale curbei $C$ şi ale unei sfere $S$, cu centrul în punctul $P$, de vector de poziţie $\bar{p}$ şi de rază $a$.

---

[1]) *Cf. G. Loria*, Spezielle alg. Kurven T. I, Leipzig, 1910, p. 482.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca între sferă și curbă să existe un contact de ordinul $k$, trebue ca desvoltarea expresiei

$$f(s)=[\bar{r}(s)-\bar{p}]^2-a^2,$$

după puterile lui $s-s_0$ să înceapă cu termeni în $(s-s_0)^{k+1}$, deci

$$f(s_0)=0,\ f'(s_0)=0,\ f''(s_0)=0.$$

Sfera tangentă va fi determinată prin ecuațiile

$$f(s)=(\bar{r}-\bar{p})^2-a^2=0;$$

$$f'(s)=2[\bar{r}-\bar{p}]\frac{d\bar{r}}{ds}=2[\bar{r}-\bar{p}]\bar{t}=0,$$

Vom avea deasemenea, folosind formulele lui Frenet:

$$f''(s)=\bar{t}^2+(\bar{r}-\bar{p})\frac{d\bar{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}(\bar{r}-\bar{p})\bar{n}+1;$$

$$f'''(s)=\bar{t}\frac{d\bar{t}}{ds}+(\bar{r}-\bar{p})\frac{d^2\bar{t}}{ds^2}=(\bar{r}-\bar{p})\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=\frac{1}{3}(\bar{r}-p)\left[-\frac{1}{\rho^2}\bar{t}-\frac{\rho'}{\rho^2}\bar{n}+\frac{1}{\rho\tau}\bar{b}\right].$$

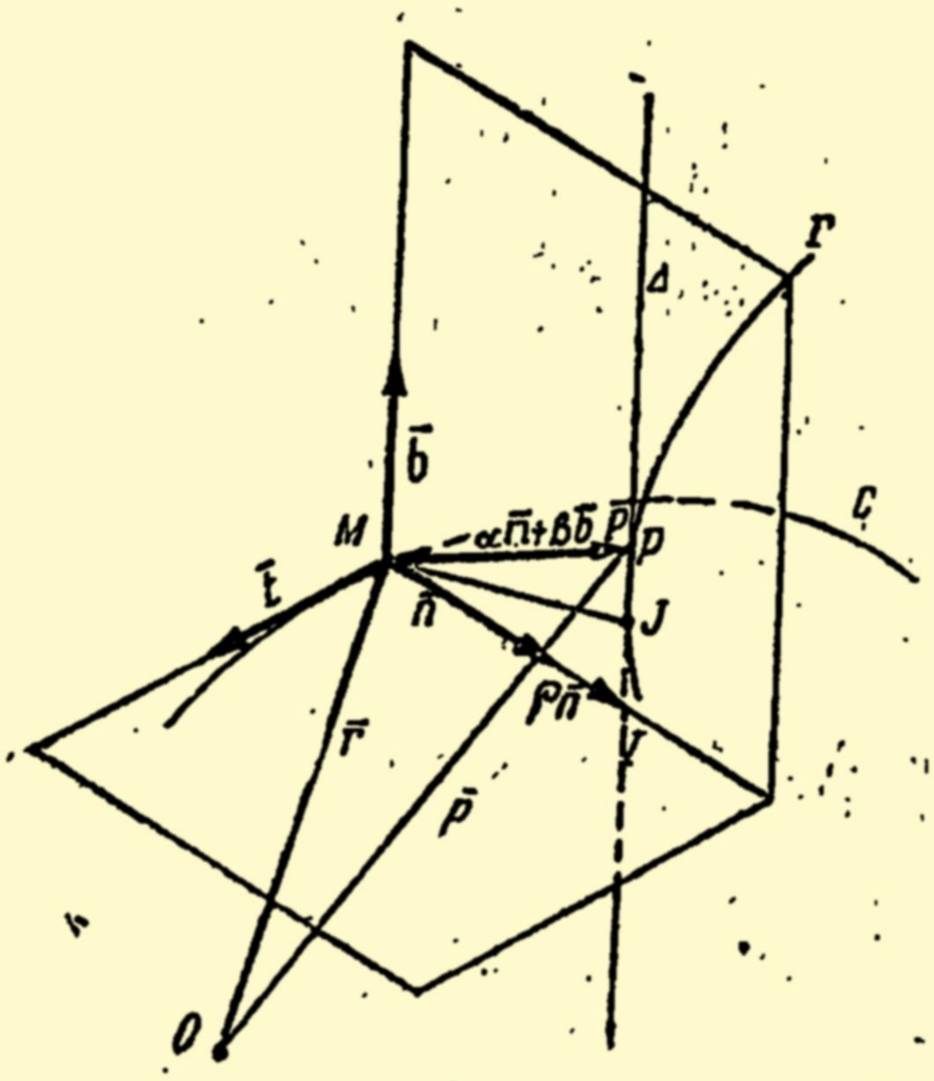



Fig. 161

Centrul sferei tangente se va găsi în planul normal (fig. 161), deci vom putea scrie

$$\bar{p}-\bar{r}=\alpha\bar{n}+\beta\bar{b},$$

unde $\alpha$ și $\beta$ sunt doi parametri scalari arbitrari.

Impunând condiția ca sfera să aibă un contact de ordinul al doilea, vom adăuga relația $f''(s)=0$, deci

$$(\bar{r}-\bar{p})\bar{n}+\rho=0,$$

din care, introducând valoarea lui $\bar{p}$, deducem $\alpha=\rho$, deci

$$\bar{p}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\beta\bar{b}, \qquad (69,VI)$$

cu $\beta$ arbitrar.

Luând în particular $\beta=0$, punctul $r+\rho\bar{n}$ se găsește pe normala principală în concavitatea curbei la o distanță egală cu $|\rho|$.

Vom numi acest punct *I centrul de curbură* al curbei $C$ în $M$. El este centrul cercului de curbură, care poate fi deci considerat ca intersecția sferei de rază minimă, ce are un contact de ordinul al doilea cu curba, cu planul osculator.

Din formula (69,VI) se deduce că locul centrelor $P$ ale sferelor considerate este o dreaptă paralelă cu binormala și trecând prin centrul de curbură $I$. Această dreaptă $\Delta$ se numește *axa polară* a curbei în punctul $M$.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre aceste sfere, sfera osculatoare verifică şi ultima condiţie $f'''(s)=0$. Introducând expresia (69,VI) a lui $\bar{\rho}$, deducem

$$\beta=\rho'\tau.$$

Astfel, centrul sferei osculatoare va fi un punct $J$, definit prin vectorul de poziţie

$$\bar{\rho}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\rho'\tau\bar{b}. \qquad (70,VI)$$

Raza sferei osculatoare se obţine din $f(s)=0$ şi este

$$a=\sqrt{\rho^2+\rho'^2\tau^2}.$$

Când punctul $M$ se deplasează pe $C$, centrul $J$ al sferei osculatoare descrie o curbă $\Gamma$, având ecuaţia vectorială (70,VI), parametrul fiind $s$.

Vectorul tangent la $\Gamma$ în punctul $J$ va fi

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds}=\frac{d\bar{r}}{ds}+\rho'\bar{n}+\rho\frac{d\bar{n}}{ds}+\frac{d}{ds}(\rho'\tau)\bar{b}+\rho'\tau\frac{d\bar{b}}{ds}=\left[\frac{\rho}{\tau}+\frac{d}{ds}(\rho'\tau)\right]\bar{b},$$

ţinând seama de formulele lui Frenet. Prin urmare: *Tangenta la curba $\Gamma$, loc al centrelor sferelor osculatoare este axa polară $\Delta$ a curbei $C$ în punctul $M$.*

Notând cu indicele 1 elementele curbei $\Gamma$, vom putea scrie

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right|=\left|\frac{d\bar{\rho}}{ds}\right|=\left|\frac{\rho}{\tau}+\frac{d}{ds}(\rho'\tau)\right|$$

şi luând

$$ds_1=\left[\frac{\rho}{\tau}+\frac{d}{ds}(\rho'\tau)\right]ds,$$

curba $\Gamma$ este orientată.

Punând apoi $\bar{t}_1=\bar{b}$, deducem

$$\frac{d\bar{t}_1}{ds_1}=\frac{d\bar{b}}{ds}\frac{ds}{ds_1}$$

şi aplicând formulele lui Frenet ambelor curbe, avem

$$\frac{1}{\rho_1}\bar{n}_1=-\frac{1}{\tau}\frac{ds}{ds_1}\bar{n}.$$

Considerând ambele normale în concavitatea curbelor respective, vom avea

$$\bar{n}_1=\pm\bar{n}$$

după cum

$$\frac{1}{\tau}\frac{ds}{ds_1}<0 \quad \text{sau} \quad >0.$$

In acelaşi timp

$$\rho_1=\left|\tau\frac{ds_1}{ds}\right|=\left|\rho+\tau\frac{d}{ds}(\rho'\tau)\right|.$$

Cum

$$\bar{b}_1=\bar{t}_1\times\bar{n}_1=b\times(\pm\bar{n})=\pm\bar{n}\times\bar{b}=\pm\bar{t},$$

*curba $\Gamma$ va avea binormala egală sau opusă tangentei la curba $C$.*

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$\frac{d\bar{b}_1}{ds_1} = -\frac{1}{\tau_1}\bar{n}_1 = \pm\frac{d\bar{t}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \pm\frac{1}{\rho}\frac{ds}{ds_1}\bar{n}$$

deducem

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{1}{\tau_1}\frac{ds_1}{ds}\right| = \frac{1}{|\tau\,\tau_1|}\rho_1$$

și deci

$$\rho\rho_1 = |\tau\tau_1|.$$

La aceleași rezultate se poate ajunge și pe o cale diferită. Ecuația

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0$$

reprezintă planul normal la curba $C$ în $M$. Când $M$ variază pe curbă, acest plan se deplasează și admite o suprafață înfășurătoare, care se obține eliminând parametrul $s$ între ecuațiile

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0 \quad \text{și} \quad -\bar{t}\frac{d\bar{r}}{ds}+(\bar{R}-\bar{r})\frac{d\bar{t}}{ds}=0,$$

de unde

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0 \quad \text{și} \quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{n}-\rho=0.$$

Punând

$$\bar{R}-\bar{r}=\alpha\bar{n}+\beta\bar{b},$$

obținem $\alpha=\rho$ și deci

$$\bar{R}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\beta\bar{b}. \qquad (71,VI)$$

*Axa polară $\Delta$ este dreapta caracteristică a planelor normale, adică limita intersecției a două plane normale vecine.*

Ecuația (71,VI), în care $s$ și $\beta$ sunt parametri, reprezintă înfășurătoarea planelor normale.

Luând un al treilea plan vecin cu primele, intersecția lor va fi dată de (71,VI) și de ecuația obținută derivând încă odată în raport cu parametrul $s$:

$$-\bar{t}\cdot\bar{n}+(\bar{R}-\bar{r})\frac{d\bar{n}}{ds}-\rho'=0.$$

Ținând seama de (71,VI), obținem

$$\beta=\rho'\tau,$$

deci

$$\bar{R}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\rho'\tau\bar{b} \qquad (72,VI)$$

va fi punctul de intersecție al celor trei plane. Acest punct, care coincide cu centrul sferei osculatoare, este punctul caracteristic al polarei $\Delta$, adică limita intersecției a două axe polare vecine. Curba $\Gamma$ poate fi considerată ca înfășurătoarea axelor polare $\Delta$. Alte proprietăți ale curbelor strâmbe, legate de proprietăți ale suprafețelor, se găsesc în §§ 198;199.

Scanned with OKEN Scanner

## EXERCIȚII

1. Să se calculeze elementul de arc al cicloidei

$$F(u)=(u-\sin u)\,\bar{i}+(1-\cos u)\,\bar{j}.$$

2. Se consideră un cerc $\Gamma$ cu centrul în $O$, de rază 1 și un vector $\bar{a}$ constant, perpendicular pe planul cercului. Fie $\bar{\rho}$ vectorul de poziție a unui punct $M$ de pe cerc și $\sigma$ arcul $AM$ cu originea în punctul fix $A$. Vârful vectorului

$$\bar{r}(\sigma)=e^{\sigma}[\bar{\rho}(\sigma)+\bar{a}]$$

descrie o curbă $C$:

a) să se calculeze elementul de arc al curbei $C$;

b) să se arate că tangenta la curba $C$ face un unghi constant cu $\bar{a}$;

c) normala principală rămâne paralelă cu planul cercului;

d) binormala face un unghi constant cu $\bar{a}$;

e) arcul, raza de curbură și raza de torsiune sunt funcții liniare de $e^{\sigma}$.

Indicație. Se va observa că $|\rho(\sigma)|=1$ și că $|\bar{\rho}(\sigma)|=1$ pentru orice $\sigma$.

3. Să se calculeze curbura și torsiunea curbei

$$\bar{r}(u)=u\bar{i}+\frac{u^2}{2}\bar{j}+\frac{u^3}{6}\bar{k}.$$

4. Fie $\bar{r}(u)$ vectorul de poziție al punctelor unei curbe și $s$, $\rho$, $\tau$ respectiv elementul de arc, raza de curbură și raza de torsiune.

Notăm

$$\bar{r}_1(u)=\bar{r}(u)+\lambda\bar{b}(u),\quad \Delta=\left(1+\frac{\lambda^2}{\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

unde $\lambda$ este o constantă.

Să se arate că:

a) $ds_1=\Delta ds$;

b) $\bar{\tau}_1=\frac{1}{s}\left(\bar{\tau}-\frac{\lambda\bar{n}}{2}\right)$;

c) dacă $\tau=\text{const}$, atunci

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{\Delta^2}{\rho^2}+\frac{\lambda^2}{\tau^4}\right)^{\frac{1}{2}};$$

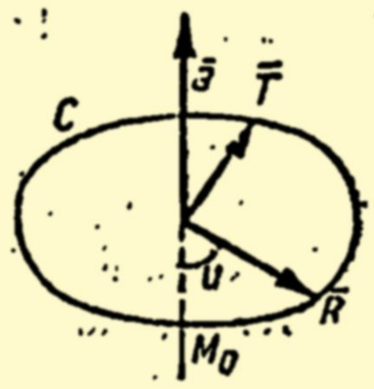


Fig. 162

d) să se calculeze $\cos(\bar{\tau}_1,\bar{\tau})$ pentru curba descrisă de $\bar{r}_1(u)$.

5. Se dă curba $\bar{r}(u)=\bar{R}e^{u}+\bar{T}e^{-u}+\bar{a}\operatorname{ch}u$, unde $\bar{a}$ este un vector constant de modul 1, $C$ un cerc de rază 1, al cărui plan este perpendicular pe $\bar{a}$ și $\bar{T}=\bar{R}'$ (fig. 162):

a) să se calculeze $ds$;

b) să se determine poziția triedrului $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ față de triedrul $\bar{T}$, $\bar{R}$, $\bar{a}$;

c) să se calculeze raportul $\frac{\rho}{\tau}$;

d) să se scrie ecuația normalei și a tangentei în punctul $u=0$;

e) să se scrie ecuația planului osculator în $u=0$;

f) dacă $s$ este abscisa curbilinie, care se anulează pentru $u=0$, să se arate că distanțele dela origine la planele osculator și normal sunt proporționale cu $s$, iar distanța dela origine la planul rectificant este proporțională cu curbura și torsiunea curbei.

6. Fie

$$\bar{r}(u) = 2u\bar{i} + \left(2u - \frac{1}{3}u^2\right)\bar{j}$$

vectorul de poziție al punctelor unei curbe $C$.

Să se arate că:

a) curba $C$ este o parabolă;

b) să se scrie ecuația tangentei și a normalei la curbă.

7. Să se determine curbura și torsiunea curbei

$$\bar{r}(u) = \bar{i}(u - \sin u) + \bar{j}u + \bar{k}(1 - \cos u).$$

8. Fie $\bar{r}(u) = u\bar{\rho} + \bar{\rho} \times \bar{\nu}(u)$ vectorul de poziție al unei curbe $C$, unde $\bar{\rho}$ este un versor constant, iar $\bar{\nu}(u)$ un versor perpendicular pe $\bar{\rho}$, a cărui viteză unghiulară este constantă.

Să se arate că:

a) tangenta la curbă face un unghi constant cu $\bar{\rho}$;

b) derivata tangentei este perpendiculară pe $\bar{\rho}$;

c) să se calculeze elementul de arc, curbura și torsiunea curbei.

9. Se consideră curba

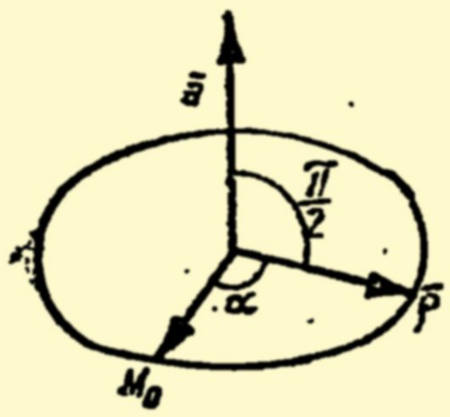



Fig. 163

$$\bar{r}(u) = \bar{i}\, a\cos u + \bar{j}\, a\sin u + \bar{k}\, bu,$$

unde $a$ și $b$ sunt două constante:

a) să se calculeze elementul de arc $ds$;

b) să se calculeze curbura și torsiunea;

c) să se scrie ecuația planului osculator în $u = 0$.

10. Să se studieze curba

$$\bar{r}(u) = \bar{i}\, a\cos^3 u + \bar{j}\, b\sin^3 u,$$

unde $a$ și $b$ sunt constante și să se calculeze lungimea ei totală.

Indicație. Se poate folosi substituția $\cos 2u = t$.

11. Fie curba

$$\bar{r}(u) = \bar{i}u^2 + \bar{j}u^3 + \bar{k}\,\frac{9}{16}u^4.$$

Să se determine triedrul lui Frenet și să se calculeze raza de curbură și vectorul de poziție al centrului de curbură. Să se calculeze torsiunea.

12. Fie curba

$$\bar{r}(u) = \bar{i}\left(\frac{u^3}{3} + u^2 - u\right) + \bar{j}\left(\frac{u^3}{3} - u^2 - u\right) + k\left(\frac{u^3}{3} + u\right).$$

Să se determine triedrul lui Frenet și să se calculeze curbura și torsiunea curbei.

13. Fie curbele

$$\bar{r}(u) = \bar{i}\cos u + \bar{j}\sin u + \bar{k}\log\sin u$$

și

$$\bar{r}(u) = \bar{i}e^{\frac{u}{\sqrt{2}}} + \bar{j}e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}}.$$

Să se determine triedrele lui Frenet și să se calculeze curburile, torsiunile și vectorii de poziție ai centrelor de curbură pentru cele două curbe.

14. Se dă curba

$$\bar{r}(\alpha) = \bar{\rho}(\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) + \bar{a}\alpha,$$

unde $\bar{a}$ și $\bar{\rho}$ sunt vectorii din fig. 163; $|\bar{a}| = |\bar{\rho}| = 1$ și $\bar{a}$ este constant:

a) Să se determine elementul de arc $ds$, curbura $\frac{1}{\rho}$ și torsiunea $\frac{1}{\tau}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) să se calculeze unghiurile dintre vectorii $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ și vectorul $\bar{a}$;
c) să se scrie ecuația tangentei și a planului osculator la curbă în punctul $\alpha=0$.

**15.** Fie

$$\bar{r}(u)=\sin u\,[\bar{a}\times\bar{\rho}(u)]+u\bar{a}$$

unde $\bar{a}$ și $\bar{\rho}$ sunt versori și $\bar{a}$ este constant (fig. 164):
a) să se determine arcul $s$ în ipoteza $s=0$ pentru $u=0$;
b) să se determine curbura și torsiunea;
c) să se calculeze suma $\cos(\bar{a},\bar{t})+\cos(\bar{a},\bar{n})+\cos(\bar{a},\bar{b})$;
d) să se scrie ecuația planului rectificant și a normalei în punctul $u=0$.

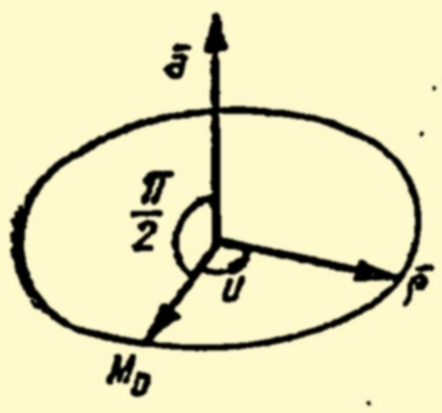


Fig. 164

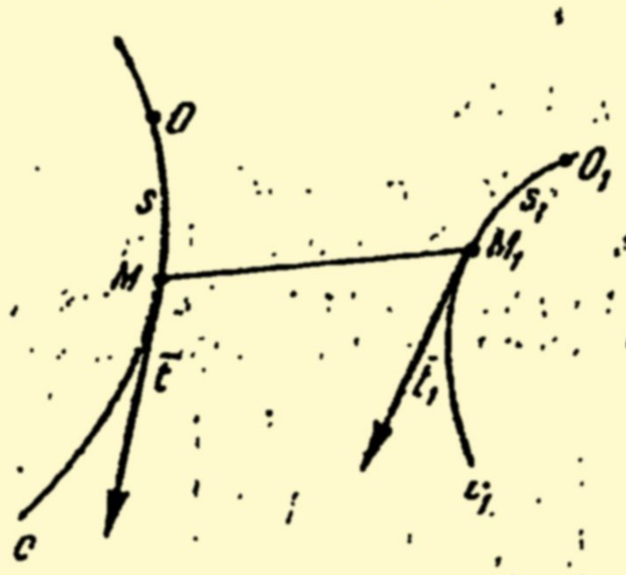


Fig. 165

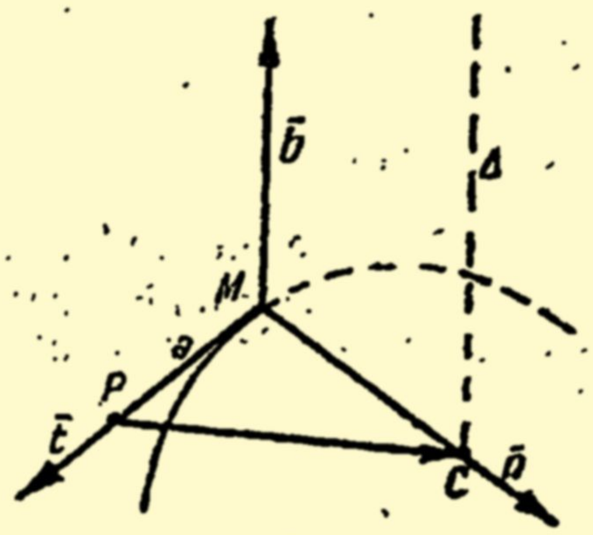


Fig. 166

**16.** Dacă un segment de dreaptă se mișcă pe două curbe orientate, cu notațiile din fig. 165, avem relația

$$d|\overline{MM_1}|=-ds\cos(\overline{M_1M},\bar{\tau})-ds_1\cos(\overline{MM_1},\bar{\tau}_1).$$

Indicație. Avem $d\overline{MM_1}=\bar{\tau}_1 ds_1-\bar{\tau}ds$. Dacă se multiplică scalar cu $\overline{MM_1}$ și se ține seama că $\overline{MM_1}\cdot d\overline{MM_1}=|MM_1|\,d|MM_1|$, se obține relația din enunț.

**17.** Pe tangenta orientată în $M$ a unei curbe strâmbe se ia punctul $P$, astfel ca $|MP|=a$. Să se arate că planul normal în $P$ la curba descrisă de acest punct trece prin axa polară relativă la $M$ a curbei inițiale (fig. 166).

Indicație. Fie $C$ centrul de curbură în $M$ la curba dată și $\Delta$ axa polară care trece prin $C$ și este paralelă cu $\bar{b}$. Vom arăta că diferențiala vectorului de poziție al punctului $P$ este perpendiculară pe planul $PC\Delta$.

Din $\bar{P}=\bar{r}+a\bar{\tau}$ deducem că

$$d\bar{P}=\left(\bar{\tau}+\frac{a}{\rho}\bar{n}\right)ds$$

este paralel cu planul osculator în $M$ la curba dată. Apoi

$$\overline{PC}=\bar{n}\rho-a\bar{t}$$

și

$$\overline{PC}\cdot d\bar{P}=\left(\bar{\tau}+\frac{a}{\rho}\bar{n}\right)(\bar{n}\rho-a\bar{t})\,ds\equiv 0.$$

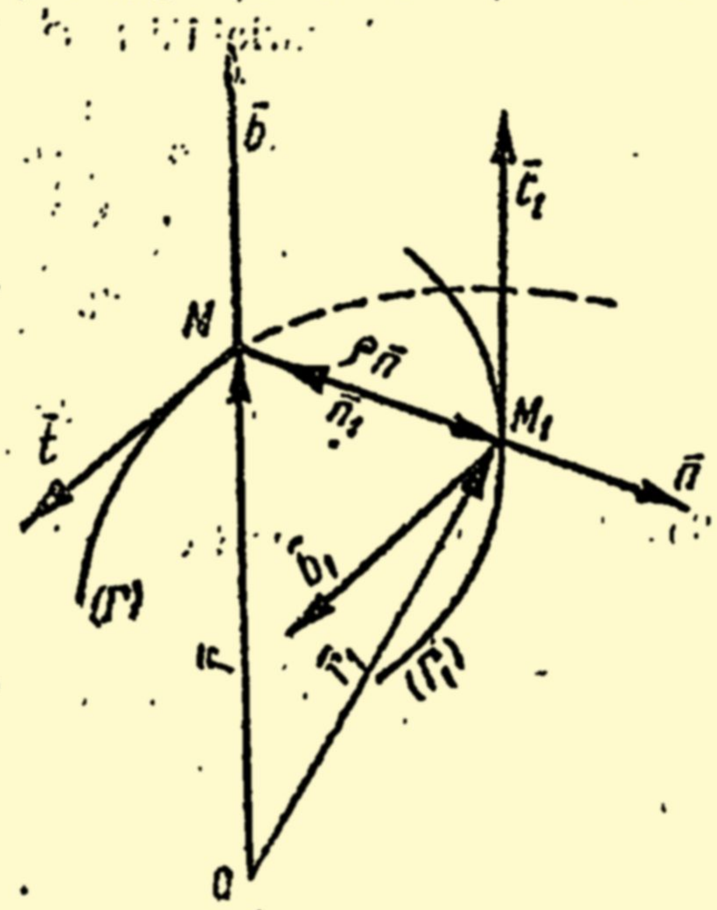


Fig. 167

**18.** Fie $\Gamma$ o curbă cu curbură constantă și $\Gamma_1$ curba descrisă de centrul $M_1$ de curbură în $M$ al curbei $\Gamma$. Să se arate că $M$ este centrul de curbură în $M_1$ la curba $\Gamma_1$ și că tangentele în $M_1$ și $M$ la cele două curbe $\Gamma_1$ și $\Gamma$ sunt, respectiv, axele polare în $M$ și $M_1$ la curbele $\Gamma$ și $\Gamma_1$ (fig 167).

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Avem pentru vectorii de poziție ai punctelor $M$ și $M_1$

$$\bar{r}_1=\bar{r}+\bar{n}\rho;$$

$$\frac{d\bar{r}_1}{ds_1}=\bar{t}_1=\frac{ds}{ds_1}\left[\bar{\tau}+\rho\left(-\frac{\bar{t}}{\rho}+\frac{\bar{b}}{\tau}\right)\right]=\frac{ds}{ds_1}\,\frac{\rho}{\tau}\,\bar{b},$$

deci

$$\bar{t}_1=\bar{b} \quad \text{și} \quad \frac{\rho}{\tau}\,ds=ds_1.$$

Apoi

$$\frac{dt_1}{ds_1}=\frac{\bar{n}_1}{\rho_1}=\frac{d\bar{b}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1}=-\frac{\bar{n}}{\tau}\cdot\frac{\tau}{\rho},$$

deci

$$\bar{n}_1=-\bar{n} \quad \text{și} \quad \rho=\rho_1.$$

Deasemenea

$$\bar{b}_1=\bar{t}_1\times\bar{n}_1=\bar{b}\times(-\bar{n})=\bar{t}.$$

**19.** Să se determine o curbă strâmbă știind că trece printr'un punct fix dat $O$, că $\rho=-\tau=s\sqrt{2}$, arcul fiind socotit din punctul $O$ și că tabela cosinusurilor directoare în punctul $M_0$, de abscisă $s=1$, față de un sistem de axe $Oxyz$ dat, este

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\bar{t}_0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\bar{n}_0$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $b_0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

Indicație. Notând $\bar{\tau}\,(\alpha,\beta,\gamma)$, $\bar{n}\,(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\bar{b}\,(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, avem

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{s\sqrt{2}},\quad \frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{s\sqrt{2}},\quad \frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{s\sqrt{2}}-\frac{\alpha_2}{s\sqrt{2}},$$

iar $(\beta,\beta_1,\beta_2)$ și $(\gamma,\gamma_1,\gamma_2)$ satisfac aceleași ecuații diferențiale cu alte condiții inițiale. Se face schimbarea de variabilă $s=e^t$ și se găsește, integrând sistemul precedent,

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t;\quad \beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t;\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\alpha_1=-\sin t;\quad \beta_1=-\cos t;\quad \gamma_1=0;$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t;\quad \beta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t;\quad \gamma_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ținând seama că curba trece prin $O$, avem

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{t}e^{\lambda}\cos\lambda\,d\lambda;\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{t}e^{\lambda}\sin\lambda\,d\lambda;\quad z=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{t}e^{\lambda}\,d\lambda$$

sau

$$x=\frac{e^t}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right);\quad y=\frac{e^t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right);\quad z=\frac{e^t}{2}\sqrt{2}.$$

Curba este o elice conică, trasată pe conul de rotație în jurul lui $Oz$, de ecuație

$$2(x^2+y^2)=z^2$$

Scanned with OKEN Scanner

**20.** Se consideră o elice conică trasată pe un con circular drept (v. exercițiul 19). Să se arate că lungimea unui arc $\overset{\frown}{AB}$ este proporțională cu diferența distanțelor $|\overline{SB}|-|\overline{SA}|$ ale capetelor arcului la vârful $S$ al conului. Se va determina și lungimea unui arc $\overset{\frown}{SA}$ al elicei.

Indicație. Se va considera o reprezentare parametrică a elicei conice, trasate pe un con circular drept, cu $S$ în origine și cu axa $Sz$ ca axă de simetrie.

**21.** Să se arate că traectoria descrisă de vârful vectorului

$$\bar{r}(t)=\bar{i}\sin 2t+\bar{j}(1-\cos 2t)+2\bar{k}\cos t$$

se află pe suprafața unei sfere.

Indicație. Se va calcula $|\bar{r}(t)|$.

**22.** Dacă planul osculator al unei curbe trece printr'un punct fix, curba este plană.

Indicație. Se ia punctul fix drept origine a vectorilor de poziție și avem $\bar{r}\bar{b}=0$. Derivând, rezultă că

$$\bar{t}\bar{b}-\bar{r}\frac{\bar{n}}{\tau}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\tau}\bar{r}\bar{n}=0. \quad \text{Deci, sau} \quad \frac{1}{\tau}=0$$

și în acest caz curba este plană, sau $\bar{r}\bar{n}=0$. Însă avem și $\bar{r}\bar{b}=0$, deci $\bar{r}$ este paralel cu $\bar{t}$ Derivând relația $\bar{r}\bar{n}=0$, avem

$$\bar{t}\bar{n}+\bar{r}\left(-\frac{t}{\rho}+\frac{\bar{b}}{\tau}\right)=0, \quad \text{adică} \quad \frac{1}{\rho}\bar{r}\bar{t}=0$$

Sau, $\frac{1}{\rho}=0$ și atunci curba se reduce la o linie dreaptă, sau $\bar{r}\bar{t}=0$, ceeace este imposibil, fiindcă $\bar{r}$ este paralel cu $\bar{t}$.

**23.** Curbele, ale căror tangente întâlnesc o dreaptă fixă, sunt curbe plane, situate într'un plan ce trece prin dreapta fixă.

Indicație: Se va ține seama de faptul că o curbă ale cărei tangente trec printr'un punct fix, se reduc la drepte.

**24.** Curbele $\Gamma$, ale căror normale principale sunt normale la o altă curbă $\Gamma_1$, sunt acelea pentru care există o relație liniară între curbură și torsiune. Planele osculatoare la cele două curbe $\Gamma$ și $\Gamma_1$ în punctele corespunzătoare $M$ și $M_1$ fac un unghi constant. Fie $C$ și $C_1$ centrele de curbură în $M$ și $M_1$; raportul anarmonic $(MM_1CC_1)$ este constant. Produsul torsiunilor în $M$ și $M_1$ la cele două curbe este, deasemenea constant. (Curbele lui *Bertrand*).

Indicație. Ținând seama de exercițiul 16, rezultă că $d|\overline{MM_1}|=0$, deci segmentul $MM_1$ este constant și îl vom nota cu $a$. Fie $\bar{r}_1$ vectorul de poziție a punctului $M_1$. Dreapta $MM_1$ este normala principală la curba $\Gamma_1$, dacă este conținută în planul determinat de vectorii $d\bar{r}_1$ și $d^2\bar{r}_1$, adică dacă produsul mixt $(\bar{n}\,d\bar{r}_1\,d^2\bar{r}_1)=0$. Avem: $\bar{r}_1=\bar{r}+a\bar{n}$,

$$\frac{dr_1}{ds}=\bar{t}\left(1-\frac{a}{\rho}\right)+\frac{a}{\tau}\bar{b},$$

$$\frac{d^2\bar{r}_1}{ds^2}=\bar{t}\left(1-\frac{a}{\rho}\right)'+\bar{n}\left[\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{a}{\rho}\right)-\frac{a}{\tau^2}\right]+\left(\frac{a}{\tau}\right)'\bar{b}.$$

Aplicând formula lui Gram generalizată, vom avea

$$\left[\bar{n},\frac{d\bar{r}_1}{ds},\frac{d^2\bar{r}_1}{ds^2}\right]=[\bar{t},\bar{n},\bar{b}]\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left(1-\frac{a}{\rho}\right) & 0 & \frac{a}{\tau} \\ \left(1-\frac{a}{\rho}\right)' & 0 & \left(\frac{a}{\tau}\right)' \end{vmatrix},$$

de unde rezultă

$$\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(\frac{a}{\tau}\right)'=\left(1-\frac{a}{\rho}\right)'\frac{a}{\tau},$$

deci

$$\frac{a}{\rho}+\frac{ka}{\tau}=1,$$

unde $k$ este o a doua constantă.

**25.** Dacă raza sferei osculatoare la o curbă strâmbă este constantă, atunci: ori curba este situată pe o sferă, ori raza de curbură este constantă.

**Indicație.** Notând cu $R$ raza sferei osculatoare și cu $\bar{r}_1$ vectorul de poziție al centrului său, avem:

$$R^2=\rho^2+\tau^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 \quad \text{și} \quad \bar{r}_1=\bar{r}+\bar{n}\rho+\bar{b}\tau\frac{d\rho}{ds}.$$

Dacă $R^2$ este constantă, vom avea

$$\frac{1}{2}\frac{dR^2}{ds}=\frac{d\rho}{ds}\left[\rho+\tau^2\frac{d^2_\rho}{ds^2}+\tau\frac{d\tau}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right]=0.$$

Deci ori $\rho=\text{const}$, ori paranteza este nulă. Însă

$$\frac{d\bar{r}_1}{ds}=\bar{t}+\rho\left(-\frac{\bar{t}}{\rho}+\frac{\bar{b}}{\tau}\right)+\bar{n}\frac{d\rho}{ds}-\frac{\bar{n}}{\tau}\tau\frac{d\rho}{ds}+\bar{b}\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)=\bar{b}\frac{1}{\tau}\left[\rho+\tau^2\frac{d^2\rho}{ds^2}+\tau\frac{d\tau}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right],$$

de unde se deduce că centrul sferei osculatoare este fix.

Cazul când torsiunea este nulă — curba plană — este un caz limită, cuprins mai sus.

**26.** Dacă planul osculator la o curbă strâmbă rămâne mereu tangent la o sferă de centru $O$, atunci: 1) planul rectificant trece prin $O$; 2) raportul dintre torsiune și curbură este o funcție liniară de arc. Reciproc, proprietățile 1) sau 2) caracterizează curbele alecăror plane osculatoare înfășoară o sferă.

**Indicație.** Avem $\bar{b}\,\bar{r}=\text{const}$. Derivând în raport cu $s$ rezultă că $\frac{d\bar{b}}{ds}\bar{r}+\bar{b}\frac{d\bar{r}}{ds}=0$.

Al doilea factor este nul, iar primul — deoarece $\frac{1}{\tau}\neq 0$ — ne dă $\bar{r}\,\bar{n}=0$.

**27.** O dreaptă perpendiculară pe o axă $\Delta$ se mișcă sprijinindu-se pe $\Delta$ și pe o elice circulară dreaptă, de pas $2\pi b$ și de axă $\Delta$. Se consideră și un paraboloid de rotație $P$, de axă $\Delta$ și de parametru $\frac{1}{2}b$. Dreapta mobilă taie paraboloidul $P$ după o curbă $\Gamma$, care trece prin vârful $A$ a lui $P$. Luând originea în $A$, să se găsească lungimea arcului curbei $\Gamma$. Să se demonstreze că ea este egală cu $r+\frac{2}{3}\frac{r^3}{b^2}$, unde $r$ este distanța extremității arcului până la axa $\Delta$. (Geometrie diferențială de *M. I. Vâgodscht*, p. 76).

**28.** Să se evalueze distanța $\delta$ dela un punct $M'$ al unei curbe strâmbe $\Gamma$ până la planul osculator, dus într'un punct $M$ infinit vecin. (Idem, p. 93).

**Indicație.** Se va găsi că în cazul când $M$ este un punct ordinar

$$\delta=\frac{1}{6}\frac{(\bar{r}'\,\bar{r}''\,\bar{r}''')}{|\bar{r}'\times\bar{r}''|}\Delta u^3+\ldots.$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului $M$, iar $u$ este parametrul pe curbă.

**29.** Fie $\Gamma$ o curbă strâmbă și $A$, $B$, $C$, trei puncte infinit vecine, astfel ca $C$ să fie la mijlocul arcului $AB$. Să se arate că planul osculator în $C$ face cu planul $ABC$ un unghi, care este un infinit mic de ordinul al doilea față de lungimea arcului $AB$, luat ca infinit mic principal. (Idem p. 95).

Scanned with OKEN Scanner

**Indicație.** Notând cu $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ vectorii de poziție ai punctelor $A$, $B$ și $C$, avem

$$\bar{r}_B - \bar{r}_C = \bar{r}'_C \Delta s + \frac{1}{2}\bar{r}''_C \Delta s^2 + \frac{1}{6}\bar{r}'''_C \Delta s^3 + \frac{1}{24}\bar{r}^{IV} \Delta s^4 + \dots$$

$$\bar{r}_C - \bar{r}_A = \bar{r}'_C \Delta s - \frac{1}{2}\bar{r}''_C \Delta s^2 + \frac{1}{6}\bar{r}'''_C \Delta s^3 - \frac{1}{24}\bar{r}^{IV} \Delta s^4 + \dots$$

Rezultă de aci că vectorul normal planului $ABC$ este dat de

$$\bar{u} = \bar{r}'_C \times \bar{r}''_C + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(\bar{r}'_C \times \bar{r}^{IV}_C) - (\bar{r}''_C \times \bar{r}'''_C)\right]\Delta s^2 + \dots$$

și deci diferă de vectorul normal la planul osculator în $C$, caracterizat prin $\bar{r}'_C \times \bar{r}''_C$, prin mărimea care figurează în al doilea termen în desvoltarea lui $\bar{u}$.

30. Fie $M$ și $M'$ două puncte infinit vecine pe o curbă strâmbă.

Să se găsească partea principală a celei mai scurte distanțe între normalele principale în aceste două puncte și poziția limită a piciorului perpendicularei comune fig. 168).

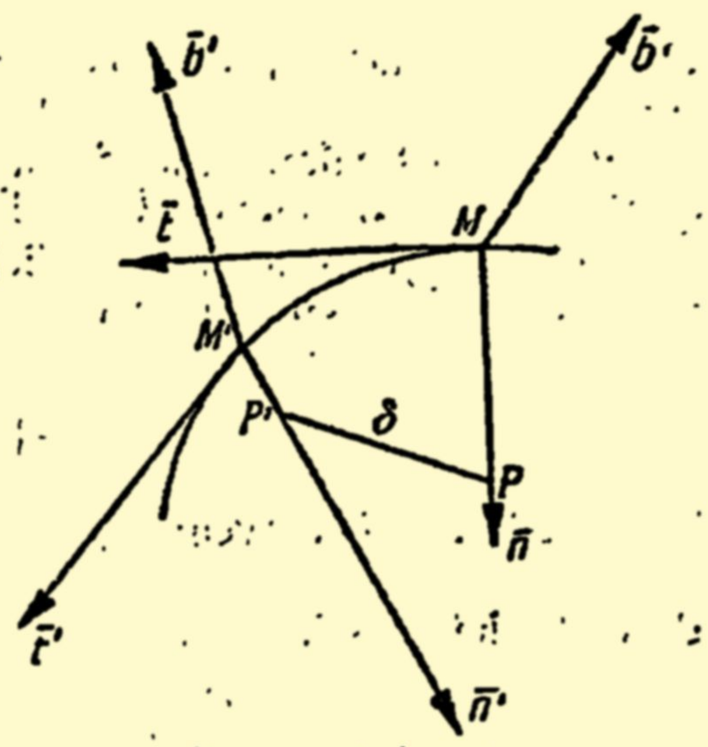


Fig. 168

**Indicație.** Se va găsi că distanța $\delta$ este echivalentă cu

$$\frac{\rho \Delta s}{\sqrt{\rho^2 + \tau^2}},$$

unde $\Delta s$ este lungimea arcului $MM'$, iar poziția limită este dată de $|\overline{MP_1}| = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2+\tau^2}$, unde $P_1$ este limita punctului $P$ pe normala principală în $M$.

31. Fie $\bar{r}(s)$ vectorul de poziție al unui punct de pe o curbă strâmbă. Să se calculeze expresia

$$E = \frac{1}{\rho^2 \tau}$$

și derivatele sale în raport cu $s$.

**Indicație.** Se știe că în funcție de arcul $s$ avem

$$\frac{1}{\rho} = |\bar{r}''| \quad \text{și} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')}{|\bar{r}''|^2},$$

deci

$$E = (\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''').$$

Rezultă de aci că

$$\frac{dE}{ds} = (\bar{r}'\bar{r}'''\bar{r}^{IV}); \quad \frac{d^2E}{ds^2} = (\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}^{IV}) + (\bar{r}'\bar{r}'''\bar{r}^{V})$$

și

$$\frac{d^3E}{ds^3} = (\bar{r}''\bar{r}'''\bar{r}^{IV}) + 2(\bar{r}'\bar{r}'''\bar{r}^{V}) + (\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}^{VI}).$$

32. Se numește *elice* o curbă ale cărei tangente fac un unghi constant cu o direcție dată $\Delta$.

Fie $O$ originea pe $\Delta$, $Oxyz$ un sistem de axe rectangulare în care $Oz$ coincide cu $\Delta$. Fie $s$ arcul de elice, socotit din punctul $A$, unde curba înțeapă planul $xOy$ și $V$ unghiul constant al tangentelor cu $\Delta$; $(x, y, z)$, coordonatele unui punct de pe elice.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

a) $z=s\cos V$ și că reciproc, această proprietate caracterizează elicea;

b) $z=\sigma \operatorname{ctg} V$, unde $\sigma$ este arcul de curbă al proiecției elicei pe planul $xOy$ și reciproc, această proprietate caracterizează elicea;

c) normala principală este perpendiculară pe $\Delta$ și reciproc, această proprietate caracterizează elicea;

d) între curburile elicei și a proiecției sale pe $xOy$ avem relația

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sin^2 V}{\rho_1};$$

e) între curbură și torsiune avem relația

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\varepsilon \operatorname{tg} V}{\tau} \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

și reciproc, curba pentru care raportul dintre curbură și torsiune este constant, este o elice;

f) în particular, să se demonstreze că curba, ale cărei curbură și torsiune sunt constante, fără să fie nule, este o elice circulară dreaptă;

g) condiția necesară și suficientă ca o curbă strâmbă, care nu este redusă la o linie dreaptă, să fie o elice, este ca

$$\frac{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}^{IV})}{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')}=\frac{3}{|\bar{r}''|^2}.$$

Indicație. Avem

$$\bar{t}\bar{k}=\cos V \qquad (\alpha)$$

de unde, integrând,

$$z=s\cos V. \qquad (\beta)$$

Fie $\bar{r}_1$ vectorul de poziție, proiecție al lui $\bar{r}$ și $\bar{t}_1$, versorul tangentei la proiecția elicei. Avem

$$\bar{t}=\bar{t}_1\sin V+\bar{k}\cos V, \qquad (\gamma)$$

$$\bar{r}=\bar{r}_1+z\bar{k}. \qquad (\delta)$$

Derivându-le și ținând seama de ($\beta$), se găsește că $z=s\operatorname{ctg} V$.

Derivând pe ($\alpha$) și ținând seama că $\frac{1}{\rho}\neq 0$, se obține

$$\bar{n}\bar{k}=0. \qquad (\varepsilon)$$

Derivând această relație, avem

$$\bar{b}\bar{k}=\varepsilon\sin V, \qquad (\zeta)$$

unde

$$\varepsilon=\pm 1,$$

sau

$$\frac{\rho}{\tau}=\varepsilon\operatorname{tg} V. \qquad (\eta)$$

Ultima relație se demonstrează plecând dela relația $\frac{\rho}{\tau}=\frac{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')}{|\bar{r}''|^3}$, pe care o derivăm în raport cu $s$, observând că $\frac{d}{ds}|\bar{r}''|=\frac{\bar{r}''\cdot\bar{r}'''}{|\bar{r}''|}$.

Scanned with OKEN Scanner

## B) SUPRAFEŢE ÎN SPAŢIU

### § 184. Reprezentarea vectorială a suprafeţelor

Noţiunea de suprafaţă fiind luată din experienţa practică este, ca şi aceea de curbă, greu de definit în termeni geometrici. Dacă spaţiul este raportat la un sistem de referinţă cartezian, se numeşte *suprafaţă* mulţimea punctelor $M$, ale căror coordonate verifică o relaţie de forma

$$F(x, y, z)=0, \qquad (73,VI)$$

unde $F(x, y, z)$ este o funcţie continuă într'un domeniu $D$ din spaţiu. Această definiţie este prea generală pentru nevoile aplicaţiilor şi conduce la unele suprafeţe, care nu corespund cu imaginea intuitivă.

Presupunând că funcţia $F(x, y, z)$ şi derivata sa parţială $\frac{\partial F}{\partial z}$ sunt continue în domeniul unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, care verifică ecuaţia suprafeţei $F(x_0, y_0, z_0)=0$ şi condiţia

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}\neq 0,$$

teorema funcţiilor implicite arată că ecuaţia (73,VI) se poate rezolva în raport cu $z$, deci că există o funcţie

$$z=f(x, y) \qquad (74,VI)$$

continuă în domeniul punctului $(x_0, y_0)$, care verifică identic ecuaţia (73,VI)

$$F[x, y, f(x, y)]\equiv 0.$$

Dacă $F(x, y, z)$ este o funcţie *diferenţiabilă continuu*, deci diferenţiabilă, şi cu derivate parţiale continue în raport cu $x, y, z$, în domeniul lui $M_0$[1]) funcţia $f(x, y)$ va fi şi ea diferenţiabilă continuu în vecinătatea punctului $m_0(x_0, y_0)$ (fig. 169).

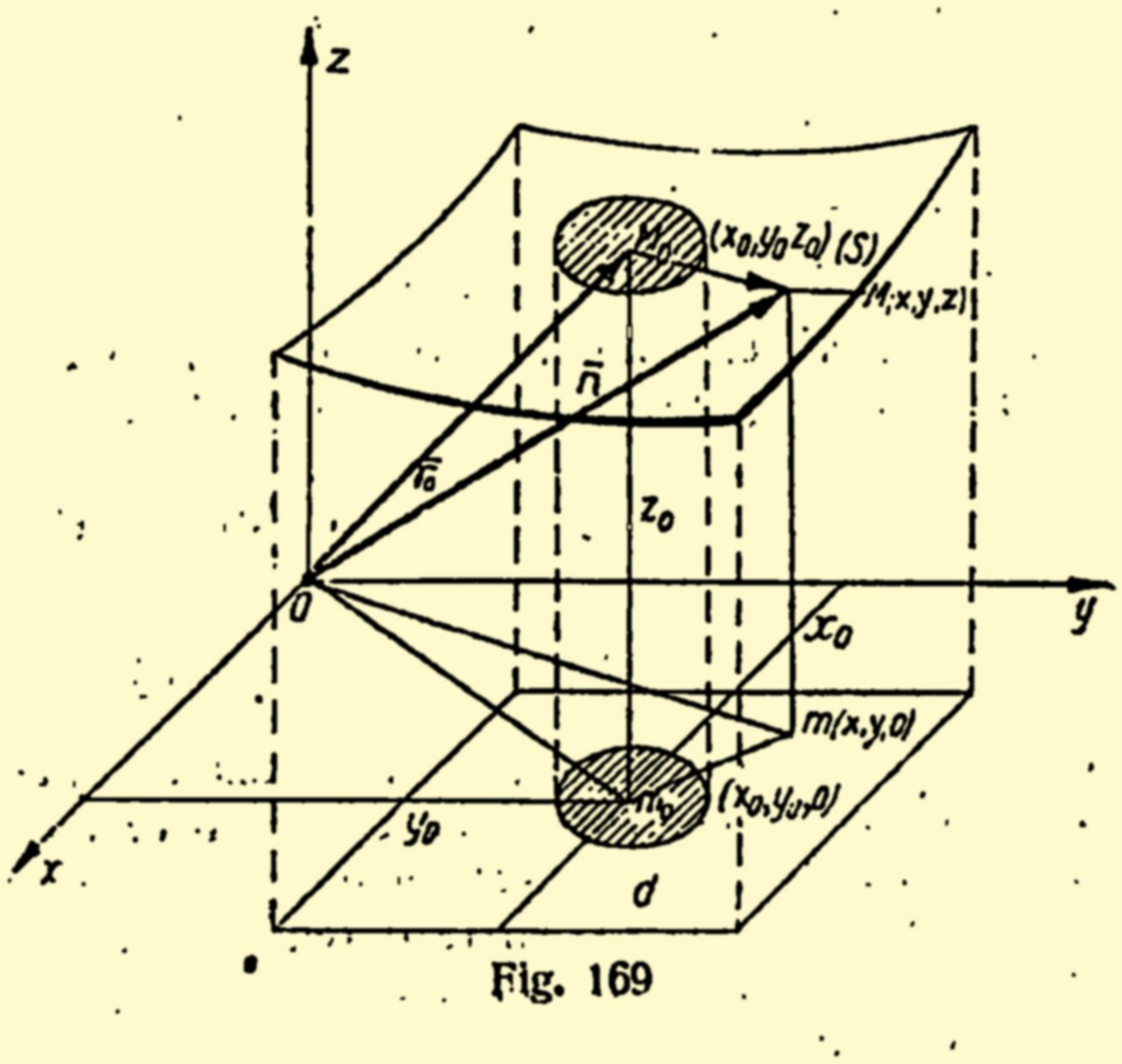



Fig. 169

Prin aceasta, relaţia (73,VI), care reprezintă *ecuaţia implicită* a suprafeţei $S$, este pusă sub forma explicită (74,VI), care reprezintă *ecuaţia explicită* a suprafeţei $S$.

Foloasele, pe care le aduce exprimarea explicită a ecuaţiei unei suprafeţe, sunt numeroase şi decurg din faptul că *una dintre coordonate poate fi calculată efectiv în funcţie de celelalte două, pentru o infinitate de valori ale acestora.*

---

[1]) In acest caz vom spune deasemenea că $F(x, y, z)$ este *regulată* de clasa $C^p$, cu $p\geq 1$, deci de clasa $C^1$ cel puţin.



Scanned with OKEN Scanner

In ecuația explicită (74,VI) $x$ și $y$ variază independent și constitue coordonatele punctului $m(x, y, 0)$, proiecția punctului $M(x, y, z)$ de pe suprafață pe planul $xOy$. Intre punctele porțiunii de suprafață $S$ și punctele unei porțiuni $d$ din planul $xOy$ se stabilește o corespondență biunivocă, fiecărui punct $M$ de pe $S$ corespunzându-i proiecția sa $m$ făcută paralel cu $Oz$ și invers, oricărui punct $m(x, y)$ din $d$ îi corespunde un punct $M$ pe $S$. Astfel, coordonatele $x$ și $y$ se înfățișează ca doi parametri, care determină poziția unui punct $M$ al suprafeței.

Când poziția unui punct este determinată prin $k$ parametri, se spune că punctul are *$k$ grade de libertate*. Un punct de pe o suprafață are deci $k=2$. grade de libertate, iar un punct de pe o curbă are $k=1$ grade de libertate.

Asociind punctului $M$, care descrie o porțiune de suprafață $S$, vectorul său de poziție $\overline{OM}=\bar{r}$, acest vector va fi variabil, depinzând de cei doi parametri $x$ și $y$. Vom putea pune

$$\bar{r}=\bar{r}(x, y)=x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}=x\bar{a}+y\bar{b}+f(x, y)\,\bar{c},$$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ fiind vectorii fundamentali.

Mai general, independent de raportarea spațiului la un sistem de referință cartezian, vom putea considera un vector de poziție $\bar{r}$ variabil, în funcție de doi parametri $u$ și $v$. Presupunând funcția $\bar{r}(u, v)$ diferențiabilă continuu, când $u$ și $v$ variază în două intervale determinate, *vom numi suprafață locul extremităților vectorilor* $\bar{r}(u, v)$, iar

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v) \qquad (75,VI)$$

va fi *ecuația vectorială* a suprafeței.

Punctul $M$, extremitatea vectorului $\bar{r}=\overline{OM}$, are două grade de libertate. Dacă raportăm spațiul la un triedru fundamental, vom putea scrie

$$\bar{r}=x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}=x(u, v)\,\bar{a}+y(u, v)\,\bar{b}+z(u, v)\,\bar{c},$$

deci

$$x=x(u, v);\quad y=y(u, v);\quad z=z(u, v); \qquad (76,VI)$$

unde $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sunt funcții diferențiabile continuu de $u$ și $v$. Vom numi relațiile (76,VI) *ecuațiile parametrice* ale suprafeței. Pentru ca definiția vectorială dată suprafețelor să corespundă celei inițiale, trebue ca între funcțiile (76,VI) să existe o relație și numai una, exprimată cu ajutorul unei funcții diferențiabile continuu de $x, y, z$, și obținută prin eliminarea parametrilor $u$ și $v$.

Pentru aceasta este *necesar și suficient ca unul cel puțin dintre determinanții funcționali*

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)};\quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)};\quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \qquad (77,VI)$$

*să nu se anuleze identic în domeniul descris de* $(u, v)$.

Dacă cei trei determinanți funcționali (77,VI) sunt identic nuli, punctul $M$ descrie o curbă sau este fix.

Scanned with OKEN Scanner

Este, însă, posibil ca în unele puncte, numite *singulare în reprezentarea parametrică utilizată*, să avem pe suprafaţă

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=0; \qquad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}=0; \qquad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}=0;$$

Punctele, în care cel puţin unul din aceşti determinanţi este diferit de zero, se numesc *ordinare*. In domeniul unui punct ordinar, vom putea elimina parametrii $u$ şi $v$, punând suprafaţa sub forma explicită (74,VI), care este un caz particular de reprezentare parametrică a unei suprafeţe.

Vom numi *proprie* reprezentarea parametrică în domeniul unui punct ordinar.

Reprezentarea vectorială nu implică raportarea spaţiului la un sistem de referinţă, suprafaţa fiind definită direct cu ajutorul vectorului de poziţie.

**Exemplu:** *Suprafeţele riglate.* Sunt suprafeţe născute de o familie de drepte, care se sprijină pe o curbă $C_0$.

Dacă notăm cu $\bar{r}_0(u)$ vectorul de poziţie al punctului $M_0$, comun dreptei $D$ din familie şi curbei $C_0$, şi cu $\bar{p}(u)$ versorul lui $D$, un punct oarecare $M$ de pe dreaptă va avea vectorul de poziţie

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v)=\bar{r}_0(u)+v\bar{p}(u),$$

unde $v$ este un al doilea parametru.

Când $u$ variază, punctul $M$ descrie curba $C_0$ pe care se sprijină dreptele $D$, iar când $v$ variază, punctul $M$ descrie dreapta $D$.

Dacă $v$ este constant, iar $u$ variază, punctul $M$ va descrie deasemenea o curbă $C$ pe suprafaţa $S$.

Se pun astfel în evidenţă pe o suprafaţă riglată două familii de curbe: dreptele $D$ curbele $C$, obţinute făcând succesiv

$$u=\text{const} \quad \text{şi} \quad v=\text{const.}$$

Dacă funcţia $\bar{r}(u, v)$ este regulată de clasa $C^p$, vom putea pune ecuaţia vectorială a suprafeţei sub forma

$$\left.\begin{aligned}\bar{r}(u, v)=\bar{r}(u_0, v_0)+(u-u_0)\frac{\partial\bar{r}}{\partial u_0}+(v-v_0)\frac{\partial\bar{r}}{\partial v_0}+\\ +\frac{1}{2!}\left[(u-u_0)\frac{\partial\bar{r}}{\partial u_0}+(v-v_0)\frac{\partial\bar{r}}{\partial v_0}\right]^{(2)}+\cdots\\ \cdots+\frac{1}{p!}\left[(u-u_0)\frac{\partial\bar{r}}{\partial u_0}+(v-v_0)\frac{\partial\bar{r}}{\partial v_0}\right]^{(p)}+\bar{\epsilon},\end{aligned}\right\} \qquad (78,VI)$$

unde $\bar{\epsilon}$ este un vector, care tinde către zero în modul, când $(u, v)$ tinde către $(u_0, v_0)$.

In particular, dacă vectorul $\bar{r}(u, v)$ este analitic în domeniul lui $(u_0, v_0)$, desvoltarea (78,VI) devine o serie uniform convergentă şi reprezintă *o suprafaţă analitică* în domeniul punctului $(u_0, v_0)$. Orice desvoltare uniform convergentă de forma

$$\bar{r}(u, v)=\bar{r}_0+\bar{a}(u-u_0)+\bar{b}(v-v_0)+\bar{c}(u-u_0)^2+$$
$$+2\bar{d}(u-u_0)(v-v_0)+\bar{e}(v-v_0)^2+\cdots \qquad (78',VI)$$

unde $\bar{r}_0, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ sunt vectori constanţi, reprezintă o suprafaţă analitică.

In sfârșit, se poate pune sub formă vectorială și ecuația implicită a unei suprafețe, scriind

$$F(\bar{r}) = 0.$$

Vom avea o formă vectorială efectivă în cazul când funcția $F$ se poate realiza analitic printr'o expresie, în care $\bar{r}$ este supus la operații ale Calculului vectorial.

**Exemplu:** Ecuația sferei având centrul și raza date

$$(\bar{r}-\bar{r}_0)^2 - a^2 \equiv \bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}_0 + \bar{r}_0^2 - a^2 = 0.$$

In cele ce urmează vom folosi, în general, forma parametrică a ecuației vectoriale a suprafețelor: totuși, forma implicită joacă un rol important în teoria câmpurilor pentru reprezentarea suprafețelor *echipotențiale*, adică a familiei de suprafețe $F(x, y, z) = \lambda$, unde $\lambda$ este un parametru variabil.

## § (185) Reprezentarea parametrică și curbele coordonate

Intr'un punct ordinar al unei suprafețe, presupunând de exemplu că

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0,$$

din ecuațiile $x = x(u, v)$ și $y = y(u, v)$ putem deduce valorile lui $u$ și $v$ în funcție de $x$ și $y$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

de unde apoi

$$z = z(u, v) = z\left[u(x, y), v(x, y)\right] = Z(x, y). \qquad (79,VI)$$

La un sistem de valori $(u, v)$ corespunde un punct $M(x, y, z)$ pe suprafață și invers, la un sistem de valori $x, y, z = Z(x, y)$ corespunde un sistem de valori $u, v$, căruia putem să-i asociem un punct $m(u, v)$ într'un plan reprezentativ. Prin urmare: *în domeniul unui punct ordinar al unei suprafețe există o corespondență biunivocă între suprafața S, reprezentată parametric prin ecuațiile* (76,VI), *și o porțiune din planul* $(u, v)$, *respectiv, domeniul punctului ordinar considerat.*

Reprezentarea parametrică *biunivocă* a unei porțiuni formată din puncte ordinare este *proprie* (vezi și § 201). Această proprietate generalizează corespondența biunivocă între $S$ și porțiunea din planul $xOy$, acoperită de proiecțiile $m$ ale punctelor $M$ ale suprafeței $S$ pe acest plan și ne permite să considerăm parametrii $u$ și $v$ ca pe niște coordonate.

In planul $xOy$, ecuațiile

$$x = x_0 \quad \text{și} \quad y = y_0$$

reprezintă două paralele la axele de coordonate (fig, 169).

Pe de altă parte, formulele (79,VI), reprezintă o transformare a unei porțiuni din planul $xOy$ într'o porțiune din planul $(u, v)$. Dreptei $x = x_0$ îi va corespunde în acest plan o curbă, de ecuații

$$u = u(x_0, y), \quad v = v(x_0, y),$$

iar dreptei $y = y_0$ îi va corespunde o curbă analoagă.

Scanned with OKEN Scanner

Deasemenea, dreptelor $u=u_0$ și $v=v_0$ din planul $(u, v)$ le vor corespunde două curbe în planul $xOy$.

Ținând seama de analogiile constatate între $(x, y)$ și $(u, v)$, vom numi parametrii $u, v$ ce definesc un punct de pe suprafața $S$ *coordonate curbilinii* pe suprafață.

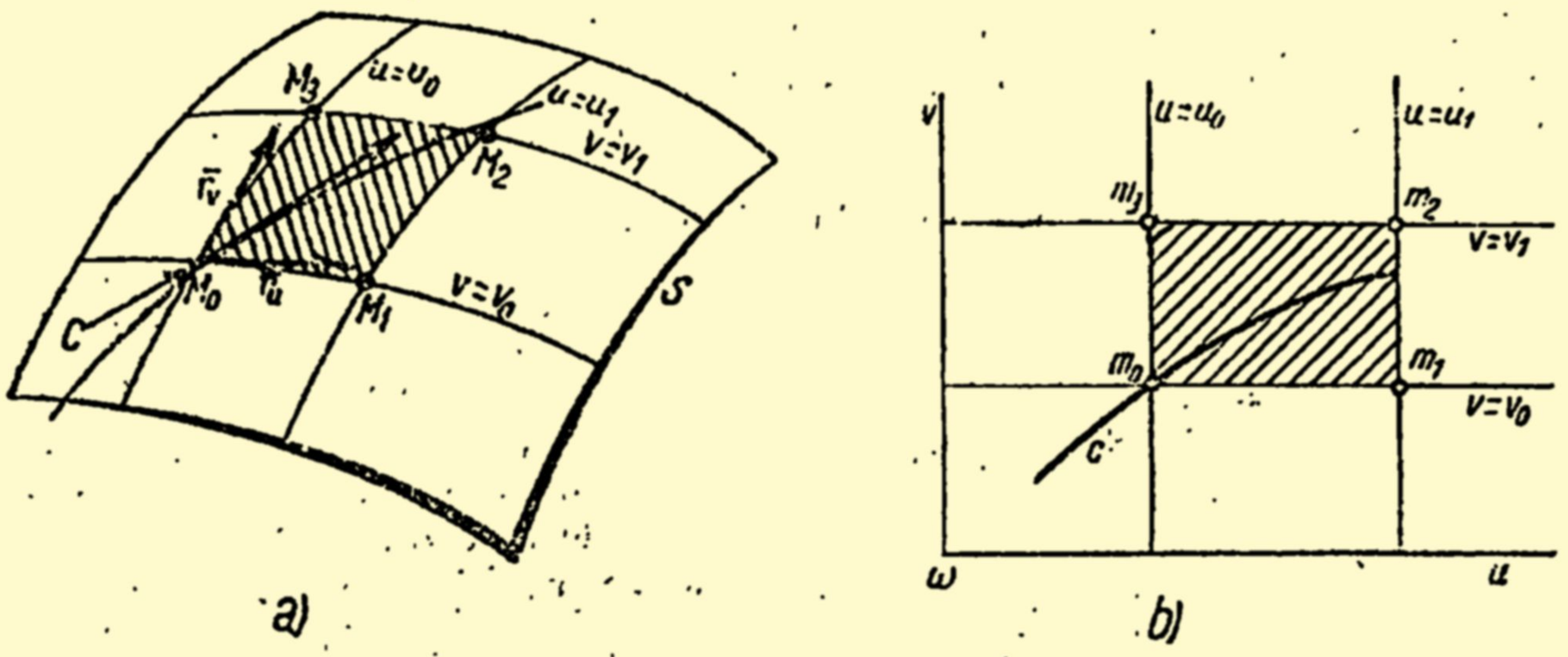



Fig. 170

Cu ajutorul acestor coordonate, introduse de *Gauss* în studiul suprafețelor, *orice punct* $M_0$ *de pe* $S$ *este determinat prin cele două coordonate* $u_0, v_0$, *tot așa cum orice punct din plan poate fi determinat prin coordonatele sale carteziene, sau prin două coordonate curbilinii,* de exemplu polare.

Liniei drepte $u=u_0$ din planul $(u, v)$ îi va corespunde curba de ecuație vectorială

$$\bar{r}=\bar{r}(u_0, v),$$

care se găsește evident pe suprafața $S$. Liniei drepte $v=v_0$ îi va corespunde pe $S$ curba de ecuație

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v_0).$$

Punctul $M_0$, definit prin vectorul său de poziție,

$$\bar{r}_0=\bar{r}(u_0, v_0)$$

se va găsi la intersecția acestor curbe (fig. 170).

Vom numi *curbe coordonate* sau *linii parametrice* pe suprafața $S$ de ecuație vectorială $\bar{r}=\bar{r}(u, v)$ curbele descrise de punctul $M$, când una din coordonatele curbilinii, $u$ sau $v$, este ținută constantă, cealaltă variind în intervalul corespunzător.

Dând constantelor $u_0$, $v_0$ valori arbitrare, suprafața este acoperită de o rețea de curbe coordonate, analoagă rețelei de drepte coordonate din planul $(u, v)$.

Orice punct $M$ de pe suprafață, fiind la intersecția a două din curbele rețelei, va putea fi reperat fără a mai utiliza vreun sistem de referință în spațiul cu trei dimensiuni, astfel încât *vom putea studia proprietățile suprafeței, care nu fac să intervină elemente geometrice exterioare, independent*

*de faptul că suprafața se găsește în spațiu, așa cum se face în geometria plană pentru stabilirea proprietăților planului.*

De exemplu, o curbă $C$, trasată pe suprafața $S$ (fig. 170, $a$), va putea fi definită printr'o relație între coordonatele curbilinii $u$ și $v$ de forma

$$v=v(u) \quad \text{sau} \quad f(u,v)=0.$$

Această curbă va avea o imagine $c$ în planul $(u,v)$, după cum curbele coordonate au ca imagini drepte paralele la axe și vom putea considera relația $f(u,v)=0$ ca ecuația curbei $c$ în coordonate curbilinii (fig. 170, $b$).

**Exemplul (1)** *Suprafețele de rotație.* Luând axa de rotație ca axă $Oz$ (fig. 171) și considerând curba meridiană dată în planul $xOz$ prin ecuațiile parametrice

$$x=\varphi(u) \quad z=\psi(u),$$

prin rotația punctului curent al meridianei se obține reprezentarea parametrică

$$\bar{r}=\bar{i}\,\varphi(u)\cos v+\bar{j}\,\varphi(u)\sin v+\bar{k}\,\psi(u) \qquad (80,VI)$$

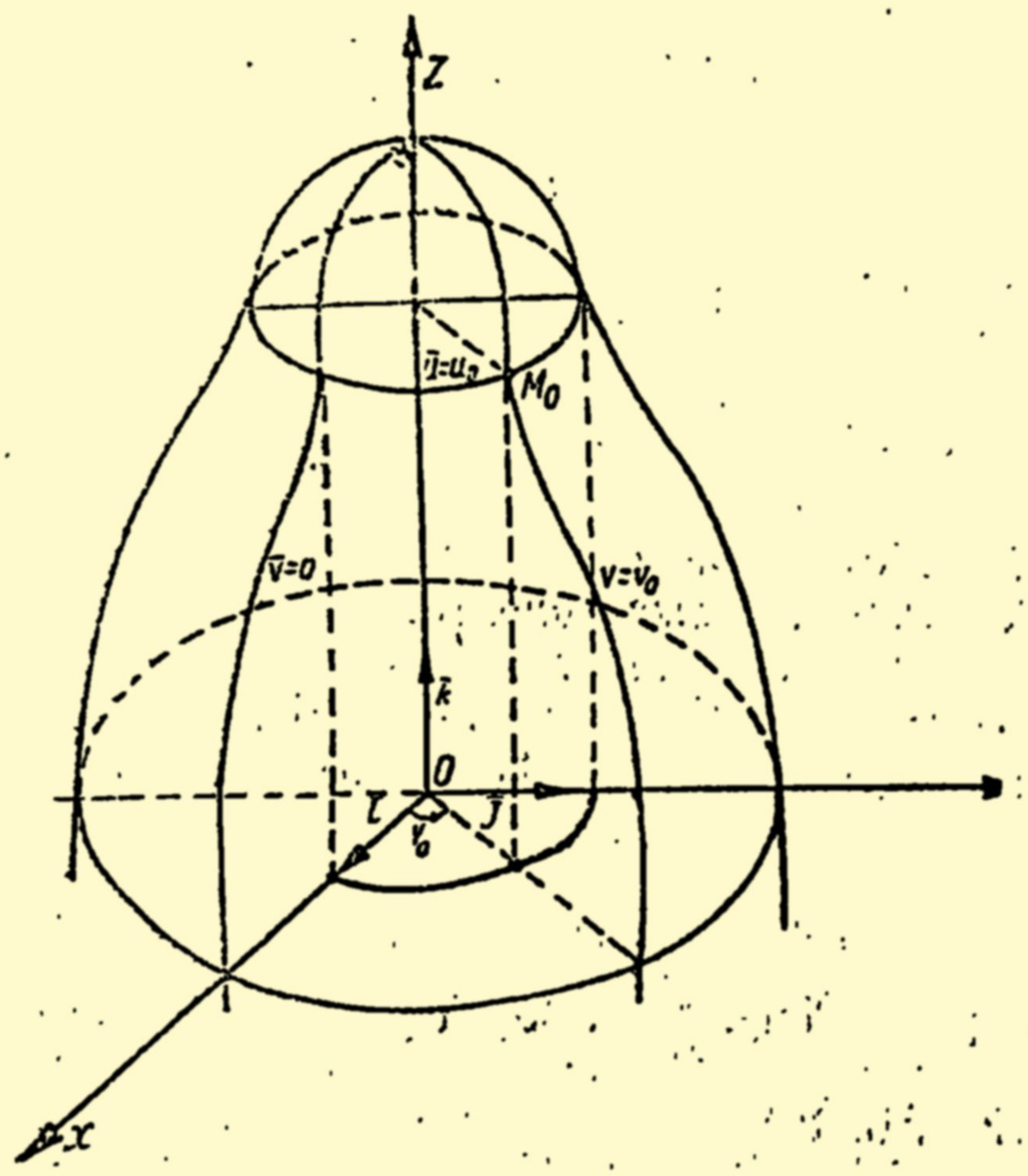



Fig. 171

Curbele coordonate $u=u_0=\text{const}$ sunt cercurile paralele având ca ecuații

$$x^2+y^2=\varphi^2(u_0)=\text{const};$$

$$z=\psi(u_0)=\text{const}.$$

Curbele $v=v_0=\text{const}$ sunt meridianele situate în planele

$$v=x\,\text{tg}\,v_0$$

și având ecuațiile parametrice

$$x=\varphi(u)\cos v_0; \quad y=\varphi(u)\sin v_0;$$

$$z=\psi(u).$$

Această reprezentare se aplică și sferei, care se obține luând

$$\varphi(u)=r\sin u; \quad \psi(u)=r\cos u.$$

Ecuațiile:

$$x=r\sin u\cos v; \quad y=r\sin u\sin v; \quad z=r\cos u$$

dau reprezentarea sferei în coordonate polare.

**Exemplul (2)** *O clasă de conoizi.* Ecuațiile

$$x=u\cos v; \quad y=u\sin v; \quad z=g\cos nv,$$

unde $n$ este o constantă pozitivă, reprezintă o *suprafață conoidă*, având axa $Oz$ ca directoare rectilinie și planul $xOy$ ca plan director (fig. 172).

Curbele $v=v_0=\text{const}$ sunt drepte de ecuații

$$y=x\,\text{tg}\,v_0; \quad z=g\cos nv_0,$$

paralele la $xOy$ și întâlnind axa $Oz$. Curbele $u=u_0$ sunt situate pe cilindrul

$$x^2+y^2=\mu_0^2$$

și au ecuațiile

$$x=u_0\cos v; \quad y=u_0\sin v; \quad z=g\cos nv.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forma vectorială a ecuațiilor acestor suprafețe este

$$\bar{r}=\bar{i}\,u\cos v+\bar{j}\,u\sin v+\bar{k}g\cos nv. \qquad (81,VI)$$

Ele pot fi considerate ca suprafețe riglate, născute de o dreaptă $PM$ ce se sprijină pe $Oz$ și este paralelă cu $xOy$.

Vom pune

$$\bar{r}_0(v)=\overline{OP}=\bar{k}g\cos nv;$$

$$\bar{p}(v)=\bar{i}\cos v+\bar{j}\sin v.$$

Ecuația vectorială a conoizilor, considerați ca suprafețe riglate, va fi

$$\bar{r}(u,v)=\bar{r}_0(v)+u\bar{p}(v)$$

și va coincide cu (81, VI).

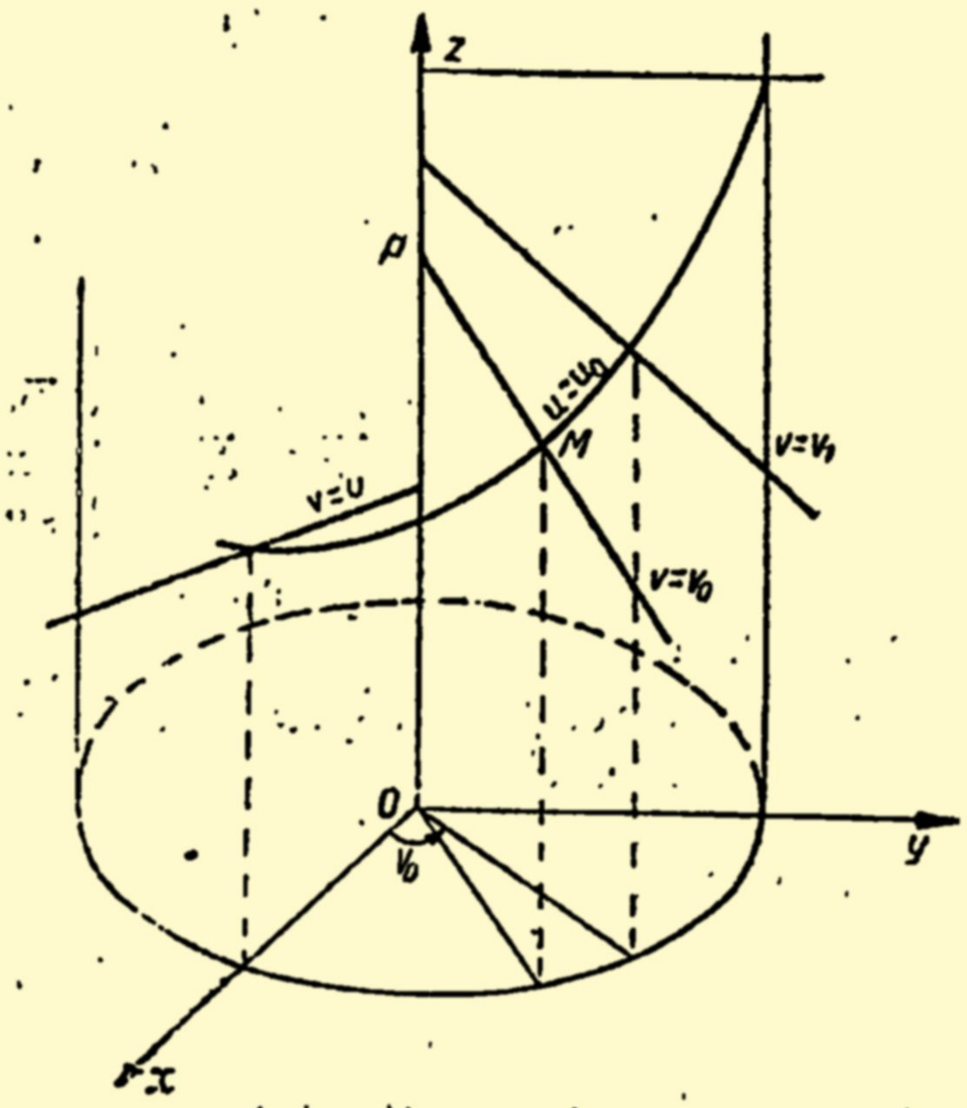



Fig. 172

## § 186. Proprietăți locale. Deplasări elementare. Tangentă. Plan tangent

Ca și în cazul curbelor, vom face distincție între *proprietățile geometrice globale*, exprimate prin relații între elemente ce privesc întreaga suprafață, și *proprietățile locale*, exprimate cu elemente definite prin relații între puncte vecine. Geometria diferențială studiază proprietățile locale ale suprafețelor, începând cu cele ce rezultă din relațiile între două puncte vecine, *independent de reprezentarea parametrică adoptată.*

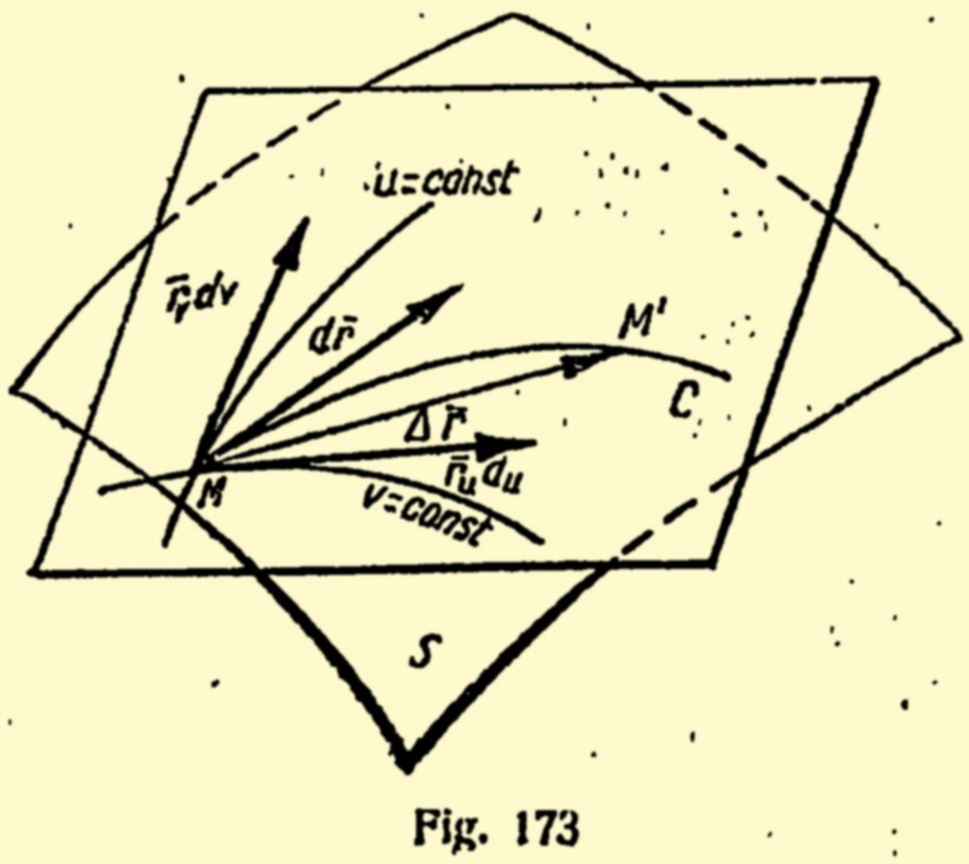



Fig. 173

Astfel, considerând un punct fix $M(u,v)$ (fig. 173) și un punct vecin $M'(u+\delta u, v+\delta v)$ vectorul

$$\Delta\bar{r}=\overline{MM'}$$

reprezintă deplasarea punctului $M$ în spațiu din $M$ în $M'$.

Pe suprafață, această deplasare elementară se poate face pe un arc de curbă $C$ într'o infinitate de moduri. Expresia lui $\Delta\bar{r}$ va fi

$$\Delta\bar{r}=\bar{r}(u+\delta u, v+\delta v)-\bar{r}(u,v)=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\delta v+\bar{\epsilon},$$

dacă limităm desvoltarea la termenii de ordinul întâi. Partea principală a diferenței $\Delta\bar{r}$ va fi

$$d\bar{r}=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}dv$$

Scanned with OKEN Scanner

și va reprezenta un vector elementar din planul format de vectorii $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$. Ori, acești vectori sunt tangenți la curbele coordonate, considerate ca definite prin reprezentările parametrice obținute făcând succesiv $v=$ const și $u=$ const.

Ei sunt liniar independenți, dacă

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq 0,$$

condiție care se poate scrie

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (82,VI)$$

și este îndeplinită dacă, și numai dacă, determinanții funcționali (77,VI) nu sunt toți nuli.

Prin urmare, *pe o suprafață, într'un punct ordinar, tangentele la curbele coordonate sunt distincte și determină un plan, care conține părțile principale ale deplasărilor elementare pe suprafață.*

Vom nota

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}; \quad r_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \qquad (83,VI)$$

*și în general orice derivată în raport cu parametrii va fi notată prin indici inferiori*; de exemplu $\bar{r}_{uu}, \bar{r}_{uv}, \bar{r}_{vv}$ etc.

In vecinătatea punctului $M$, deplasările elementare vor fi considerate într'o primă aproximație prin părțile lor principale, astfel încât vom scrie

$$d\bar{r} = \bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv. \qquad (84,VI)$$

Dacă, în particular, se consideră o curbă $C$, trasată pe suprafață, definită printr'o relație $f(u,v)=0$ sau prin ecuațiile parametrice

$$u = u(\alpha); \quad v = v(\alpha),$$

care introduce un al treilea parametru $\alpha$, ecuația vectorială a curbei $C$ va fi de forma

$$\bar{r} = \bar{r}[u(\alpha), v(\alpha)]$$

și deci, vectorul tangent în punctul $M$ se va scrie

$$\frac{d\bar{r}}{d\alpha} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\frac{du}{d\alpha} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\frac{dv}{d\alpha} = \bar{r}_u \frac{du}{d\alpha} + \bar{r}_v \frac{dv}{d\alpha}. \qquad (84',VI)$$

Prin urmare: *Tangentele la toate curbele pe o suprafață, într'un punct ordinar $M$, se găsesc în planul format de vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v$, tangenți la curbele coordonate.*

Vom numi planul format de tangentele la toate curbale de pe o suprafață într'un punct ordinar $M$, *plan tangent la suprafață în acel punct.*

*Planul tangent într'un punct $M$ conține orice deplasare elementară pe suprafață* (cu o aproximație începând dela termenii de ordinul al doilea în $\delta u$ și $\delta v$)

Ecuația vectorială a planului tangent se obține imediat, dacă notăm cu $\bar{R}$ vectorul de poziție al unui punct curent $P$ din acest plan, scriind că vectorii $\overline{MP}=\bar{R}-\bar{r}$, $\bar{r}_u$ și $\bar{r}_v$ sunt coplanari. Vom avea deci:

$$[\bar{R}-\bar{r}, \bar{r}_u, \bar{r}_v]=0 \qquad (85,VI)$$

sau sub formă carteziană,

$$\begin{vmatrix} X-x & x_u & x_v \\ Y-y & y_u & y_v \\ Z-z & z_u & z_v \end{vmatrix}=0. \qquad (85',VI)$$

Putem deasemenea scrie ecuația aceluiași plan sub formă parametrică:

$$\bar{R}=\bar{r}+\lambda\bar{r}_u+\mu\bar{r}_v, \qquad (85'',VI)$$

unde $\lambda, \mu$ sunt parametri scalari arbitrari.

Comparând această expresie cu desvoltarea (78,VI), scrisă sub forma:

$$\bar{R}(U, V)=\bar{r}(u, v)+(U-u)\bar{r}_u+(V-v)\bar{r}_v+\ldots$$

pentru a pune în evidență punctul $M(u, v)$ și notând

$$\lambda=U-u, \quad \mu=V-v$$

deducem că suprafața $S$ și planul său tangent în $M$ au în desvoltările lor aceiași termeni până la gradul întâi inclusiv. Introducând noțiunea de contact a două suprafețe regulate de clasa $C^p$[1]), vom spune că două suprafețe au *un contact de ordinul k* într'un punct $M$, dacă desvoltările lor Taylor în jurul acelui punct coincid până la termenii de ordinul $k$ inclusiv.

Cu această definiție, obținem rezultatul următor: *Intr'un punct ordinar, o suprafață și planul său tangent au un contact de ordinul întâi.*

Această proprietate se traduce prin faptul că tangentele la toate curbele suprafeței, care trec prin punctul $M$, se găsesc în planul tangent în acest punct.

Putem spune că *elementul plan cu centrul în M și aparținând planului tangent în acest punct aproximează suprafața în vecinătatea punctului M până la ordinul al doilea.*

Aceasta înseamnă că orice arc elementar de curbă trasată pe $S$ și trecând prin $M$, aproximat prin vectorul său tangent elementar $d\bar{r}$, conduce la un vector elementar din planul tangent.

Se poate demonstra și proprietatea reciprocă: *orice direcție din planul tangent corespunde unui vector tangent la o infinitate de curbe de pe suprafață, care trec prin punctul ordinar M.*

In adevăr, pentru a defini pe suprafață o curbă, care trece prin $M_0(u_0, v_0,)$ și are tangenta determinată, este suficient să dăm, fie o relație între $u$ și $v$, fie acești parametri în funcție de un al treilea $\alpha$,

$$u=u(\alpha); \quad v=v(\alpha),$$

---

[1]) Adică suprafețe reprezentabile prin funcții de clasa $C^p$ într'un anumit domeniu.

Scanned with OKEN Scanner

cu condiția

$$u(\alpha_0)=u_0;\quad v(\alpha_0)=v_0$$

Pentru ca tangenta să aibă o direcție dată de parametri $\lambda, \mu$, va trebui ca

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_0=\lambda;\ \left(\frac{dv}{d\alpha}\right)_0=\mu.$$

Ori, dacă definim funcțiile $u(\alpha)$ și $v(\alpha)$ prin ecuațiile diferențiale

$$\frac{du}{d\alpha}=f(\alpha);\quad \frac{dv}{d\alpha}=g(\alpha),$$

unde $f(\alpha)$ și $g(\alpha)$ sunt două funcții continue, arbitrare, supuse doar la condițiile

$$f(\alpha_0)=\lambda;\quad g(\alpha_0)=\mu,$$

funcțiile

$$u(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\alpha)\,d\alpha+u_0;\quad v(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha} g(\alpha)\,d\alpha+v_0$$

iau valorile $u_0$, $v_0$ și au derivatele egale cu $\lambda, \mu$ pentru $\alpha=\alpha_0$. Curba astfel definită are tangenta de direcție dată în punctul $M_0$

$$\frac{d\bar{r}}{d\alpha_0}=\lambda\bar{r}_{u_0}+\mu\bar{r}_{v_0}.$$

Cum $f(\alpha)$ și $g(\alpha)$ pot fi alese arbitrar, facem observația că *printr'un punct ordinar al unei suprafețe trec o infinitate de curbe tangente unei direcții date, tangentă la suprafață.*

## § (187) Elementul liniar și prima formă metrică fundamentală

Proprietățile locale, examinate până în prezent, nu presupun măsura vectorilor în toate direcțiile spațiului. Ele fac parte din geometria diferențială afină a suprafețelor și *pot fi considerate ca proprietăți geometrice afine ale figurilor din planul tangent,* raportat la sistemul de referință $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$. Va fi deci necesar să arătăm ulterior că aceste proprietăți nu depind de sistemul de referință $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, deci de felul în care a fost parametrizată suprafața.

Pentru a măsura o deplasare elementară dealungul unui arc de curbă trasată pe suprafață într'un punct ordinar $M$, va trebui să evaluăm modulul vectorului elementar $d\bar{r}$. Vom face observația că expresia diferențialei întâi este independentă de relația particulară $v=f(u)$, care definește curba, deci vom putea scrie

$$d\bar{r}^2=ds^2=(\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv)^2=\bar{r}_u^2 du^2+2\bar{r}_u\bar{r}_v du\,dv+\bar{r}_v^2 dv^2.$$

Introducând notația lui Gauss:

$$\bar{r}_u^2=E;\quad \bar{r}_u\bar{r}_v=F;\quad \bar{r}_v^2=G; \tag{86,VI}$$

pătratul elementului de arc devine:

$$ds^2=Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2. \tag{87,VI}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această expresie, care este o *formă pătratică* în variabilele *du* şi *dv*, se numeşte *prima formă fundamentală, forma metrică fundamentală* sau *elementul liniar* al suprafeţei.

Discriminantul formei fiind

$$EG - F^2 = \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u \bar{r}_v)^2 = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)^2 > 0, \qquad (88,VI)$$

dacă ţinem seama de condiţia (82, VI): $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0$, trinomul de gradul al doilea

$$E\lambda^2 + 2F\lambda + G, \quad \text{cu} \quad \lambda = \frac{du}{dv}$$

are rădăcini imaginare şi deci *forma* (87,VI) *este o sumă de două pătrate.* Cum în acelaşi timp, primul şi ultimul coeficient sunt pozitivi, semnul acestor pătrate va fi plus. O formă pătratică în *n* variabile, care poate fi pusă sub forma unei sume de *n* pătrate pozitive, se numeşte *pozitiv definită* (vezi şi §§ 99, 110). Avem astfel următorul rezultat fundamental: *Prima formă fundamentală a unei suprafeţe este o formă pătratică, pozitiv definită, în variabilele du şi dv.*

Ea nu se poate reduce la un singur pătrat decât într'un punct singular al reprezentării parametrice, punct care, dealtfel, este pe frontiera domeniului *D*, după cum se observă din (88,VI).

Pentru a deduce arcul elementar al unei curbe oarecare *C*, trasată pe *S*, este suficient să se ţină seama în (87,VI) de relaţiile ce definesc curba pe suprafaţă, punând de exemplu

$$u = u(\alpha); \quad v = v(\alpha).$$

Astfel, *elementul de arc orientat al curbelor coordonate* se obţine luând succesiv

$$v = \text{const}, \quad dv = 0 \quad \text{şi} \quad u = \text{const}, \quad du = 0$$

în expresia (83,VI) a lui $d\bar{r}$, sau chiar în (87,VI). Vom avea

$$d_u\bar{r} = \bar{r}_u du; \qquad d_v\bar{r} = \bar{r}_v dv;$$

$$ds_u = \sqrt{E}\, du; \quad ds_v = \sqrt{G}\, dv, \qquad (89,VI)$$

expresii care dau o interpretare geometrică coeficienţilor *E* şi *G*. *Deplasarea elementară pe suprafaţă* $d\bar{r}$ *este suma deplasărilor* $d_u\bar{r}$ şi $d_v\bar{r}$ *dealungul curbelor coordonate.* In adevăr, ţinând seama de (89,VI), vom scrie

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv = d_u\bar{r} + d_v\bar{r}.$$

Avem astfel interpretarea geometrică a diferenţialelor *du* şi *dv*, care sunt componentele deplasării $d\bar{r}$ pe direcţiilor deplasărilor $d_u\bar{r}$ şi $d_v\bar{r}$, când $\bar{r}_u$ şi $\bar{r}_v$ sunt consideraţi ca vectori-unitate pe aceste direcţii.

Unghiul $\omega$, format de curbele parametrice în *M*, va fi dat de formula

$$\cos\omega = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v}{|\bar{r}_u||\bar{r}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad (90,VI)$$

conform cu notaţiile (86,VI). Obţinem astfel o interpretare geometrică a coeficientului *F* din forma metrică fundamentală.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $F=0$, liniile coordonate sunt ortogonale în punctul $M$ și reciproc. Deci: *Condiția necesară și suficientă, ca rețeaua de linii coordonate să fie ortogonală, este ca* $F=0$ *în orice punct al suprafeței.*

In acest caz, elementul liniar se reduce la forma

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2.$$

Ținând seama de (89,VI), vom putea scrie

$$ds^2=ds_u^2+ds_v^2.$$

Deci: *Măsura lungimilor în domeniul lui M se va face pe suprafață ca într'un plan raportat la un sistem de referință cartezian ortogonal.* Calculul elementului de arc cu formula generală (87,VI) arată că *prin introducerea formei metrice fundamentale, măsura lungimilor în domeniul unui punct ordinar se face pe suprafață ca într'un plan raportat la un sistem cartezian oarecare.*

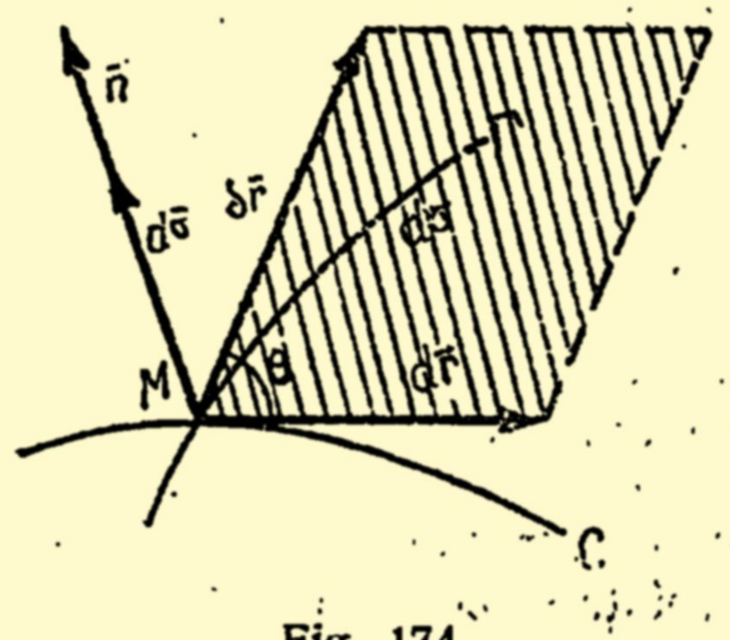


Fig. 174

Unghiul a două curbe $C$ și $\Gamma$ este prin definiție unghiul $\theta$, format de tangentele în punctul de intersecție $M$. Când curbele sunt orientate, acest unghi este perfect determinat prin versorii tangentelor respective.

Introducerea formei metrice fundamentale dă posibilitatea să se calculeze unghiul format de două curbe pe suprafață.

Fie $d\bar{r}$, $\delta\bar{r}$ deplasările elementare pe $C$ și $\Gamma$ (fig. 174). Vom avea

$$\cos\theta=\frac{d\bar{r}}{ds}\,\frac{\delta\bar{r}}{\delta s}=\frac{d\bar{r}\delta\bar{r}}{ds\delta s},$$

unde

$$d\bar{r}=\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv\,;\quad \delta\bar{r}=\bar{r}_u\delta u+\bar{r}_v\delta v\,;$$

$$ds=\sqrt{d\bar{r}^2}\,;\qquad \delta s=\sqrt{\delta\bar{r}^2}.$$

Ținând seama de aceste expresii, avem:

$$\cos\theta=\frac{\bar{r}_u\bar{r}_u du\delta u+\bar{r}_u\bar{r}_v(du\delta v+dv\delta u)+\bar{r}_v\bar{r}_v dv\delta v}{ds\delta s}.$$

Folosind notația lui Gauss, obținem formula

$$\cos\theta=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{ds\delta s} \qquad (91,VI)$$

cu

$$ds=\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\,;\quad \delta s=\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2},$$

*în care nu intervin decât coeficienții formei* $ds^2$.

Expresia

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v \qquad (92,VI)$$

reprezintă *forma polară a formei metrice fundamentale.*

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de ortogonalitate a două curbe se obține anulând această formă polară.

Se vede deci că prin introducerea formei metrice fundamentale se pot evalua diferite mărimi geometrice în jurul unui punct al suprafeței, ca în geometria plană. Cunoscând formulele de calcul ale lungimilor și unghiurilor, se pot stabili relații metrice între elementele figurilor elementare, trasate în domeniul punctului, iar aceste relații vor fi analoage celor din geometria plană euclidiană, aproximația crescând cu cât vecinătatea considerată este mai redusă.

Vom spune că *geometria pe o suprafață înzestrată cu o formă metrică fundamentală este local euclidiană.*

Această geometrie se poate desvolta cu ajutorul exclusiv al coeficienților $E$, $F$ și $G$ și al derivatelor lor în raport cu $u$ și $v$, independent de relațiile suprafeței cu spațiul cu trei dimensiuni. Raportând spațiul la un sistem cartezian ortogonal, expresiile coeficienților $E$, $F$, $G$ se pot calcula în raport cu coordonatele punctului $M$ în acest sistem. Vom avea

$$E=\bar{r}_u^2=\left(\bar{i}\frac{\partial x}{\partial u}+\bar{j}\frac{\partial y}{\partial u}+\bar{k}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$F=\bar{r}_u\bar{r}_v=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}; \qquad (93,VI)$$

$$G=\bar{r}_v^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

formule care fac trecerea dela proprietățile geometrice ale suprafeței, considerată ca aparținând spațiului euclidian cu trei dimensiuni, la proprietățile geometrice local euclidiene ale aceleiași suprafețe, considerată independent de spațiu.

Evident, *pentru ca aceste proprietăți să fie geometrice, este necesar ca ele să fie independente, atât de sistemul de referință cartezian utilizat, cât și de reprezentarea parametrică a suprafeței.*

Independența față de sistemul de referință este asigurată pentru toate relațiile vectoriale sau scalare între mărimi definite cu ajutorul vectorilor $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, care au semnificații independente de alegerea sistemului de referință. In ceeace privește independența față de reprezentarea parametrică, aceasta rezultă deasemenea pentru relațiile între mărimile, care au semnificații independente de alegerea para metrilor, dar trebue pusă în evidență pentru acelea în care se folosesc curbele coordonate și mărimi legate de ele.

Astfel, deplasarea elementară, elementul liniar, unghiul a două curbe oarecare au semnificații independente de alegerea parametrilor, pe când deplasările $\bar{r}_u du$, $\bar{r}_v dv$ dealungul curbelor parametrice sunt, evident, mărimi a căror semnificație derivă din folosirea unui anumit sistem de parametri. Aceasta însă nu înseamnă că anumite mărimi, construite cu ajutorul lor, nu au semnificații independente de modul de parametrizare. Este suficient să reamintim expresia

$$d\bar{r}=\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv=d_u\bar{r}+d_v\bar{r}$$

a deplasării elementare pe suprafață.

Scanned with OKEN Scanner

**Exemplul ①** *Elementul liniar al suprafețelor de rotație.* Folosind ecuația vectorială (80,VI) vom scrie

$$d\bar{r} = \bar{i}(\varphi' \cos v du - \varphi \sin v dv) + \bar{j}(\varphi' \sin v du + \varphi \cos v dv) + \bar{k}\psi' du;$$

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = (\varphi' \cos v du - \varphi \sin v dv)^2 + (\varphi' \sin v du + \varphi \cos v dv)^2 + \psi'^2 du^2,$$

de unde

$$ds^2 = [\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)]\, du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2 \qquad (94,VI)$$

deci

$$E = \bar{r}_u^2 = \varphi'^2 + \psi'^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi^2.$$

Rețeaua de curbe coordonate este ortogonală, după cum rezultă dealtfel din faptul că este formată din meridiane și paralele.

**Exemplul ②** *Elementul liniar al sferei.* Se obține direct, sau ca un caz particular elementului suprafețelor de rotație (94,VI), punând

$$\varphi(u) = r \sin u; \quad \psi(u) = r \cos u,$$

de unde

$$ds^2 = r^2 (du^2 + \sin^2 u dv^2).$$

Folosind notația cunoscută, vom pune

$$u = \varphi; \quad v = \theta$$

și vom obține

$$ds^2 = r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi\, d\theta^2). \qquad (94'VI)$$

**Exemplul ③** *Elementul liniar al suprafețelor riglate.* Ecuația vectorială fiind de forma

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u) + \bar{p}(u)\, v,$$

cu $\bar{p}(u)$, $\bar{\rho}(u)$ vectori variabili, $\bar{p}(u)$ fiind versor, vom scrie

$$\bar{r}_u = \bar{\rho}_u + \bar{p}_u v; \quad \bar{r}_v = \bar{p},$$

deci

$$E = \bar{\rho}_u^2 + 2\bar{\rho}_u \bar{p}_u v + \bar{p}_u^2 v^2; \quad F = \bar{\rho}_u \bar{r}_v; \quad G = 1,$$

fiindcă

$$\bar{p}\bar{p}_u = 0, \quad p^2 = 1.$$

Elcmentul liniar va fi

$$ds^2 = (\bar{\rho}_u^2 + 2\bar{\rho}_u \bar{p}_u v + \bar{p}_u^2 v^2)\, du^2 + 2\bar{\rho}_u \bar{r}_v du dv + dv^2 \qquad (95,VI)$$

## § 188. Elementul de arie

Cele două familii de curbe coordonate parcelează suprafața în porțiuni limitate de arce de curbă, care reamintesc patrulaterele curbilinii. Figura $MM_1M_2M_3$, formată de liniile coordonate (fig. 175)

$$v = \text{const}, \quad v + dv = \text{const},$$

$$u = \text{const}, \quad u + du = \text{const},$$

când $du$ și $dv$ sunt suficient de mici, poate fi asimilată cu un paralelogram curbiliniu, ale cărui vârfuri au coordonatele $M(u, v)$, $M_1(u+du, v)$, $M_2(u+du, v+dv)$, $M_3(u, v+dv)$. Eroarea făcută înlocuind laturile $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_3}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_3M_2}$ prin vectorii $\bar{r}_u du$, $\bar{r}_v dv$, $\bar{r}_v(u+du, v)\, dv$, $\bar{r}_u(u, v+dv)\, du$ este de ordinul al doilea în $du$, $dv$.

Cum

$$\bar{r}_v(u+du, u)=\bar{r}_v(u, v)+\frac{du}{1}\bar{r}_{vu}+\dots$$

putem considera

$$\bar{r}_v(u+du, v)\,dv \cong \bar{r}_v(u, v)\,dv,$$

eroarea făcută fiind de ordinul al doilea cel mult.

Prin urmare, putem substitui patrulaterului $MM_1M_2M_3$ paralelogramul format de vectorii elementari $\bar{r}_u du$, $\bar{r}_v dv$ cu o eroare de ordinul al doilea asupra laturilor sale.

Vom numi *element de arie* pe suprafaţa $S$ aria unui patrulater curbiliniu elementar, obţinut prin parcelarea suprafeţei cu ajutorul a două familii de curbe. Ca şi în cazul curbelor coordonate, se poate substitui acestui element aria paralelogramului format de vectorii elementari $d\bar{r}$, $\delta\bar{r}$ tangenţi la curbele $C$ şi $\Gamma$, ce trec prin $M$.

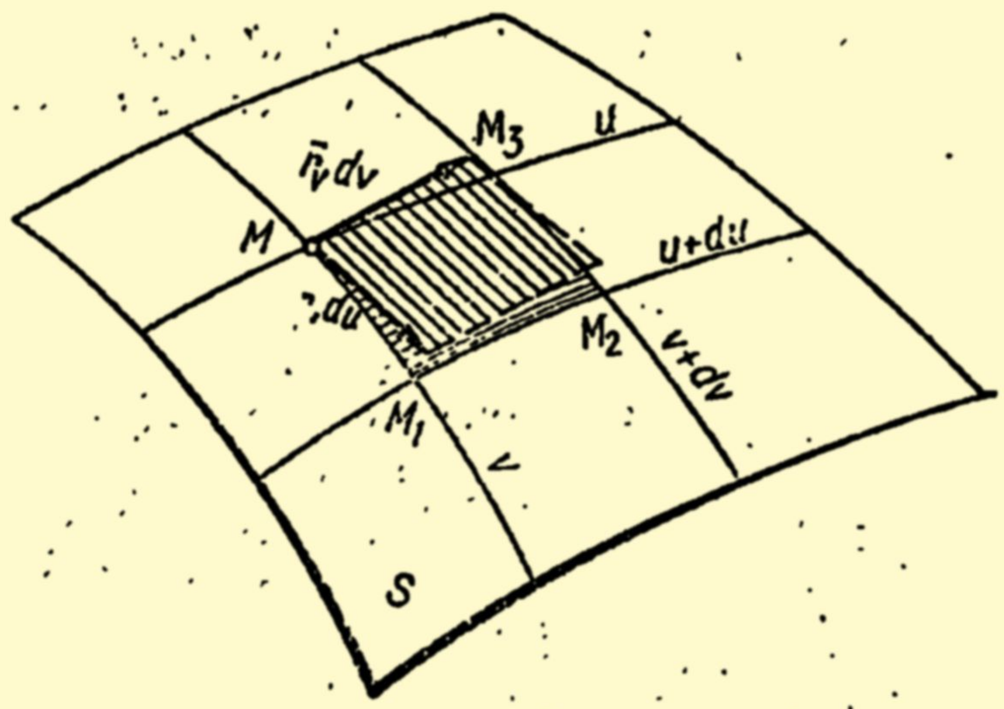



Fig. 175

Această arie poate fi orientată pe planul tangent, ca în geometria plană, fără a considera acest plan cu două feţe, prin rotaţia în sensul trigonometric.

*Ea poate fi evaluată luând ca unitate de arie, aria unui paralelogram orientat din planul tangent, chiar înainte de a întroduce metrica fundamentală $ds^2$ şi fără a raporta suprafaţa la spaţiu.*

In adevăr, considerând bivectorul $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ ca un bivector din planul tangent, aria $\delta\sigma$, va fi definită prin bivectorul $(d\bar{r}, \delta\bar{r})$ ca măsura acestui bivector cu unitatea aleasă. Cum

$$(dr, \delta\bar{r}) = (\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv, \bar{r}_u \delta u+\bar{r}_v \delta v)=(\bar{r}_u, \bar{r}_v)(du\delta v-dv\delta u),$$

ţinând seama de proprietăţile operaţilor liniare bivectoriale, vom avea, independent de unitatea aleasă:

$$d\sigma=\text{măs.}(\bar{r}_u, \bar{r}_v)(du\delta v-dv\delta u) \qquad (96,VI)$$

Această expresie are o semnificaţie independentă de alegerea parametrilor $u$ şi $v$, cu toate că în aparenţă depinde de $\bar{r}_u$ şi $\bar{r}_v$, întrucât reprezintă aria unui paralelogram elementar, format cu tangentele la două curbe oarecare.

In particular, când $C$ şi $\Gamma$ sunt chiar curbele coordonate, $d\sigma$ se reduce la forma

$$d\sigma=\text{măs}\cdot(\bar{r}_u, \bar{r}_v)\,du dv, \qquad (97,VI)$$

punând $\delta u=0$, $dv=0$ şi înlocuind $\delta v$ prin $dv$.

Dacă introducem forma fundamentală $ds^2$, putem evalua aria $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ prin formula cunoscută din geometria elementară

$$d\sigma=ds_u\,ds_v \sin\omega.$$

Folosind formulele (89,VI) şi (90,VI), vom avea

$$d\sigma=\pm\sqrt{EG}\,du\,dv\sqrt{1-\frac{F^2}{EG}}=\pm\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

semnul $\pm$ provenind din orientarea unghiului $\omega$.

Cum putem oricând schimba numele parametrilor între ei, vom putea considera orientarea bivectorului $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ ca pozitivă și *cu această convenție*, elementul de arie definit de curbele coordonate devine

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \qquad (98,VI)$$

formula generală pentru un element de arie, definit prin două familii de curbe $C$ și $\Gamma$, fiind

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,(du\delta v - dv\delta u). \qquad (99,VI)$$

**Exemplu.** *Elementul de arie al sferei* (fig. 176). Luând parametrii $\theta$ și $\varphi$ în această ordine, bivectorul $(\bar{r}_\theta, \bar{r}_\varphi)$ are o orientare negativă pe fața exterioară a sferei, pe care îi considerăm trasați.

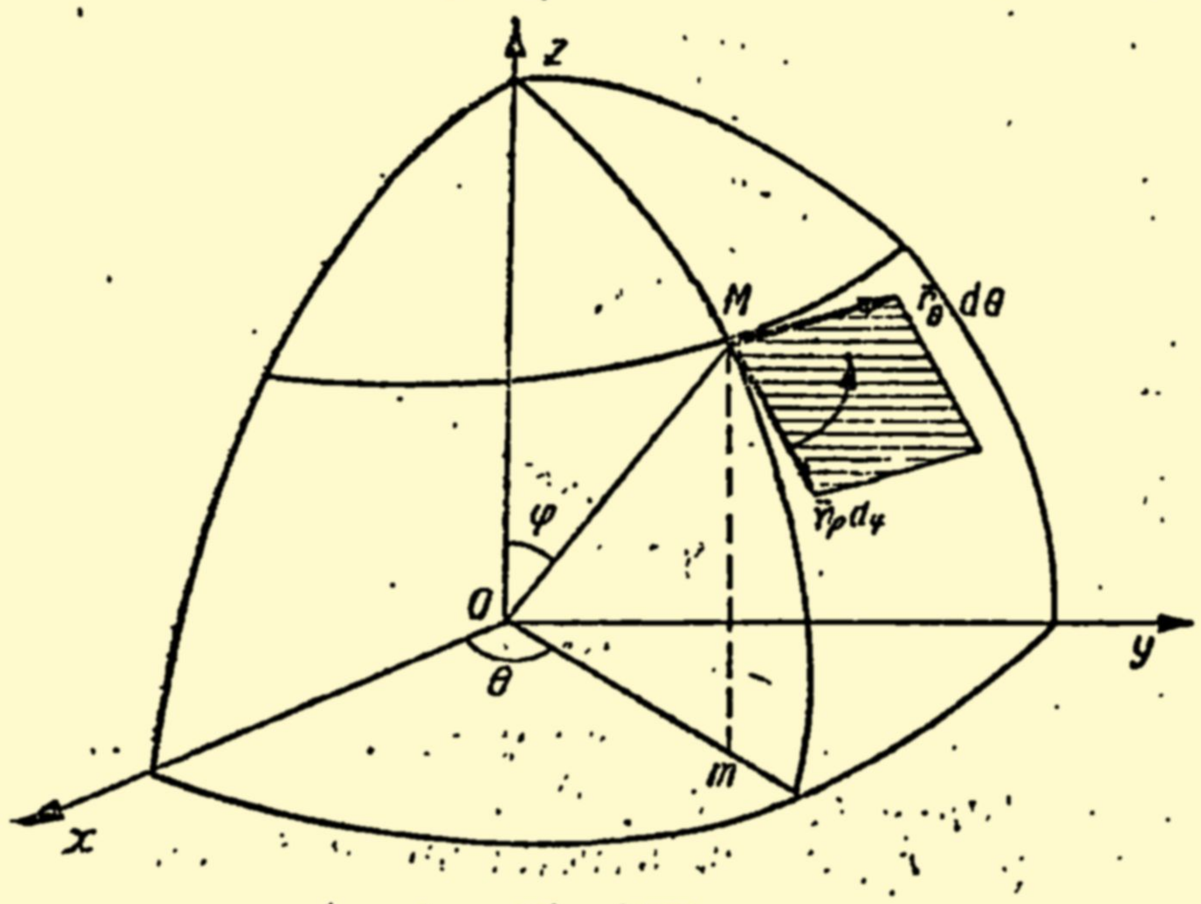



Fig. 176

Din expresia (94',VI) a lui $ds^2$ deducem

$$E = r^2 \sin^2\varphi; \quad F = 0; \quad G = r^2,$$

astfel încât

$$d\sigma = -r^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi.$$

Pentru a avea o arie orientată pozitiv în sensul parametrilor crescători, va trebui să considerăm bivectorul $(\bar{r}_\varphi, \bar{r}_\theta)$, pentru care

$$d\sigma = r^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi, \qquad (100,VI)$$

deci *vom lua parametrii în ordinea* $\varphi$, $\theta$.

Evident, semnul lui $d\sigma$ se schimbă pe față interioară a sferei.

În aplicații, se va face deobicei abstracție de orientarea elementului de arie, folosindu-se formulele (98,VI) și (99,VI). Această orientare este însă necesară în calculul ariilor figurilor trasate pe suprafețe.

## § 189. Orientarea suprafețelor bilatere

Expresia elementului de arie justifică afirmația făcută că această mărime geometrică poate fi evaluată, considerând suprafața, independent de spațiul cu trei dimensiuni, în care este scufundată.

În studiul proprietăților locale înfățișate până în prezent, suprafața apare intuitiv, ca formată din elemente asimilabile cu elemente plane, lipite unul de celălalt, astfel încât diversele elemente geometrice, definite pe unul dintre ele, variază foarte puțin când trecem la un altul vecin, ceeace se traduce matematic prin continuitatea acestor elemente ca funcție de $u$ și $v$.

Din momentul în care, însă, suprafața este considerată ca scufundată în spațiul cu trei dimensiuni euclidian, o primă observației se impune: *orice element plan din spațiu are două fețe, deci este orientabil în spațiu. Putem face aceeași afirmație pentru o suprafață alcătuită din elemente plane?*

Această chestiune depăşeşte cadrul geometriei diferenţiale, întrucât pune în joc proprietăţile globale ale suprafeţelor, considerate în întregime. Ea se încadrează în *Topologie*, care studiază proprietăţile generale ale curbelor, suprafeţelor şi a altor mulţimi de puncte din spaţiu, fără a ţine seama de forma, întinderea, aşezarea acestora. Dată fiind importanţa sa în aplicaţii, unde suprafeţele pot interveni, de exemplu pentru a separa două medii fizice, vom atrage atenţia că *nu orice suprafaţă din spaţiu are două feţe.*

Exemplul următor este concludent. Luând o bandă de hârtie îngustă şi lungă, ca o panglică, prin lipirea laturilor mici, după ce banda a fost răsucită odată, se obţine o suprafaţă, care n'are decât o singură faţă. Dacă în prealabil se colorează în roşu şi albastru cele două feţe ale panglicii, după lipire, un punct mobil, o muscă, poate ajunge de pe faţa roşie pe faţa albastră, fără a traversa marginile bandei şi se poate întoarce în punctul de plecare, după ce s'a plimbat pe ambele feţe.

Această suprafaţă se numeşte *banda lui Möbius.* Orice suprafaţă, care nu are decât o faţă, ca banda lui Möbius, se numeşte *unilateră.*

Suprafeţele, care au două feţe se numesc *bilatere.* In aplicaţii, ca şi în ceeace urmează, *vom considera exclusiv suprafeţe bilatere.*

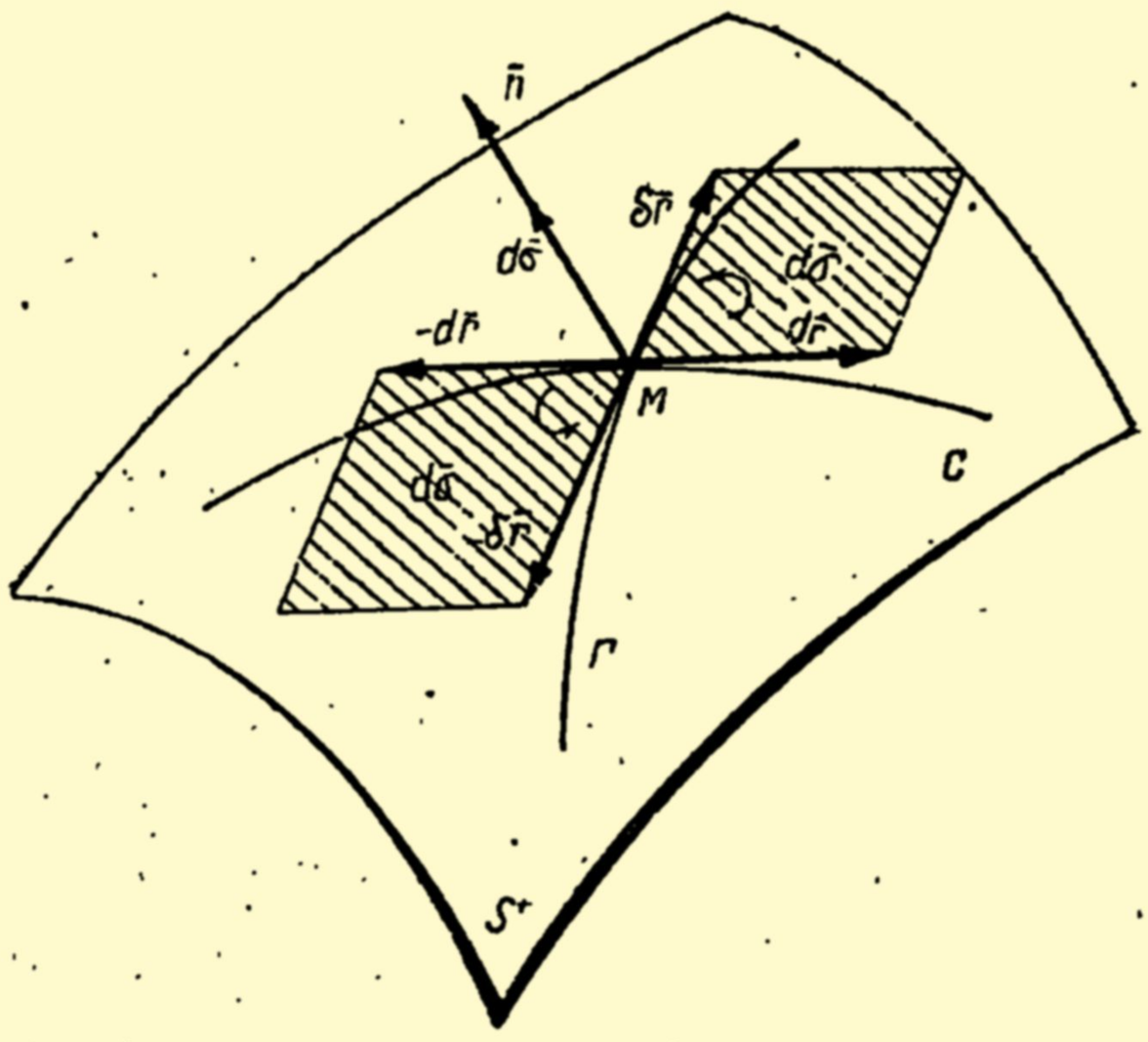



Fig. 177

Luând un element de suprafaţă cu centrul într'un punct $M$, nu vom putea ajunge în punctul $M'$ confundat cu $M$, dar situat pe faţa opusă, fără a traversa conturul suprafeţei, sau fără a o înţepa. Pe o suprafaţă bilateră (fig. 177) vom distinge cele două feţe, numind una dintre ele $S^+$ *pozitivă* şi cealaltă $S^-$ *negativă.*

Un element de suprafaţă poate fi orientat prin circulaţia pe conturul său, presupus simplu şi închis, astfel încât circulaţia în sensul pozitiv să corespundă de exemplu feţei pozitive, pentru un observator ce vede o singură faţă, şi reciproc faţa sa pozitivă să corespundă circulaţiei în sensul pozitiv pe contur.

Un astfel de element poate fi considerat, într'un punct ordinar $M$, de forma unui paralelogram curbiliniu, determinat de două curbe $C$ şi $\Gamma$, care trec prin $M$, şi de alte două curbe vecine şi apoi *aproximat printr'un element plan orientat, din planul tangent în M*, determinat de vectorii elementari $d\bar{r}$ şi $\delta\bar{r}$, tangenţi la $C$ şi $\Gamma$.

Bivectorul $(d\bar{r}, \delta\bar{r})$ de exemplu, poate aproxima un astfel de element, substituind faţa sa feţei pozitive a elementului de suprafaţă.

Pe de altă parte, am văzut că aproximaţia suprafeţei prin elementul plan tangent este de ordinul al doilea cel puţin şi că deasemenea, aria elementului



Scanned with OKEN Scanner

de suprafață este aproximată, până la ordinul al treilea cel puțin, de aria acestui element plan tangent.

Vom numi *element de suprafață orientat* bivectorul $(d\bar{r}, \delta\bar{r})$ cu centrul în punctul $M$ și determinat de vectorii elementari tangenți la două curbe $C$ și $\Gamma$ și-l vom nota cu simbolul $\delta\bar{\sigma}$ (fig. 177).

*Elementul de suprafață orientat reprezintă suprafața în domeniul punctului M astfel:*

1) *fața sa corespunde feței pozitive a suprafeței;*

2) *punctele sale corespund punctelor suprafeței în vecinătatea lui M;*

3) *măsura sa corespunde elementului de arie în M.*

*El orientează local și aproximează suprafața, după cum vectorul tangent elementar orientează local și aproximează curba.* Trebue să observăm, însă, că, pentru ca vectorul elementar $d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{d\alpha} d\alpha$ să dea o orientare locală unui arc de curbă, este necesar ca $d\alpha$ să aibă un semn determinat, de exemplu $d\alpha > 0$, în care caz orientarea este dată de $\frac{d\bar{r}}{d\alpha}$. Deasemenea, orientarea bivectorului elementar

$$d\bar{\sigma} = (d\bar{r}, \delta r) = (\bar{r}_u, \bar{r}_v)(du\,\delta v - dv\,\delta u) \qquad (101,VI)$$

presupune un semn determinat pentru expresia

$$du\,\delta v - dv\,\delta u = \begin{vmatrix} du & \delta u \\ dv & \delta v \end{vmatrix}. \qquad (102,VI)$$

Orientarea lui $d\bar{\sigma}$ corespunde orientării bivectorului $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$, dacă

$$du\,\delta v - dv\,\delta u > 0.$$

In orice caz, prin orientarea celor două curbe $C$ și $\Gamma$, bivectorul $d\bar{\sigma}$ este orientat și orientarea să nu se schimbă, dacă schimbăm orientarea ambelor curbe deodată.

Dacă, în particular, folosim pentru determinarea lui $d\bar{\sigma}$ chiar curbele coordonate, vom avea

$$d\bar{\sigma} = (\bar{r}_u, \bar{r}_v)\,du\,dv. \qquad (103,VI)$$

Vom presupune că $d\bar{\sigma}$ are orientarea lui $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ luând

$$du > 0, \quad dv > 0 \quad \text{deci} \quad du\,dv > 0$$

în care caz $\bar{r}_u\,du$, $\bar{r}_v\,dv$ orientează curbele coordonate în sensurile lui $\bar{r}_u$ și $\bar{r}_v$.

*Pentru orientarea suprafeței, vom considera curbele coordonate orientate prin vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v$, adică în sensul parametrilor crescători, elementul de suprafață orientat $d\bar{\sigma}$ având orientarea bivectorului $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$, deci*

$$du\,\delta v - dv\,\delta u > 0.$$

*Această convenție ne permite să folosim ca element de suprafață orientat bivectorul* (103, VI), *definit de curbele coordonate*, dacă $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ are orientarea voită pentru $d\sigma$. In cazul contrariu, este suficient să schimbăm para-

Scanned with OKEN Scanner

metrii între ei pentru ca $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ să aibă orientarea lui $d\bar{\sigma}$, așa cum am făcut mai sus în calculul elementului de arie al sferei.

Această orientare locală nu este suficientă pentru întreaga suprafață bilateră $S$. Este nevoie să găsim *un mijloc de a recunoaște fața pozitivă în jurul oricărui punct, presupunând că a fost determinată într'un anumit punct M.*

Pentru aceasta este suficient să observăm că printr'un punct ordinar $M$ trec o linie $u=\text{const}$ și o linie $v=\text{const}$, două linii din aceeași familie neintersectându-se în niciun punct ordinar. Cum, pe de altă parte, aceste curbe sunt orientate pe ambele familii, dacă punctul $M$ descrie pe suprafață un circuit $MM_1M_2\ldots$, (fig. 178), *care nu trece decât prin puncte ordinare*, bivectorul $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ își păstrează orientarea, astfel încât în orice punct ordinar el va indica fața pozitivă a suprafeței. Prin urmare: *elementul de suprafață orientat*

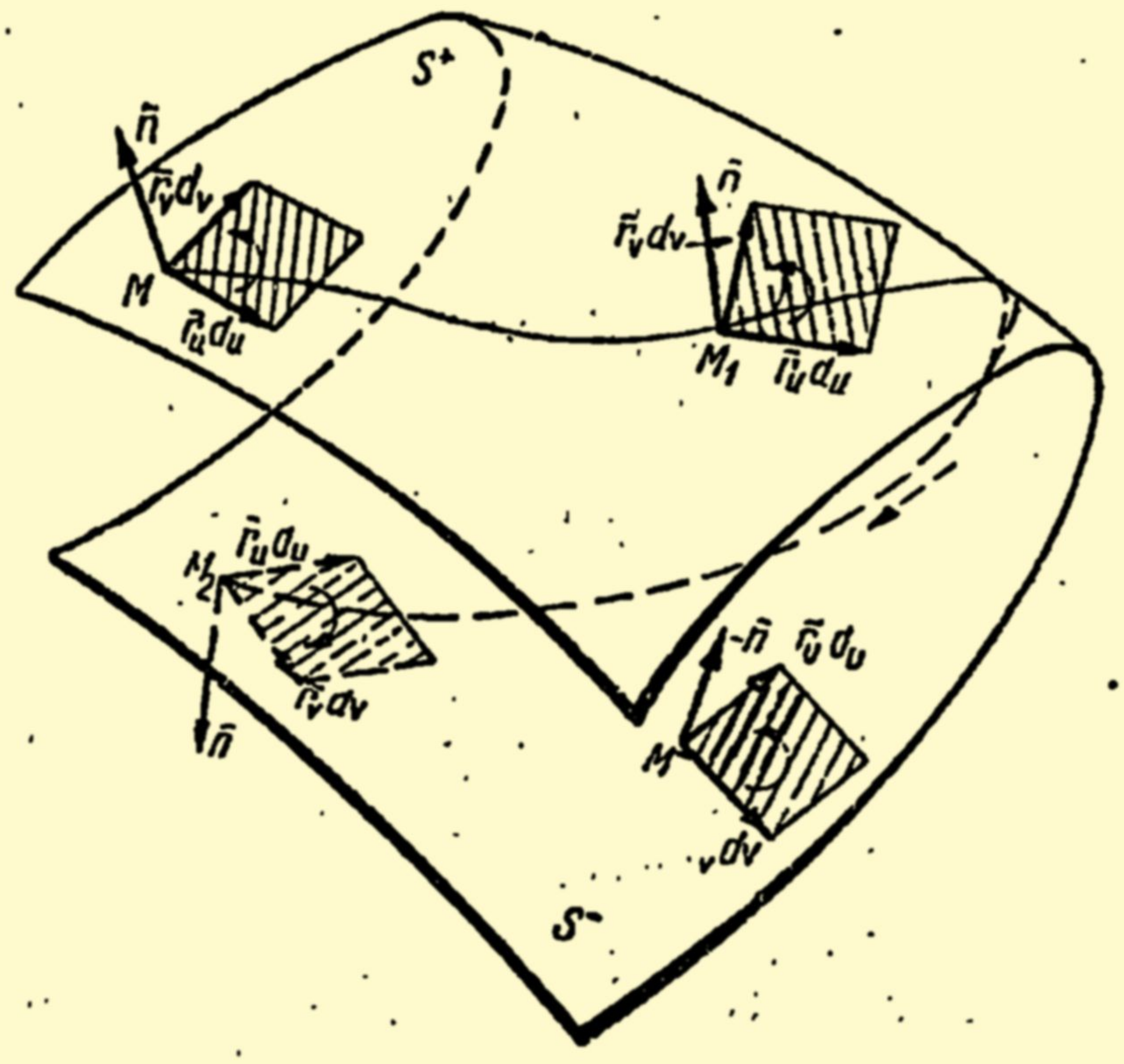



Fig. 178

$$d\bar{\sigma} = (\bar{r}_u, \bar{r}_v)\, du\, dv$$

*determină fața pozitivă a suprafeței în orice punct ordinar, dacă această față este determinată într'un punct M prin bivectorul* $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$.

In aplicațiile fizice, dacă suprafața $S$ este închisă, fața pozitivă este cea *exterioară*, iar dacă este străbătută de linii orientate, pe care se face un transport de particule, de energie, etc., fața pozitivă este cea prin care ies aceste linii.

Orientarea suprafețelor este astfel impusă de semnificația sa fizică și corespunde sensului în care se desfășoară anumite fenomene importante, ca scurgerea fluidelor, fluxul magnetic, iradiația căldurii, etc.

## § 190 Elementul de suprafață orientat și normala orientată

Expresia (101,VI) a bivectorului $d\bar{\sigma}$ este independentă de alegerea parametrilor $u$ și $v$, deși conține bivectorul $(\bar{r}_u, \bar{r}_v)$, deoarece elementul de suprafață orientat este definit independent de parametrizarea făcută. Putem dealtfel considera $d\bar{\sigma}$ ca o porțiune elementară a planului tangent în $M$, limitată de o curbă închisă simplă, orientată.

Elementul de arie $d\sigma$ este măsura acestui bivector. In cazul când suprafața este considerată independent de spațiu, distincția fețelor nu mai poate fi făcută, iar bivectorul $d\bar{\sigma}$ se reduce la măsura sa $d\sigma$. Semnul plus sau minus,

Scanned with OKEN Scanner

pe care-l poate avea $d\sigma$, este singurul indice de orientabilitate al suprafeței, ca și în geometria plană.

Introducerea bivectorului $d\bar{\sigma}$ nu presupune măsurarea modulului vectorilor în orice direcție a spațiului.

Este interesant de observat că, dacă introducem măsura lungimilor pe suprafață prin forma fundamentală

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

putem compara elementele $d\bar{\sigma}$ în modul, dar nu și în direcție [1]).

Pentru a putea calcula variația elementelor de suprafață, când punctul $M$ se deplasează pe suprafață, *vom considera bivectorul $d\sigma$ ca produsul vectorial al vectorilor $\bar{r}_u du$ și $\bar{r}_v dv$ și-l vom reprezenta prin vectorul său reprezentativ.*

Vom numi *normală* la suprafață în punctul $M$ dreapta perpendiculară pe planul tangent în acel punct.

Vectorul reprezentativ al bivectorului $d\bar{\sigma}$, care se găsește pe normala la suprafață, se va numi *normală orientată* în punctul $M$.

Normala orientată sau *pozitivă* are originea pe fața pozitivă a suprafeței, astfel încât un observator așezat dealungul acestei normale vede fața pozitivă a suprafeței. Notând cu $\bar{n}$ versorul normalei pozitive, triedrul $\bar{n}, \bar{r}_u, \bar{r}_v$ este dextrotors (drept).

Cu aceste definiții și notații vom putea înlocui pe $d\bar{\sigma}$ prin vectorul

$$d\bar{\sigma} = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\,du\,dv \qquad (104,VI)$$

având ca modul

$$d\sigma = |d\bar{\sigma}| = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|\,du\,dv.$$

Cum

$$(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)^2 = \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u \bar{r}_v)^2 = EG - F^2,$$

regăsim pentru $d\bar{\sigma}$ expresia

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

In același timp

$$\bar{n} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}, \text{ deci } d\bar{\sigma} = \bar{n}\,d\sigma, \qquad (105,VI)$$

de unde

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}. \qquad (106,VI)$$

*Versorul $\bar{n}$ al normalei orientate este o mărime independentă de alegerea parametrilor lui Gauss pe suprafață.*

In adevăr, expresia (105,VI) arată că $\bar{n}$ este raportul a două mărimi independente de sistemul de coordonate curbilinii $u, v$.

---

[1]) Deasemenea, dacă pe o curbă considerată ca o varietate cu o dimensiune, definită cu ajutorul unui parametru $\alpha$, introducem măsura arcelor prin elementul liniar $ds^2 = f(\alpha)\,d\alpha^2$, putem compara elementele de curbă numai în modul, dar nu și în direcție, deci nu ne putem da seama de curbura curbei.

Scanned with OKEN Scanner

Introducerea normalei presupune că știm să evaluăm unghiul a două direcții și lungimea oricărui vector din spațiu, noțiuni pe care nu le-am folosit până în prezent în studiul proprietăților diferențiale ale suprafețelor.

Definind unghiul a două elemente de suprafață $d\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}_1$ ca unghiul normalelor $\bar{n}$ și $\bar{n}_1$, vom putea compara atât direcțiile cât și modulele bivectorilor $d\bar{\sigma}$ și $d\bar{\sigma}_1$ pentru a ne da seama de variația lor, când ne deplasăm pe suprafață dela un punct $M$ la un punct vecin $M'$.

## § 191. Variația normalei orientate și a doua formă metrică fundamentală

Fie $d\bar{n}$ variația versorului $\bar{n}$ în deplasarea din $M(u, v)$ în $M'(u+du, v+dv)$ (fig. 179). Diferențiala $d\bar{n}$ va avea expresia

$$d\bar{n}=\bar{n}_u du+\bar{n}_v dv.$$

Fiindcă $\bar{n}$ este versor, vom avea

$$\bar{n}d\bar{n}=0,$$

deci *diferențiala* $d\bar{n}$ *este un vector paralel cu planul tangent în* $M$. În același timp

$$\bar{n}d\bar{r}=\bar{n}(\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv)=0,$$

pentru orice deplasare pe suprafață, fiindcă $\bar{n}$ este perpendicular pe $d\bar{r}$, deci, în particular,

$$\bar{n}\cdot\bar{r}_u=0 \quad \text{și} \quad \bar{n}\cdot\bar{r}_v=0. \qquad (107,VI)$$

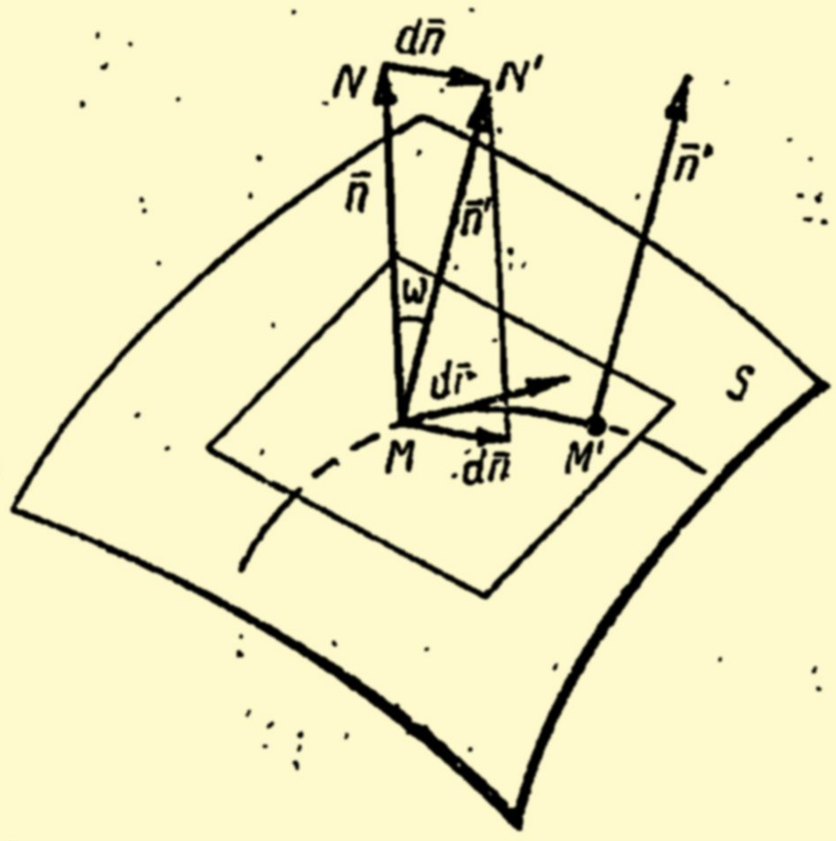


Fig. 179

Aplicând o translație vectorului $\bar{n}'$ din $M'$ în $M$ și vectorului $\bar{N}\bar{N}'=d\bar{n}$ din $N$ în $M$, putem spune că *la orice deplasare* $d\bar{r}$ *corespunde în planul tangent, sau mai bine zis pe elementul de suprafață* $d\bar{\sigma}$, *o deplasare* $d\bar{n}$.

Dacă vectorul $d\bar{n}\neq 0$, elementele $d\bar{\sigma}$ și $d\bar{\sigma}'$ fac între ele un unghi $\omega$ și vom avea,

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{NN'}{MN}=|d\bar{n}|;\ |d\bar{n}|\simeq\omega,$$

deci vectorul $d\bar{n}$ va pune în evidență variația elementelor de suprafață $d\bar{\sigma}$ în domeniul punctului $M$ pentru deplasările $d\bar{r}$ suficient de mici.

Această afirmație se precizează prin următoarea propoziție:

*Suprafețele, pentru care* $d\bar{n}=0$, *în orice punct ordinar* $M$, *sunt plane.*

În adevăr, dacă $d\bar{n}=0$ în orice punct $M(u, v)$ și pentru orice deplasare $d\bar{r}$, vom putea scrie

$$d\bar{n}=\bar{n}_u du+\bar{n}_v dv=0,$$

de unde

$$\bar{n}_u\equiv 0,\ \bar{n}_v\equiv 0.$$

Vectorul $\bar{n}$, având derivatele nule în orice punct $M(u,v)$, va fi constant. Din relația $\bar{n}d\bar{r}=0$, valabilă în orice punct și pentru orice $d\bar{r}$, vom deduce

$$d(\bar{n}\bar{r})=d\bar{n}\cdot\bar{r}+\bar{n}\cdot d\bar{r}=0\,;\quad \bar{n}\bar{r}=a,$$

unde $a$ este o constantă. Notând cu $\bar{r}_0$ vectorul de poziție al unui punct $M_0$ al suprafeței, vom avea $\bar{n}\bar{r}_0=a$, de unde

$$\bar{n}(\bar{r}-\bar{r}_0)=0.$$

Suprafața se reduce, deci, la planul ce trece prin $M_0$ și este perpendicular pe $\bar{n}=\text{const}$.

Evident, pentru orice plan vom avea $d\bar{n}=0$ în orice punct, astfel încât *relația $d\bar{n}=0$ caracterizează planele.*

*Rezultatele obținute până în prezent, fără a lua în considerație variația bivectorului $d\bar{\sigma}$, nu conțin niciun element caracteristic suprafețelor curbe, astfel încât sunt aplicabile și planului raportat la un sistem de coordonate curbilinii.*

Numai *prin introducerea variației elementului $d\bar{\sigma}$ se creează o deosebire între plane și suprafețe,* prin apariția unei noi proprietăți geometrice locale: *curbura.*

Pentru a caracteriza acest element geometric intuitiv, va fi necesar să-l măsurăm printr'o mărime geometrică. Unghiul $\omega$, introdus mai sus, nu are această calitate, deoarece depinde de direcția deplasării $d\bar{r}$. In același timp, desvoltarea ecuației suprafeței în jurul unui punct $M_0$ prin formula (78,VI) arată clar că deosebirea dintre planul tangent și suprafața pe care o aproximează acest plan, începe dela termenii de ordinul al doilea, deci dela $d^2\bar{r}$.

Vom putea caracteriza planul din acest punct de vedere printr'un element scalar, care depinde atât de $\bar{n}$, cât și de $d^2\bar{r}$, stabilind propoziția următoare:

*Condiția necesară și suficientă ca o suprafață să se reducă la un plan este ca*

$$\bar{n}d^2\bar{r}=0$$

*în orice punct ordinar și pentru orice deplasare $d\bar{r}$ pe suprafață.*

Condiția este necesară, deoarece din ecuația planului oarecare

$$\bar{n}(\bar{r}-\bar{r}_0)=0\,;\quad \bar{n}=\text{const},$$

deducem prin diferențiere

$$d\bar{n}\,\bar{r}+\bar{n}\,d\bar{r}=\bar{n}\,d\bar{r}=0\,;\quad (d\bar{n}=0)$$

și apoi

$$d(\bar{n}\,d\bar{r})=d\bar{n}\,d\bar{r}+\bar{n}\,d^2\bar{r}=\bar{n}\,d^2\bar{r}=0.$$

Condiția este și suficientă, deoarece din derivarea relațiilor (107,VI) deducem

$$\bar{n}_u\bar{r}_u+\bar{n}\,\bar{r}_{uu}=0,\quad \text{etc.},$$

deci

$$\begin{aligned}\bar{n}_u\bar{r}_u&=-\bar{n}\,\bar{r}_{uu};\\ \bar{n}_u\bar{r}_v=\bar{n}_v\bar{r}_u&=-\bar{n}\,\bar{r}_{uv};\\ \bar{n}_v\bar{r}_v&=-\bar{n}\,\bar{r}_{vv},\end{aligned}\qquad (08,VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru orice suprafaţă. Cum însă avem

$$\bar{n}\, d^2\bar{r} = \bar{n}(\bar{r}_{uu}\, du^2 + 2\bar{r}_{uv}\, du\, dv + \bar{r}_{vv}\, dv^2) = 0,$$

*du*, *dv* fiind arbitrari, deducem

$$\bar{n}\bar{r}_{uu} = \bar{n}\bar{r}_{uv} = \bar{n}\bar{r}_{vv} = 0,$$

iar din relaţiile (108,VI)

$$\bar{n}_u\bar{r}_u = 0, \quad \bar{n}_u\bar{r}_v = 0; \quad \bar{n}_v\bar{r}_u = 0, \quad \bar{n}_v\bar{r}_v = 0.$$

Vectorii $\bar{n}_u$ şi $\bar{n}_v$ fiind perpendiculari pe $\bar{r}_u$ şi $\bar{r}_v$, care sunt liniar independenţi, vor avea direcţia lui $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$, deci direcţia lui $\bar{n}$, ceeace nu este posibil deoarece $\bar{n}d\bar{n} = 0$ şi deci $\bar{n}$ este perpendicular pe $\bar{n}_u$ şi $\bar{n}_v$.

Prin urmare

$$\bar{n}_u = 0, \quad \bar{n}_v = 0, \quad d\bar{n} = 0$$

pentru orice $d\bar{r}$ şi în orice punct ordinar, deci, conform cu rezultatul precedent, suprafaţa se reduce la un plan.

Relaţia scalară $\bar{n}d^2\bar{r} = 0$, echivalentă cu $d\bar{n} = 0$, deşi ultima este o relaţie vectorială, caracterizează deci planele. In cazul suprafeţelor, ea nu mai are loc, primul său membru fiind un scalar, care poate fi evaluat.

Din relaţia $\bar{n}d\bar{r} = 0$, valabilă pentru orice suprafaţă, deducem prin diferenţiere

$$\bar{n}d^2\bar{r} = -dn\, d\bar{r}. \tag{109,VI}$$

Inlocuind $d^2\bar{r}$ prin expresia sa, vom scrie

$$\bar{n}d^2\bar{r} = \bar{n}\bar{r}_{uu}du^2 + 2\bar{n}\bar{r}_{uv}du\, dv + \bar{n}\bar{r}_{vv}dv^2.$$

Vom nota; ţinând seama de (108,VI)

$$\left.\begin{aligned} L &= \bar{n}\bar{r}_{uu} = -\bar{n}_u\bar{r}_u = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}\bar{r}_{uu} = \frac{\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{uu}}{\sqrt{EG-F^2}}; \\ M &= \bar{n}\bar{r}_{uv} = -\bar{n}_u\bar{r}_v = -\bar{n}_v\bar{r}_u = \frac{\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{uv}}{\sqrt{EG-F^2}}; \\ N &= \bar{n}\bar{r}_{vv} = -\bar{n}_v\bar{r}_v = \frac{\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{vv}}{\sqrt{EG-F^2}}; \\ W &= \sqrt{EG-F^2}. \end{aligned}\right\} \tag{110,VI}$$

Cu această notaţie putem scrie:

$$\bar{n}d^2\bar{r} = -d\bar{n}\, d\bar{r} = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2. \tag{111,VI}$$

Expresia astfel obţinută este o formă pătratică în variabilele *du*, *dv*, numită *a doua formă metrică fundamentală* a suprafeţei. *Ea este independentă, atât de sistemul de referinţă al spaţiului, cât şi de alegerea coordonatelor curbilinii pe suprafaţă.*

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, ea este produsul scalar al vectorilor $d\bar{n}$ și $dr$, care au semnificații independente de sistemul de referință în spațiu, în același timp $d\bar{r}$, cât și $d\bar{n}$ sunt în planul tangent și au semnificații independente de curbele coordonate.

Din propoziția precedentă, deducem:

*Condiția necesară și suficientă ca o suprafață să se reducă la un plan, este ca a doua formă fundamentală să fie nulă în orice punct și pentru orice deplasare du, dv, deci*

$$L=0;\quad M=0;\quad N=0 \qquad (112,VI)$$

*în orice punct al suprafeței.*

In adevăr, pentru ca forma pătratică $\bar{n}d^2\bar{r}$ să fie nulă pentru orice $du$, $dv$, trebue ca toți coeficienții săi să fie nuli, și reciproc, dacă acești coeficienți sunt nuli, forma este nulă pentru orice deplasare $du$, $dv$.

Vom numi *suprafețe curbe* suprafețele, pentru care a doua formă fundamentală nu se anulează pentru orice deplasare, $du$, $dv$ decât în puncte care nu formează domenii cu două dimensiuni.

Punctele în care

$$L=0;\quad M=0;\quad N=0$$

pot fi izolate, sau pot forma linii pe suprafața curbă și le vom numi *puncte plate.*

**Exemplu.** *Conoizii de ecuație vectorială* (81,VI)

$$\bar{r}=\bar{i}u\cos v+\bar{j}u\sin v+\bar{k}g\cos pv.$$

Avem formulele

$$\bar{r}_u=\bar{i}\cos v+\bar{j}\sin v;$$

$$\bar{r}_v=-\bar{i}u\sin v+\bar{j}u\cos v-\bar{k}gp\sin pv;$$

$$\bar{r}_{uu}=\bar{0};$$

$$\bar{r}_{uv}=-\bar{i}\sin v+\bar{j}\cos v;$$

$$\bar{r}_{vv}=-\bar{i}u\cos v-\bar{j}u\sin v-\bar{k}gp^2\cos pv,$$

din care deducem

$$E=1;\quad F=0;\quad G=u^2+p^2g^2\sin^2 pv;$$

$$W=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+p^2g^2\sin^2 pv};$$

$$L=0;\quad M=\frac{gu\sin pv}{W},\quad N=-\frac{pgu^2\cos pv}{W}.$$

Cele două forme fundamentale vor fi

$$ds^2=du^2+(u^2+p^2g^2\sin^2 pv)\,d^2v;$$

$$\bar{n}d^2\bar{r}=\frac{gu}{W}(\sin pv\,du\,dv-pu\cos pv\,dv^2).$$

Punctele ordinare, pentru care a doua formă fundamentală se anulează pentru orice deplasare $du$, $dv$ se obțin pentru

$$u=0\quad\text{cu}\quad pv\neq m\pi,$$

Scanned with OKEN Scanner

$m$ fiind întreg. Este ușor de văzut că punctele $u=0$, $pv=m\pi$ sunt singulare, deoarece avem

$$W=|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|=0$$

pentru $u=0$ și $pv=m\pi$.

Curba $u=0$ este segmentul din axa $Oz$, cuprins între $-g$ și $+g$. Punctele excluse sunt deci capetele intervalului $-g<z<g$.

*Aplicație. Tensiunile în pereții unui vas de revoluție, cu pereți subțiri, plin cu un fluid în echilibru.* Vasul, fiind presupus a avea pereții subțiri, se comportă ca o membrană elastică și suprafața sa interioară este supusă exclusiv la tensiuni, care se exercită pentru fiecare element de suprafață dealungul curbelor care limitează elementul de suprafață. Considerăm un element de suprafață $d\sigma$ mărginit de curbele ortogonale $u$, $v$, $u+du$, $v+dv$ (fig. 180). Fie $\bar{\tau}$ și $\tau$ versorii tangentelor îndreptați în sensul lui $u$ crescător și $v$ crescător, $\Theta$ tensiunea pe unitatea de lungime a curbei $v$, $T$ tensiunea pe unitatea de lungime a curbei $v$ și $\bar{p}$ presiunea, care se exercită normal pe elementul $d\sigma$. Notând cu indicii $u$ și $v$ diferențialele în direcțiile $u$ și $v$ și egalând cu zero totalitatea forțelor, care acționează asupra elementului $d\sigma$, avem

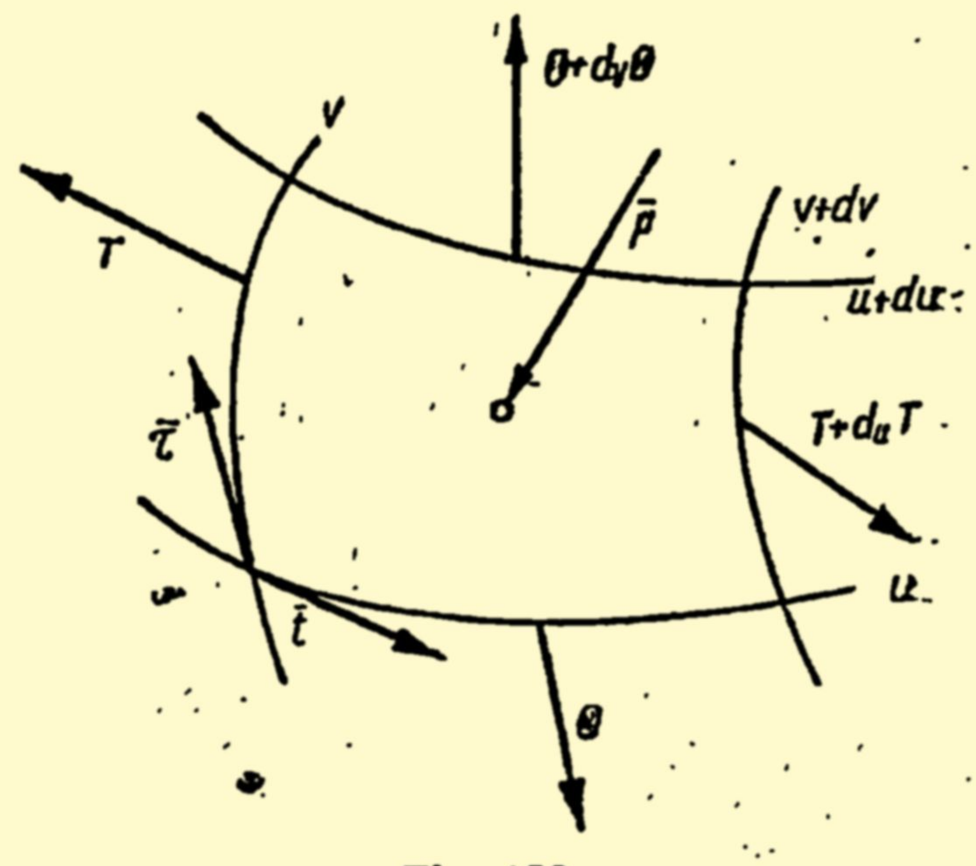



Fig. 180

$$(\Theta+d_v\Theta)(\bar{\tau}+d_v\bar{\tau})\,ds_u-\Theta\bar{\tau}\,ds_u+(T+d_uT)(\bar{t}+d_u\bar{t})\,ds_v-T\bar{t}\,ds_v-p\bar{n}\,d\sigma=0,$$

unde $\bar{n}$ este versorul normalei interioare la suprafață.

Desvoltând calculele, împărțind cu produsul $ds_u ds_v=d\sigma$ (curbele parametrice fiind ortogonale) și neglijând infiniții mici de ordin superior, avem

$$\Theta\frac{d_v\bar{\tau}}{ds_v}+T\frac{d_u\bar{t}}{ds_u}+\bar{t}\frac{dT}{ds_u}+\bar{\tau}\frac{d\Theta}{ds_v}=p\bar{n}.$$

Notând cu $\bar{n}_u$ și $\bar{n}_v$ versorii normalelor principale la curbele $u$ și $v$ și cu $\rho_u$ și $\rho_v$ razele de curbură, avem, în baza formulelor lui Frenet

$$T\frac{\bar{n}_u}{\rho_u}+\Theta\frac{\bar{n}_v}{\rho_v}+\bar{t}\frac{dT}{ds_u}+\bar{\tau}\frac{d\Theta}{ds_v}=p\bar{n}. \qquad (113,VI)$$

Dacă suprafața este de rotație (fig. 181) cu axă verticală și se iau drept curbe $u$ și $v$ meridianele și paralelele, se observă că $\bar{n}=\bar{n}_v$. Multiplicând scalar egalitatea vectorială (113,VI) cu $\bar{n}$, avem

$$T\frac{\sin\varphi}{\rho_u}+\frac{\Theta}{\rho_v}=p. \qquad (114,VI)$$

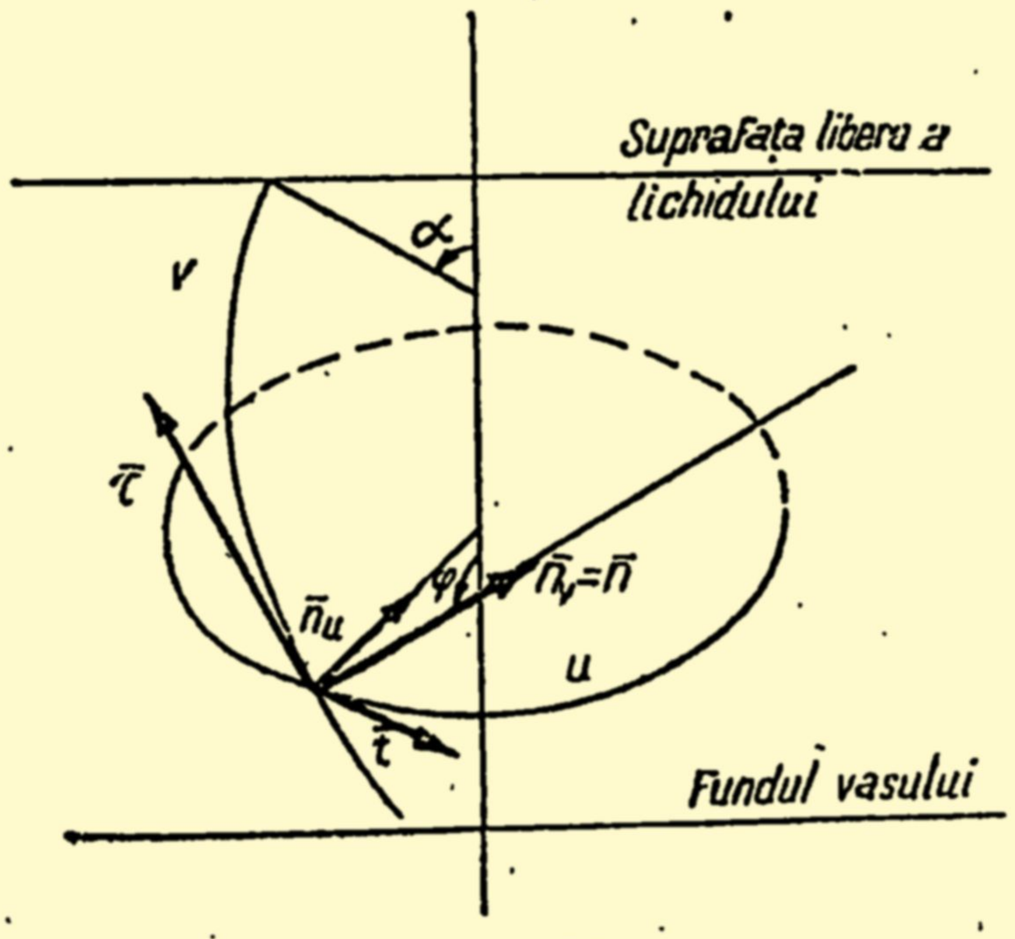



Fig. 181

unde $\varphi$ este unghiul format de $\bar{n}=\bar{n}_v$ cu axa de simetrie a vasului. Se observă imediat că $\frac{d\varphi}{ds_v}=-\frac{1}{\rho_v}$. Multiplicând scalar relația (113,VI) cu $\bar{\tau}$ avem

$$T\frac{\cos\varphi}{\rho_u}+\frac{d\Theta}{ds_v}=0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$T\frac{\cos\varphi}{\rho_u}=\frac{d\theta}{d\varphi}\cdot\frac{1}{\rho_v}\cdot \qquad (115,VI)$$

Eliminând pe $T$ între (114,VI) și (115,VI), avem

$$\frac{d\theta}{d\varphi}+\theta\operatorname{ctg}\varphi-p_\rho v\operatorname{ctg}\varphi=0,$$

ecuație diferențială liniară de ordinul întâi, (deoarece $\rho_v$ este o funcție cunoscută de $\varphi$), care se va integra ținând seama de faptul că pentru $\varphi=\alpha$, unghi corespunzător suprafeței libere a lichidului, adică punctelor situate pe paralela de cotă maximă, avem $\theta=T=0$. Odată determinată valoarea tensiunii $\theta$, se determină $T$ din relația (114,VI), unde $\rho_u$ este deasemenea o funcție cunoscută de $\varphi$. Ca exercițiu, se vor efectua cuadraturile în cazul când suprafața de revoluție este un trunchi de con sau o zonă sferică.

## § 192 Suprafețe generate de curbe

In ceeace precedă, suprafețele au fost considerate ca locuri de puncte: un punct variabil cu două grade de libertate generează o suprafață[1]).

Introducerea curbelor coordonate arată că pe o suprafață există familii de curbe, iar din exemplele practice rezultă că o suprafață poate fi generată și prin mișcarea unei curbe. Fiind dată o familie de curbe $C$ cu un parametru $\lambda$, de ecuație vectorială

$$\bar{r}=\bar{r}(u,\lambda) \qquad (116,VI)$$

mulțimea punctelor definite prin această ecuație constitue o suprafață, dacă vectorul $\bar{r}(u,\lambda)$ depinde de doi parametri. In adevăr, orice reprezentare vectorială de forma (116,VI) corespunde unei suprafețe $S$, dacă

$$\bar{r}_u\times\bar{r}_\lambda\not\equiv 0. \qquad (117,VI)$$

Această suprafață conține, evident, întreaga familie de curbe (116,VI). Presupunând că *reprezentarea parametrică este proprie,* prin fiecare punct a lui $S$ va trece o curbă $C$ și numai una, care va fi o curbă coordonată $\lambda=$const. A doua familie de curbe coordonate va fi formată de curbele $u=$const, deci de traiectoriile unui punct fixat pe $C$ prin parametrul său.

Când pe o suprafață există o familie de curbe, astfel încât prin orice punct al său trece o curbă, și numai una, din familie, spunem că *suprafața este generată de familia de curbe.* Cele două familii de linii coordonate ale unei suprafețe generează suprafața în domeniul în care există sistemul de coordonate curbilinii.

*Orice familie de curbe $C$, cu un parametru continuu, generează o suprafață, cu condiția* (117,VI) *și dacă reprezentarea parametrică* (116,VI) *este proprie, punctele lui $S$ sunt ordinare.*

Dacă reprezentarea nu este proprie, suprafața va putea avea mai multe pânze, în general separabile din punct de vedere analitic.

*Orice suprafață $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ poate fi considerată ca generată de o familie de curbe într'o infinitate de moduri.*

---

[1]) Pentru teoria vectorială a curbelor și suprafețelor, a se vedea și *G. Valiron,* Op. cit.

Scanned with OKEN Scanner

Stabilind între $u$ şi $v$ o relaţie de forma

$$v = f(u, \lambda),$$

unde $\lambda$ este un parametru, obţinem *pe suprafaţa* $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ o familie de curbe având ca ecuaţie vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}[u, f(u, \lambda)] = \bar{\rho}(u, \lambda). \qquad (118,VI)$$

Aceasta constitue o nouă reprezentare a unei porţiuni $D$ din $S$ în funcţie de parametrii $u$ şi $\lambda$.

In adevăr, pentru ca $\bar{\rho}(u, \lambda)$ să descrie o suprafaţă, trebue ca $\bar{\rho}_u \times \bar{\rho}_\lambda \not\equiv 0$. Insă, din teorema funcţiilor compuse deducem

$$\bar{\rho}_u = \bar{r}_u + \bar{r}_v f_u, \quad \bar{\rho}_\lambda = \bar{r}_v f_\lambda;$$
$$\bar{\rho}_u \times \bar{\rho}_\lambda = (\bar{r}_u + \bar{r}_v f_u) \times \bar{r}_v f_\lambda = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) f_\lambda.$$

Cum $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \not\equiv 0$ în $D$ domeniul $D$ pe $S$, dacă $f_\lambda \not\equiv 0$, deci dacă $f(u, \lambda)$ depinde efectiv de $\lambda$, vectorul $\bar{\rho}(u, \lambda)$ va descrie o porţiune din $S$. Dacă reprezentarea parametrică (118,VI) este proprie în $D$, prin fiecare punct al domeniului respectiv va trece o curbă $\lambda = \text{const.}$ şi numai una, deci suprafaţa va fi generată de familia de curbe cu un parametru (118,VI). Cum pe de altă parte, funcţia $f(u, \lambda)$ este arbitrară, îndeplinind numai condiţii convenabile de derivabilitate, există o infinitate de posibilităţi de a genera suprafaţa printr'o familie de curbe. Mai general, prin transformarea

$$u = \varphi(\lambda, \mu); \quad v = \psi(\lambda, \mu)$$

suprafaţa va fi generată de curbele $\lambda = \text{const.}$ sau $\mu = \text{const}$, constituind un nou sistem de coordonate curbilinii pe $S$.

**Exemplu.** *Torul.* Suprafeţele de rotaţie sunt generate de familia cu un parametru a meridianelor, care se rotesc în jurul axei de rotaţie. Folosind reprezentarea (81,VI) ecuaţia vectorială a unei suprafeţe de rotaţie este

$$\bar{r} = \bar{i}\,\varphi(u)\cos v + \bar{j}\,\varphi(u)\sin v + \bar{k}\,\psi(u),$$

unde

$$x = \varphi(u); \quad z = \psi(u)$$

sunt ecuaţiile meridianei în planul $zOx$.

In cazul torului, meridianele sunt cercuri de rază $b$ având centrele la o distanţă $a$ de axa $Oz$. Luând pentru simplificare planul ecuatorului ca plan $xOy$, meridiana va avea ecuaţiile

$$x = a + b\cos u; \quad z = b\sin u,$$

deci ecuaţia vectorială a torului va fi

$$\bar{r} = \bar{i}\,(a + b\cos u)\cos v + \bar{j}\,(a + b\cos u)\sin v + \bar{k}\,b\sin u.$$

Pentru $v = \text{const}$, se obţin ca generatoare cercurile meridiane, iar pentru $u = \text{const}$. cercurile paralele, care constitue o a doua familie de generatoare.

Vom avea

$$\bar{r}_u = -\bar{i}\,b\sin u\cos v - \bar{j}\,b\sin u\sin v + \bar{k}\,b\cos u;$$
$$\bar{r}_v = -\bar{i}\,(a + b\cos u)\sin v + \bar{j}\,(a + b\cos u)\cos v;$$
$$\bar{r}_{uu} = -\bar{i}\,b\cos u\cos v - \bar{j}\,b\cos u\sin v - \bar{k}\,b\sin u;$$
$$\bar{r}_{uv} = \bar{i}\,b\sin u\sin v - \bar{j}\,b\sin u\cos v;$$
$$\bar{r}_{vv} = -\bar{i}\,(a + b\cos u)\cos v - \bar{j}\,(a + b\cos u)\sin v,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde vom deduce coeficienții celor două forme fundamentale

$$E = (a + b\cos u)^2; \quad F = 0; \quad G = b^2;$$
$$EG - F^2 = W^2 = (a + b\cos u)^2 b^2;$$

$$L = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uu}}{W} = -(a + b\cos u)\cos v;$$

$$M = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uv}}{W} = 0;$$

$$N = \frac{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{vv}}{W} = -b.$$

Verificăm astfel că a doua formă fundamentală nu este nulă. Torul este o suprafață curbă, având ca element liniar, respectiv element de arie,

$$ds^2 = b^2 du^2 + (a + b\cos u)^2 dv^2;$$
$$d\sigma = b \mid a + b\cos u \mid du\, dv.$$

## § 193. Infășurătoarea unei familii de curbe cu un parametru. Puncte singulare pe suprafețe

Fiind dată o familie de curbe $C(\lambda)$ cu un parametru, în spațiu, definită prin ecuația

$$\bar{r} = \bar{r}(u, \lambda),$$

ea generează, în general, o suprafață $S$, având aceeași ecuație vectorială, în care $u$ și $\lambda$ sunt coordonate curbilinii. În domeniul $D$, în care reprezentarea parametrică este proprie, prin fiecare punct $M$ trece o singură curbă $C(\lambda)$, astfel încât două curbe $C(\lambda_1)$ și $C(\lambda_2)$ nu se pot intersecta în acest domeniu. Aceasta nu exclude însă posibilitatea ca cele două curbe să se intersecteze pe frontiera lui $D$. Deasemenea, este posibil să existe o curbă $\Gamma$ tangentă la toate curbele familiei $C$. În acest caz, vom numi această curbă *înfășurătoarea* familiei $C(\lambda)$.

*In general, o familie de curbe cu un parametru nu admite o înfășurătoare.*

In adevăr, în ipoteza că $\Gamma$ există, în sistemul de coordonate curbilinii $u, \lambda$ ecuația sa va fi de forma $u = u(\lambda)$, deci ecuația sa vectorială va fi

$$\bar{R} = \bar{r}[u(\lambda), \lambda].$$

Vectorul tangent într'un punct curent la $\Gamma$ are deci expresia

$$\bar{R}_\lambda = \bar{r}_u \frac{du}{d\lambda} + \bar{r}_\lambda.$$

Pentru ca $\Gamma$ să fie tangentă la $C(\lambda)$ într'un punct $M(u, \lambda)$, trebue ca

$$\bar{r}_u \times \bar{R}_\lambda = \bar{r}_u \times \left(\bar{r}_u \frac{du}{d\lambda} + \bar{r}_\lambda\right) = \bar{r}_u \times \bar{r}_\lambda = 0.$$

Această condiție nu este, însă, îndeplinită într'un punct ordinar al porțiunii

de suprafață $S$, generată de familia $C(\lambda)$. Totodată condiția $\bar{r}_u \times \bar{r}_\lambda = 0$ este echivalentă cu

$$\frac{D(x,y)}{D(u,\lambda)} = 0\,; \quad \frac{D(y,z)}{D(u,\lambda)} = 0\,; \quad \frac{D(z,x)}{D(u,\lambda)} = 0$$

sau

$$\frac{x_u}{x_\lambda} = \frac{y_u}{y_\lambda} = \frac{z_u}{z_\lambda},$$

deci cu trei relații între $u$ și $\lambda$. In general, sistemul de ecuații, astfel obținut, este incompatibil, deci înfășurătoarea nu există. Dacă totuși, acest sistem este compatibil, el definește și punctele singulare ale suprafeței $S$ în reprezentarea parametrică $\bar{r} = \bar{r}(u,\lambda)$. Prin urmare: *Dacă familia de curbe $C(\lambda)$ admite o înfășurătoare, curba $\Gamma$ conține punctele singulare ale reprezentării parametrice $\bar{r} = \bar{r}(u,\lambda)$ a suprafeței $S$, generată de aceste curbe.*

Trebue să facem însă observația că *un punct al unei suprafețe, ordinar într'o reprezentare parametrică proprie, este ordinar în orice altă reprezentare parametrică proprie, dedusă din prima printr'o transformare regulată de clasa* $C^p$, *cu* $p \geqq 1$, *a parametrilor.*

Astfel, dacă punctul $M(u_0, v_0)$ este ordinar în reprezentarea

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v),$$

deci dacă

$$r_{u_0} \times \bar{r}_{v_0} \neq 0$$

și dacă

$$U = U(u,v)\,; \quad V = V(u,v)$$

este o transformare regulată, de clasa $C^p$, cu $p \geqq 1$[1]), deci în care $U$ și $V$ sunt funcții continue cu derivatele lor de primele $p \geqq 1$ ordine, iar

$$J = \frac{D(U,V)}{D(u,v)} \neq 0,$$

atunci punctul $M(U_0, V_0)$, unde

$$U_0 = U(u_0, v_0)\,; \quad V_0 = V(u_0, v_0)$$

este deasemenea ordinar în reprezentarea parametrică

$$\bar{r} = \bar{R}(U, V).$$

In adevăr vom avea:

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \left(\bar{R}_U \frac{\partial U}{\partial u} + \bar{R}_V \frac{\partial V}{\partial u}\right) \times \left(\bar{R}_U \frac{\partial U}{\partial v} + \bar{R}_V \frac{\partial V}{\partial v}\right) = [\bar{R}_U \times \bar{R}_V] \frac{D(U,V)}{D(u,v)}$$

și deci

$$\bar{R}_{U_0} \times \bar{R}_{V_0} \neq 0.$$

*Dacă însă între cele două reprezentări parametrice nu există o transformare nesingulară regulată, același punct poate fi ordinar într'una și singular în cealaltă.* De exemplu, în coordonate polare, polii unei sfere sunt puncte singulare, pe când în coordonate carteziene ei sunt puncte ordinare. Deaceea, *înfășurătoarea $\Gamma$ a familiei $C(\lambda)$ poate fi o curbă formată din puncte ordinare ale suprafeței într'o altă reprezentare parametrică.*

[1]) Cf. *O. Veblen* și *J. H. Whitehead*: Foundations of Differential Geometry. Cambridge—1932; sau traducerea rusă, Moscova, 1949.

Scanned with OKEN Scanner

Un caz important în care există, în general, o înfășurătoare a unei familii de curbe cu un parametru este cazul curbelor plane.

*O familie de curbe* $C(\lambda)$, *trasate pe un plan, admite în general o înfășurătoare.*

In adevăr, dacă raportăm spațiul la un sistem de referință cartezian ortogonal $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, în care $\bar{k}$ are direcția normalei la suprafață, un punct din plan va fi reprezentat prin vectorul

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y.$$

O familie de curbe cu un parametru

$$x = x(u, \lambda); \quad y = y(u, \lambda)$$

va defini într'un domeniu $D$ din plan un sistem de coordonate curbilinii $u, \lambda$, dacă

$$\frac{D(x, y)}{D(u, \lambda)} \neq 0.$$

Reprezentarea parametrică a lui $D$ va fi

$$\bar{r} = \bar{r}(u, \lambda) = \bar{i}\,x(u, \lambda) + \bar{j}\,y(u, \lambda),$$

ca și a familiei $C(\lambda)$.

Condiția ca aceste familii să admită o înfășurătoare fiind $\bar{r}_u \times \bar{r}_\lambda = 0$, vom avea

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_\lambda = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_u & x_\lambda & 0 \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}\,\frac{D(x, y)}{D(u, \lambda)} = 0.$$

Cum această condiție reprezintă o singură relație între $u$ și $\lambda$, înfășurătoarea va exista în general. Se vede, în același timp, că ea va conține punctele singulare ale sistemului de coordonate curbilinii $u, \lambda$ din plan. Cum planul nu are puncte singulare propriuzise, în care planul tangent este nedeterminat, *singularitatea punctelor înfășurătoarei provine din însuși sistemul de coordonate folosit.*

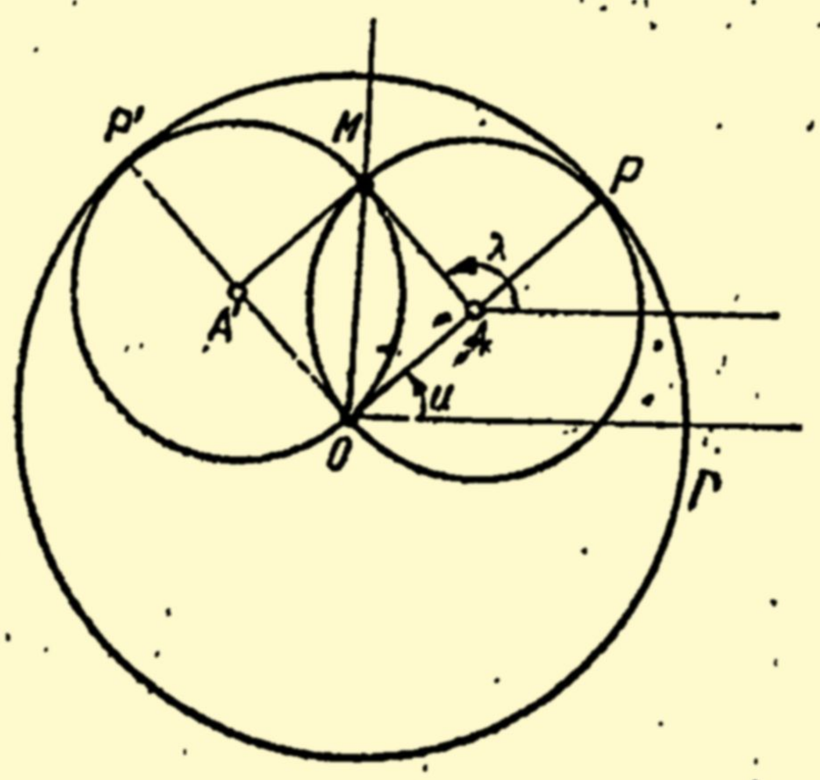



Fig. 182

**Exemplu.** *Infășurătoarea unei familii de cercuri din plan.* Cercurile de rază $a$, trecând printr'un punct $O$, au o înfășurătoare formată din cercul $\Gamma$ de rază $2a$ cu centrul în 0 și din punctul $O$ (fig. 182).

Un punct $M$ de pe un cerc $C(\lambda)$ este reprezentat parametric prin ecuația

$$\bar{r} = a(\bar{i}\cos u + \bar{j}\sin u) + a(\bar{i}\cos\lambda + \bar{j}\sin\lambda),$$

unde $u$ și $\lambda$ sunt unghiurile făcute de $OA$, respectiv $AM$ cu o direcție fixă din plan. Obținem astfel o reprezentare parametrică a domeniului din plan, delimitat de cercul $\Gamma$, din care excludem punctul $O$. Cele două familii $u = \text{const.}$ și $\lambda = \text{const.}$ sunt formate din cercurile familiei $C(\lambda)$, deci sunt suprapuse. In adevăr, parametrii $u$ și $\lambda$ pot fi permutați între ei. Un punct $M$ este intersecția cercului

cu centrul în $A$ cu cercul cu centrul în $A'$, dreapta $OA'$ făcând cu $Ox$ unghiul $\lambda$. Pentru a determina înfăşurătoarea, vom scrie

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_\lambda = \bar{k}\,\frac{D(x,y)}{D(u,\lambda)} = \bar{k}\,a\sin(\lambda - u) = 0,$$

de unde

$$\lambda = u, \quad \lambda = u + \pi.$$

Pentru prima soluţie obţinem cercul

$$\bar{r} = 2a(\bar{i}\cos u + \bar{j}\sin u),$$

iar pentru a doua punctul $O$: $r = 0$.

Sistemul de coordonate curbilinii $u$, $\lambda$ are ca domeniu interiorul cercului $\Gamma$ fără punctul $O$, cercul şi acest punct formând frontiera domeniului. Această frontieră este singulară pentru acest sistem de coordonate curbilinii, dar nu şi pentru plan.

Revenind la familiile de curbe cu un parametru din spaţiu, se poate demonstra că punctul de contact al curbelor $C(\lambda)$ cu înfăşurătoarea lor este limita punctului de intersecţie a lui $C(\lambda)$ cu o curbă $C(\lambda+\delta\lambda)$ vecină, când $\delta\lambda \to 0$. Acest punct se numeşte *caracteristic* pe $C(\lambda)$. Înfăşurătoarea este locul punctelor caracteristice ale curbelor $C(\lambda)$. Ea se poate reduce la unul sau mai multe puncte.

Considerarea înfăşurătoarelor familiilor de curbe de pe o suprafaţă atrage atenţia asupra semnificaţiei noţiunii de punct singular al unei suprafeţe într'o reprezentare parametrică: un astfel de punct poate fi ordinar într'o altă reprezentare parametrică. El este *singular în sens strict*, dacă, oricare ar fi reprezentarea parametrică, planul tangent nu este determinat, cum este, de exemplu, în vârful unui con.

## § 194. Suprafeţe riglate

Cel mai simplu exemplu de suprafeţe generate de o familie de curbe se obţine când generatoarele sunt drepte, depinzând de un parametru.

Folosind ecuaţia dreptei, care trece printr'un punct şi având o direcţie dată, vom scrie

$$\bar{r} = \bar{\rho}(v) + u\bar{l}(v). \qquad (119,VI)$$

Familia de drepte depinde de parametrul $v$ şi descrie o suprafaţă al cărei generatoare rectilinii se sprijină pe curba de ecuaţie $\rho = \bar{\rho}(v)$, numită *directoare*. Presupunând că $\bar{l}$ este un versor, ceeace nu restrânge generalitatea suprafeţei, paralelele duse printr'un punct $O$ la generatoare vor genera un con, numit *conul director* al suprafeţei, de ecuaţie vectorială

$$\bar{r} = u\bar{l}(v),$$

Calculând pentru acest con

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \bar{l} \times u\bar{l}',$$

observăm că el se reduce la o dreaptă, dacă $\bar{l} \times \bar{l}' = 0$, deci dacă $\bar{l}(v)$ are o direcţie fixă. In acest caz, suprafaţa riglată este un cilindru.

Extremitatea vectorului $\bar{l}(v)$ descrie o curbă $\Gamma$ pe sfera unitate cu centrul în $O$, numită *indicatoare sferică* a suprafeţei riglate. Conul director poate fi considerat ca generat de dreptele, care trec prin $O$ şi se sprijină pe indicatoarea

sferică (fig. 183). In general, orice con este o suprafață riglată și se obține din ecuația (119,VI) luând $\bar{\rho}(v)\equiv 0$. Cilindrii sunt deasemenea suprafețe riglate, a căror indicatoare sferică se reduce la un punct. Vom exclude acest caz în cele ce urmează și vom presupune pentru simplificare că *v reprezintă arcul indicatoarei sferice* $\Gamma$.

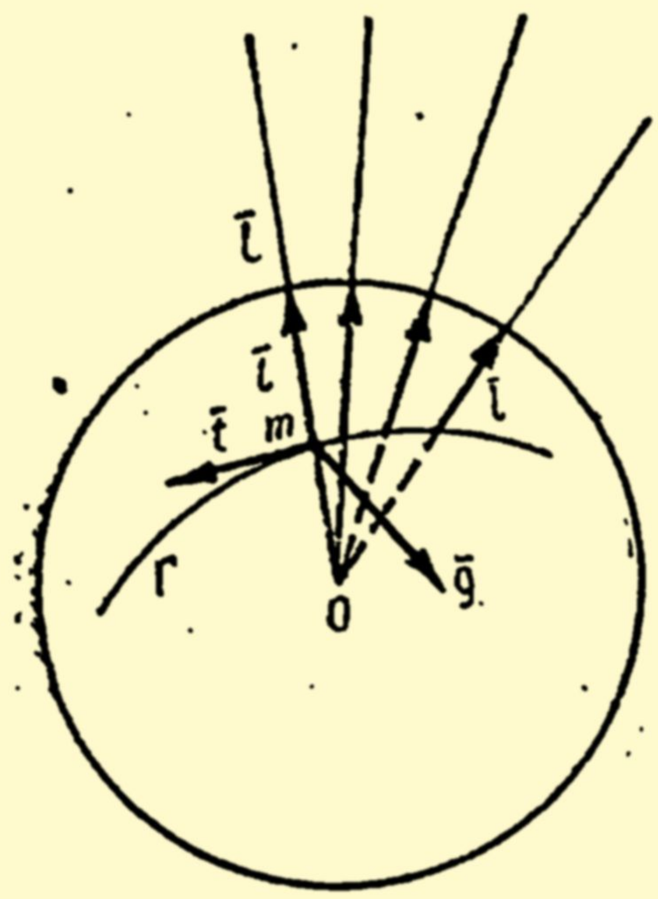


Fig. 183

Pentru calculul elementului liniar, vom scrie

$$d\bar{r}=d\bar{\rho}+\bar{l}\,du+u\,d\bar{l}.$$

Indicatoarea sferică va fi raportată la un triedru local format de $l$, care este normala la sferă în $m$, versorul $\bar{t}$ tangent la $\Gamma$ în $m$ și un vector

$$\bar{g}=\bar{l}\times\bar{t}.$$

Ecuația indicatoarei sferice fiind $\bar{r}=\bar{l}(v)$, vom avea $\bar{t}=\frac{d\bar{l}}{dv}$ și deci

$$d\bar{r}=d\bar{\rho}+\bar{l}\,du+u\bar{t}dv.$$

Să raportăm vectorul $d\bar{\rho}$ la triedrul mobil introdus: $\bar{l}$, $\bar{t}$, $\bar{g}$, punând

$$\frac{d\bar{\rho}}{dv}=-c\bar{t}+k\bar{g}+\lambda\bar{l}, \qquad (120,VI)$$

Componentele — $c$, $k$ și $\lambda$ fiind funcții de $v$. Revenind la expresia lui $d\bar{r}$, vom avea

$$d\bar{r}=\bar{l}\,du+[(u-c)\bar{t}+k\bar{g}+\lambda l]\,dv, \qquad (121,VI)$$

de unde

$$ds^2=d\bar{r}^2=du^2+[(u-c)^2+k^2+\lambda^2]\,dv^2+2\lambda\,du\,dv;$$

expresie, care se poate pune sub forma

$$ds^2=(du+\lambda dv)^2+[(u-c)^2+k^2]\,dv^2. \qquad (122,VI)$$

Dacă $\lambda\equiv 0$, ea se reduce la forma

$$ds^2=du^2+[(u-c)^2+k^2]dv^2$$

numită *formă geodezică*, foarte apropiată de expresia $dx^2+dy^2$ din plan. Pentru $\lambda=0$, vom deduce din (120,VI)

$$\bar{l}\,\frac{d\bar{\rho}}{dv}=\lambda=0,$$

deci generatoarele sunt ortogonale curbei directoare.

Din expresia (121,VI) a lui $d\bar{r}$ deducem

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r}_u=\bar{l};\quad \bar{r}_v=(u-c)\,\bar{t}+k\bar{g}+\lambda\bar{l};\\&W=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{(u-c)^2+k^2};\\&\bar{n}=\frac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{W}=\frac{1}{\sqrt{(u-c)^2+k^2}}[(u-c)\bar{g}-k\bar{t}].\end{aligned}\right\} \qquad (123,VI)$$

Pentru $\bar{k}=0$, $\bar{n}$ se reduce la expresia

$$\bar{n}=\bar{g}=\bar{l}\times\bar{t};$$

prin urmare, *planul tangent este același dealungul întregii generatoare* și este definit de tangenta la curba directoare și de generatoarea rectilinie. Vom spune în acest caz că suprafața este *desfășurabilă*.

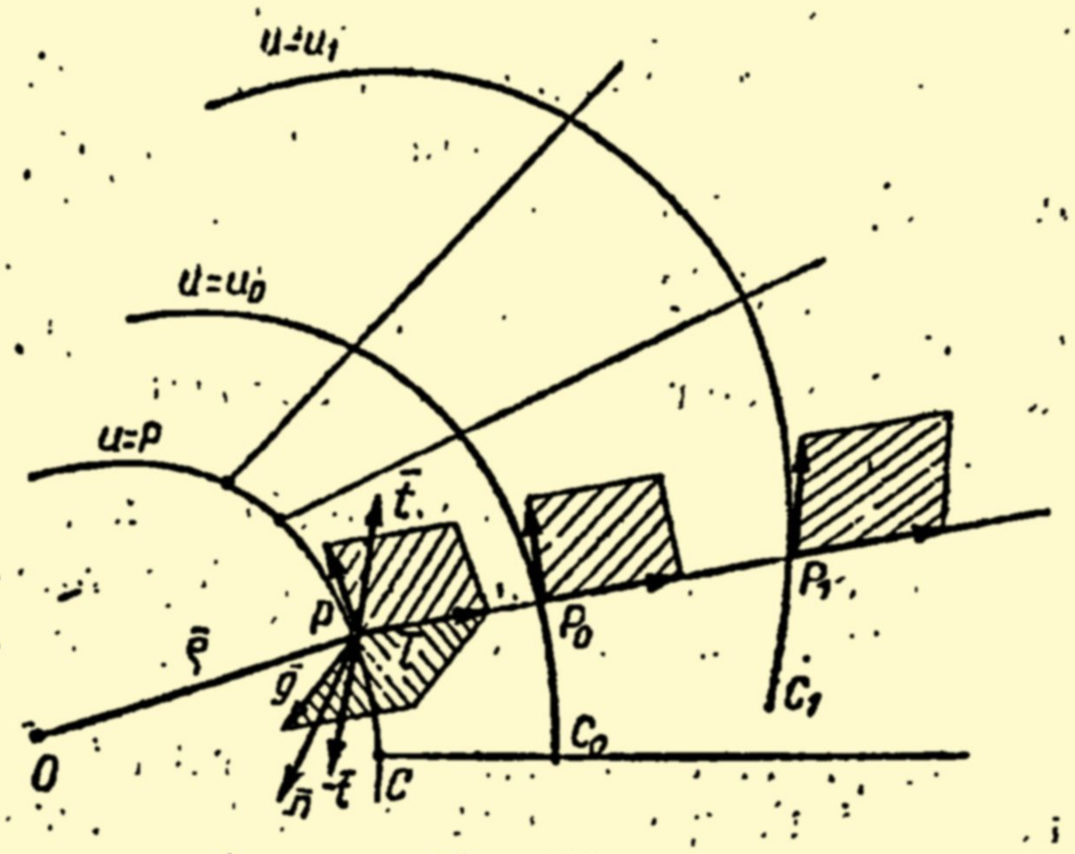


Fig. 184

Planul tangent la o suprafață riglată desfășurabilă nu depinde decât de un parametru $v$.

Condiția $k=0$ este și necesară pentru ca suprafața să fie desfășurabilă, deci pentru ca planul tangent să nu depindă decât de un parametru. In adevăr, din (123,VI) se vede că pentru $k\neq 0$, normala $\bar{n}$ are pe direcția $\bar{g}$ o componentă, care depinde de $u$ (fig. 184).

Presupunând suprafața nedesfășurabilă, putem studia variația planului tangent dealungul unei generatoare date, pornind dela observația că pentru $u=c$, vom avea

$$\bar{n}=-\bar{t}=-\bar{g}\times\bar{l}.$$

Fie $\omega$ unghiul făcut de planul tangent într'un punct oarecare $P$, de parametru $u$ pe generatoarea $MP$, cu planul $(\bar{l},\bar{g})$. Vom avea

$$\cos\omega=-\bar{t}\,\frac{(u-c)\bar{g}-k\bar{t}}{W}=\frac{k}{W}.$$

Din formula (123,VI) deducem apoi

$$\sin\omega=\frac{u-c}{W}$$

fiindcă $\bar{n}$ este descompus după direcțiile $\bar{g}$, $-\bar{t}$. In consecință, obținem *formula lui Chasles*

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{u-c}{k}, \qquad (124,VI)$$

care permite să urmărim rotația planului tangent în jurul generatoarei, când $P$ se deplasează pe generatoare.

Să presupunem $k>0$. Atunci

$$\cos\omega>0,\quad \sin\omega>0 \text{ pentru } \quad u>c,$$

deci $\bar{n}$ se găsește între $-\bar{t}$ și $\bar{g}$, iar $\omega$ crește cu $u$. Rotația planului se face în sens negativ: dela stânga la dreapta.

Vom numi *punct central* al generatoarei punctul $P_c$ obținut pentru $u=c$, iar planul tangent corespunzător, care este $(\bar{l},\bar{g})$, *plan central*.



Scanned with OKEN Scanner

Când $u$ variază dela $c$ la $+\infty$, planul tangent se roteşte dela planul central până la planul $\bar{l}$, $\bar{t}$ având normala $\bar{g}$, care este perpendiculară pe planul central, deoarece $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Urmărind variaţia planului tangent, când $u$ variază dela $-\infty$ la $+\infty$, în cazul $k>0$, *planul tangent se roteşte începând dela poziţia* $(\bar{t}, \bar{l})$ *de normală* $-\bar{g}$, *trece prin poziţia de plan central, pentru* $u=c$ *şi ajunge în poziţia planului* $(\bar{l}, \bar{t})$ *ac normală* $\bar{g}$, *rotaţia sa fiind de amplitudine* $\pi$ *în sensul negativ pentru un observator aşezat dealungul lui* $\bar{l}$.

Planul tangent în punctul dela infinit al generatoarei se numeşte *plan asimptot*. Este uşor de văzut că planul asimptot este paralel cu planul tangent la conul director, care este determinat de generatoarea $\bar{l}$ si tangenta $\bar{t}$ la indicatoarea sferică $\Gamma$.

Schimbarea sensului versorului $\bar{l}$, atrage după sine şi schimbarea sensului lui $\bar{t}$. Deci $\bar{g}$ rămâne neschimbat. Se verifică atunci uşor că *rotaţia este independentă de alegerea sensului lui* $\bar{l}$, *deasemenea de orientarea indicatoarei sferice* $\Gamma$.

Proprietăţile caracteristice suprafeţelor riglate decurg din variaţia planului tangent dealungul generatoarelor. Coeficienţii $c$, $k$, $\lambda$, de care depinde această variaţie, se pot calcula în funcţie de elementele suprafeţei. Inmulţind scalar cu $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ ambii membri ai formulei (120,VI), vom obţine

$$c = -\frac{d\bar{\rho}}{dv}\bar{t}; \quad k = \frac{d\bar{\rho}}{dv}\bar{g}; \quad \lambda = \frac{d\bar{\rho}}{dv}.$$

Insă cum

$$\bar{t} = \frac{d\bar{l}}{dv} \quad \text{şi} \quad \bar{g} = \bar{l}\times\bar{t} = \bar{l}\times\frac{d\bar{l}}{dv},$$

vom putea scrie

$$c = -\frac{\bar{l}\,d\bar{l}\,d\bar{\rho}}{dv^2}; \quad k = \frac{\bar{l}\,d\bar{l}\,d\bar{\rho}}{dv^2}; \quad \lambda = \frac{\bar{l}\,d\bar{\rho}}{dv}. \qquad (125,VI)$$

Scalarul $\frac{1}{k}$ se numeşte *parametru de distribuţie* al planelor tangente dealungul generatoarelor.

Locul punctelor centrale, care este curba

$$\bar{r} = \bar{\rho}(v) + c\bar{l}(v). \qquad (126,VI)$$

se numeşte *linie de stricţiune* a suprafeţei riglate. In cazul suprafeţelor desfăşurabile, pentru care $k\equiv 0$, punctele centrale sunt singulare, deoarece $W=0$ pentru $k=0$, $u=c$, deci $\bar{r}_u\times\bar{r}_v=0$. Prin urmare, linia de stricţiune este singulară pe aceste suprafeţe, planul tangent fiind nedeterminat.

In cazul conurilor, ecuaţia vectorială se obţine reducând curba directoare la un punct:

$$\bar{r} = u\bar{l}(v).$$

Vom avea

$$\bar{\rho}(v)=0; \quad d\bar{\rho}=0; \quad c=0; \quad k=0; \quad \lambda=0.$$

Linia de stricţiune se reduce deasemenea la un punct — vârful conului, — care este singular, în sens strict.

## § 195. Suprafeţe generate de elemente de contact. Infăşurătoare

Cercetarea proprietăţilor locale ale suprafeţelor ne conduce la necesitatea de a concepe o suprafaţă ca formată din porţiuni arbitrar de mici, asimilabile într'o primă aproximaţie cu porţiuni elementare de plane orientate. Folosind două familii de curbe cu un parametru, suprafaţa $S$ poate fi parcelată într'un număr arbitrar de mare de astfel de porţiuni (fig. 185). Toate proprietăţile locale rezultă din relaţiile dintre mărimile geometrice pe care le definim pe aceste elemente de suprafaţă, asimilabile cu bivectori tangenţi la $S$.

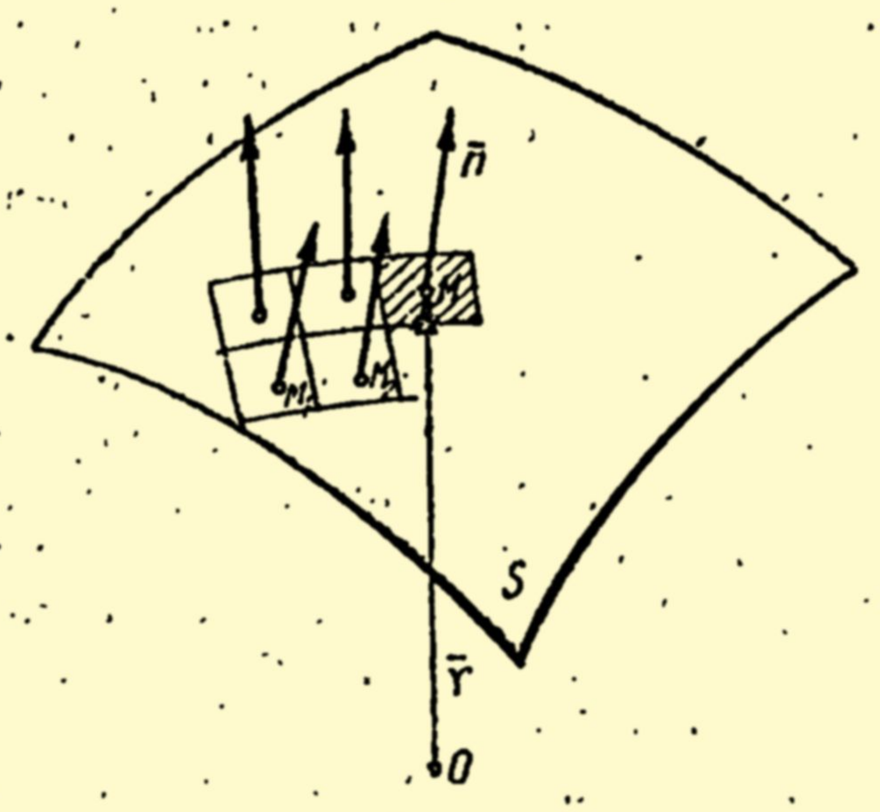


Fig. 185

Vom putea deci concepe o porţiune de suprafaţă, formată din puncte ordinare, ca reuniunea elementelor sale $d\bar{\sigma}$, obţinute printr'o parcelare oarecare, deci ca *un loc de bivectori tangenţi* $d\bar{\sigma}$. Pentru a da o formă mai riguroasă acestei descrieri a unei suprafeţe, vom observa că *elementele* $d\bar{\sigma}$, *concepute ca elemente plane tangente, nu au comun cu suprafaţa decât punctul M de contact, vecinătatea acestui punct putând fi considerată ca aparţinând suprafeţei numai cu o eroare de ordinul al doilea cel puţin.* In adevăr, reprezentarea suprafeţei prin formula (78,VI) în domeniul punctului $M(u, v)$ fiind

$$\bar{r}(u+\delta u, v+\delta v)=\bar{r}(u, v)+\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\delta u+\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\delta v+ \\ +\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\delta u+\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\delta v\right]^{(2)}+\cdots, \tag{127,VI}$$

elementul plan $d\bar{\sigma}$ de ecuaţie vectorială

$$\bar{\rho}=\bar{r}+\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\delta u+\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\delta v \tag{128,VI}$$

diferă de vecinătatea punctului $M$ prin termeni de ordinul al doilea cel puţin:

*Suprafaţa are un contact de ordinul întâi, în general, cu elementele sale* $d\bar{\sigma}$. Deaceea, vom spune că ea este înfăşurată de aceste elemente Deoarece în fiecare punct ordinar $M$ există un bivector tangent $d\bar{\sigma}$ şi numai unul, vom spune că orice porţiune ordinară de suprafaţă este generată de elementele sale $d\bar{\sigma}$.

Vom numi *element de contact* figura formată de un punct $M$ şi de un bivector elementar, care conţine acel punct. Punctul $M$ se numeşte *centrul* elementului de contact. Orice element de suprafaţă $d\bar{\sigma}$ este deci un element de contact. Vom spune că două elemente de contact sunt *vecine,* dacă au centrele vecine şi dacă fac între ele un unghi arbitrar de mic. Două elemente de contact vecine, care au centrele unul pe celălalt, se numesc *elemente unite.*

*Orice suprafață poate fi considerată ca un loc de elemente de contact unite*, tot așa cum este concepută ca un loc de puncte ale spațiului. Această concepție, introdusă de *Sophus Lie*, explică dece proprietățile locale ale suprafețelor se obțin din studiul elementelor de suprafață $d\bar{\sigma}$ și are numeroase aplicații, atât geometrice cât și fizice.

Deoarece elementul de contact $d\bar{\sigma}$ este determinat în fiecare punct $M$ al unei suprafețe, iar punctul $M$ depinde de doi parametri, elementul $d\bar{\sigma}$ va depinde deasemenea de doi parametri. *Pentru a genera o suprafață, este necesar să cunoaștem condițiile, care caracterizează elementele sale de contact.* Cum aceste elemente sunt reduse la vecinătatea unui punct, relațiile dintre ele trebue să fie locale, deci nu pot defini direct o porțiune finită de suprafață, ci conduc la ecuații cu derivate parțiale. Suprafața căutată este o soluție anumită a acestor ecuații.

Pentru a genera direct o suprafață finită, cu ajutorul elementelor sale de contact, așa cum este generată de un punct sau o curbă variabilă, vom substitui acestor elemente planele tangente la suprafață, corespunzătoare și vom spune că suprafața este *înfășurată* sau *învelită* de planele sale tangente. In acest caz, vom observa însă că este posibil, de exemplu în cazul suprafețelor desfășurabile, ca planul tangent să nu varieze dealungul unei drepte de pe suprafață. Prin urmare, *planul tangent poate depinde de doi sau de un singur parametru.*

Pe de altă parte, *elementul de contact* (128,VI) $d\bar{\sigma}$ *nu caracterizează o anumită suprafață în vecinătatea centrului său M, ci este comun tuturor suprafețelor de ecuație* (127,VI), *care au un contact de ordinul întâi.* Deci, dacă în fiecare punct al unei suprafețe $S$ există o suprafață tangentă $\sum$, vom putea considera pe $S$ ca generată de elementele de contact $d\bar{\sigma}$ ale suprafețelor $\sum$, care sunt comune cu ale sale.

Putem atunci substitui acestor elemente însăși suprafețele $\sum$, așa cum am făcut cu planele tangente. In acest caz, vom spune că suprafața $S$ este înfășurată de mulțimea de suprafețe $\sum$, sau că este *înfășurătoarea* acestor suprafețe (fig. 186).

Orice suprafață este înfășurătoarea planelor sale tangente, deasemenea a suprafețelor obținute din desvoltarea (127,VI), redusă la termenii de diverse ordine. Se pune însă problema următoare: *Fiind dată o mulțime de suprafețe $\sum$, există o suprafață $S$ înfășurătoare, deci tangentă în fiecare punct unei suprafețe $\sum$ și astfel încât orice $\sum$ să fie tangentă la $S$?*

Dacă o suprafață $\sum$ are cu $S$ un element de contact $d\bar{\sigma}$ comun, sunt posibile două cazuri; sau niciun alt element vecin nu mai este comun acestor suprafețe, sau mai există și alte elemente vecine comune. Dacă pentru orice deplasare $\overline{MM'}$, elementul de contact din $M'$ este comun ambelor suprafețe, ele vor avea un contact de un ordin mai înalt în $M$. Excluzând acest caz și rămânând la contactul de ordinul întâi, dacă pentru o *anumită* deplasare $\overline{MM'}$ suprafețele $\sum$ și $S$ au un element comun în $M'$, vom presupune că această proprietate se regăsește și în punctul $M'$, deci pentru o deplasare $\overline{M'M''}$ suprafețele vor avea din nou un element de contact comun. Dacă punctele $M, M', M'', M''', \ldots$ se găsesc pe o curbă $C$, aceasta va fi comună ambelor suprafețe $S$ și $\sum$ și vom spune că acestea se *racordează* dealungul curbei $C$ (fig. 187).

Scanned with OKEN Scanner

După cum planele tangente la o suprafaţă constitue o familie, depinzând de doi parametri sau de unul, care variază în mod continuu, vom restrânge generalitatea mulţimii de suprafeţe $\Sigma$, care înfăşoară o suprafaţă $S$, considerând-o ca o familie de suprafeţe deduse una din alta prin variaţia continuă a unor parametri.

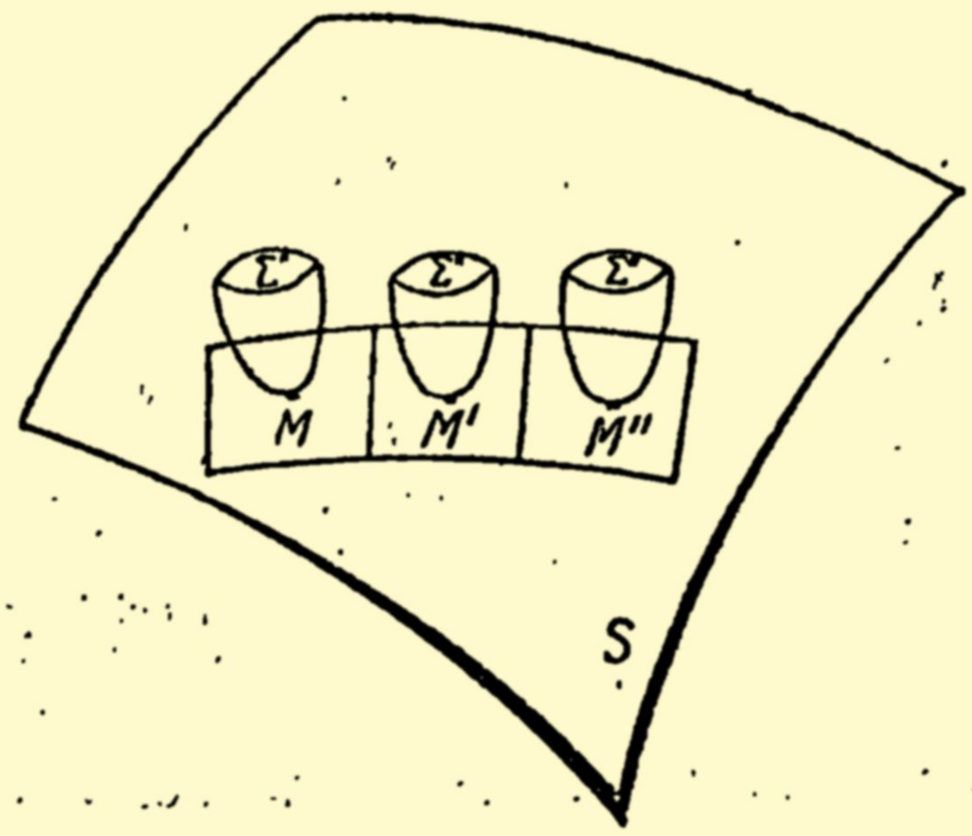



Fig. 186

In cazul când suprafeţele $\Sigma$ au cu $S$ un singur element de contact comun în vecinătatea unui punct $M$, familia $\Sigma$ va depinde de doi parametri, deoarece fiecărui punct $M$ de pe $S$ îi va corespunde o suprafaţă $\Sigma$ şi reciproc. In cazul când suprafeţele $\Sigma$ şi $S$ se racordează dealungul unei curbe, $C$, vom considera suprafaţa $S$ ca generată de aceste curbe $C$ şi deci familia de suprafeţe $\Sigma$ va depinde numai de un parametru.

Problema pusă mai sus se precizează atunci astfel: *Fiind dată o familie de suprafeţe $\Sigma$ cu unu sau cu doi parametri, există o suprafaţă $S$ înfăşurătoare a acestei familii?*

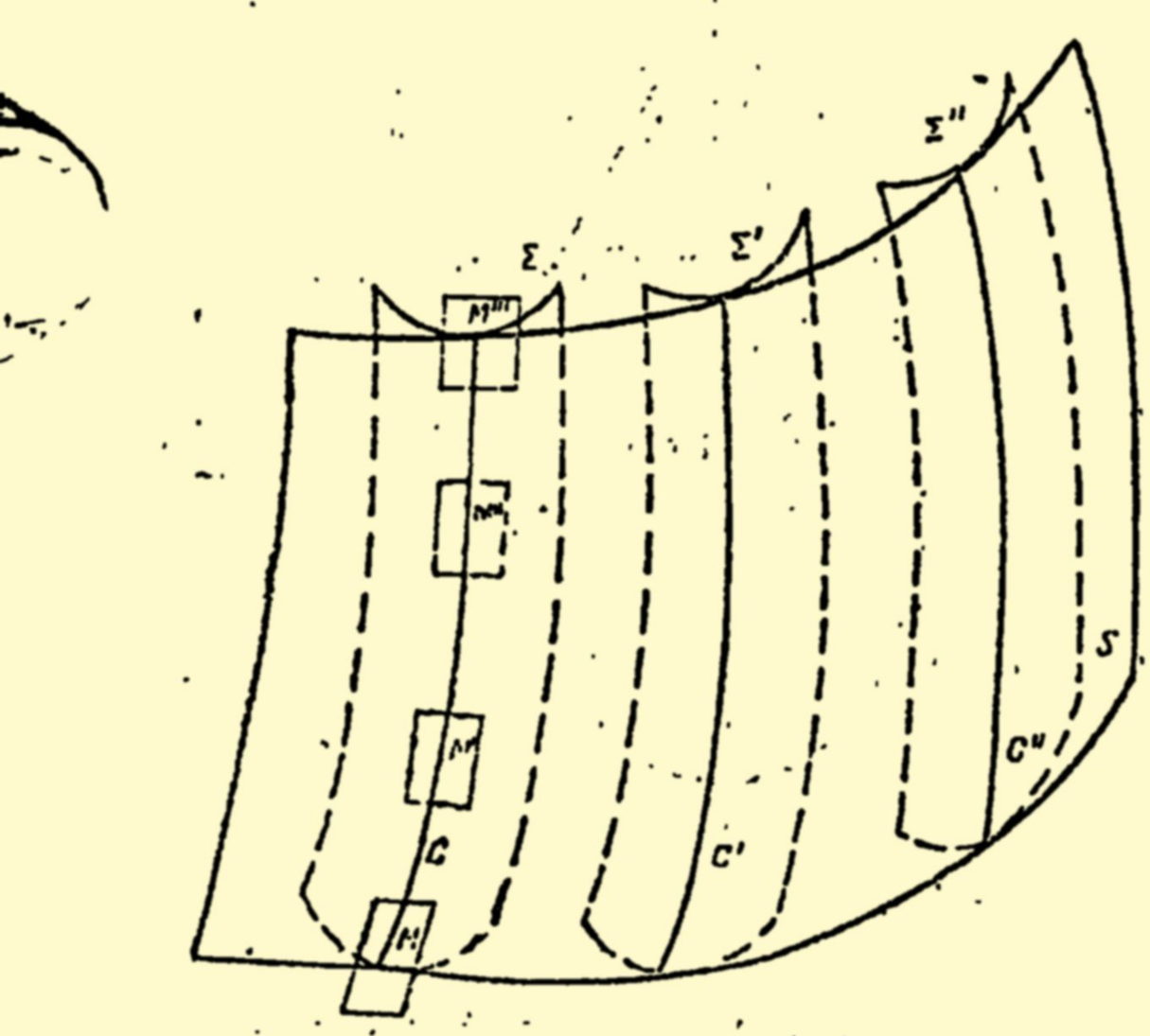



Fig. 187

Răspunsul la această problemă fiind afirmativ, o consecinţă importantă a sa este faptul că ea conduce la un nou mod de generare a suprafeţelor ca înfăşurătoare ale unei familii de suprafeţe date. In practică se aleg în acest scop suprafeţe simple ca plane, sfere, conuri, etc. Proprietăţile geometrice locale, legate de elementul de contact comun, vor fi aceleaşi pentru suprafeţele $\Sigma$ şi pentru înfăşurătoarea lor $S$.

**Exemplul 1.** *Înfăşurătoarea unei familii de sfere cu doi parametri.*

Sferele $\Sigma$ cu centrul $M$ la o distanţă fixă $\frac{r}{2}$ de un punct $O$ şi raza egală cu $\frac{r}{2}$ trec toate prin $O$ (fig. 188).

Locul punctului $M$ este o sferă de rază $\frac{r}{2}$ cu centrul în $O$. Ecuaţia familiei de sfere $\Sigma$ va fi

$$\left(\vec{R}-\frac{\vec{r}}{2}\right)^2=\frac{r^2}{4}; \qquad (\Sigma).$$

Vectorul $\frac{\vec{r}}{2}$ depinde de doi parametri, deoarece $M$ descrie o sferă, deci familia $\Sigma$ are doi parametri.

Toate sferele $\Sigma$ sunt tangente sferei $S$ cu centrul în $O$ și de rază $r$. Invers, în orice punct $P$ al sferei $S$ există o sferă $\Sigma$ tangentă. Deci, familia $\Sigma$ cu doi parametri admite o înfășurătoare, care este sfera $S$.

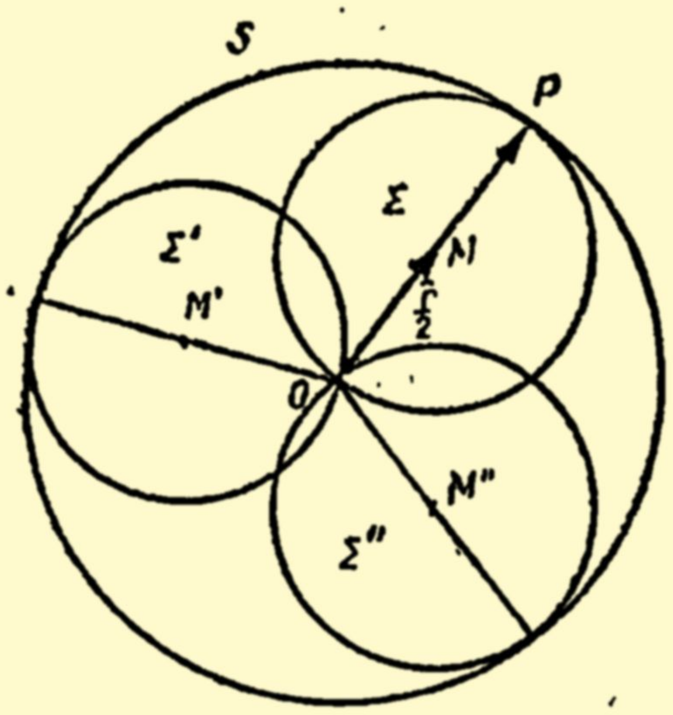



Fig. 188

Acest rezultat se verifică prin calcul astfel: ecuația sferei $S$ va fi

$$\bar{R}^2 = r^2;$$

Punctul $\bar{R} = \bar{r}$ este comun lui $S$ și lui $\Sigma$, fiindcă avem

$$\bar{r}^2 = r^2 \quad \text{și} \quad \left(\bar{r} - \frac{\bar{r}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\bar{r}}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Planul tangent la $\Sigma$ în $P$ are ecuația

$$\left(\bar{R} - \frac{\bar{r}}{2}\right)\left(\bar{r} - \frac{\bar{r}}{2}\right) \equiv \frac{\bar{r}}{2}\left(\bar{R} - \frac{\bar{r}}{2}\right) = \frac{r^2}{4}.$$

Planul tangent la $S$ în același punct, având ecuația

$$\bar{R}\bar{r} = r^2,$$

coincide cu planul tangent la $\Sigma$ în $P$, deci $S$ înfășoară familia $\Sigma$.

Exemplul ② *Înfășurătoarea unei familii de conuri cu un parametru.* Fiind dată în planul $zOx$ elipsa (fig. 189).

$$\bar{r} = \bar{i}a\cos\lambda + \bar{k}b\sin\lambda \quad \text{sau} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

tangenta într'un punct oarecare $M$, determinată de vectorul

$$\frac{d\bar{r}}{d\lambda} = -\bar{i}a\sin\lambda + kb\cos\lambda$$

și de punctul $M$, va avea ecuația

$$\bar{\rho} = \bar{r} + \mu\frac{d\bar{r}}{d\lambda} =$$

$$= \bar{i}a(\cos\lambda - \mu\sin\lambda) + \bar{k}b(\sin\lambda + \mu\cos\lambda).$$

Ea întâlnește axa $Oz$ într'un punct $P$, pentru care

$$\cos\lambda - \mu\sin\lambda = 0; \quad \mu = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda},$$

deci

$$\overline{OP} = \bar{k}\frac{b}{\sin\lambda}.$$

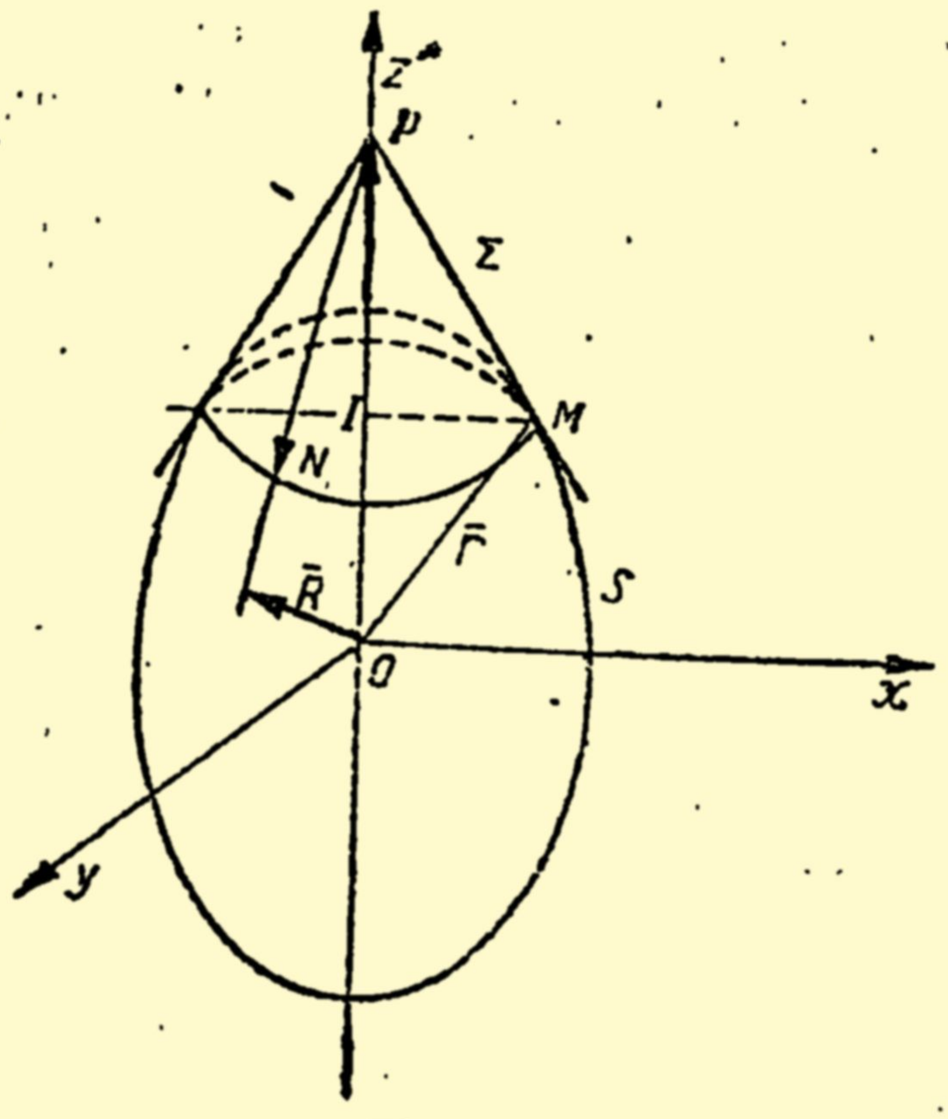



Fig. 189

Din rotația elipsei în jurul axei $Oz$ ia naștere un elipsoid de rotație $S$, iar din aceea a dreptei $PM$ un con de rotație $\Sigma$, tangent elipsoidului dealungul paralelei ce trece prin $M$. Când punctul $M$ descrie elipsa, conurile $\Sigma$ formează o familie cu un parametru $\lambda$, care admite ca înfășurătoare elipsoidul considerat. Racordarea se face dealungul paralelelor acestui elipsoid.

Ecuația elipsoidului se deduce din aceea a suprafețelor de rotație, punând

$$x = \varphi(\lambda) = a\cos\lambda; \quad z = \psi(\lambda) = b\sin\lambda$$

și este

$$\bar{r} = \bar{i}a\cos\lambda\cos v + \bar{j}a\cos\lambda\sin v + \bar{k}b\sin\lambda.$$

Scanned with OKEN Scanner

Paralela $I$ se obține pentru $\lambda=\text{const}$, iar vectorul tangent $\overline{PN}$ pentru un punct oarecare $N$ al acestei paralele va fi

$$\bar{i}a\cos\lambda\cos v+\bar{j}a\cos\lambda\sin v+\bar{k}b\left(\sin\lambda-\frac{1}{\sin\lambda}\right).$$

Un punct oarecare al curbei, situat pe generatoarea $\overline{PN}$, va avea vectorul de poziție

$$\bar{R}=\overline{OP}+u\overline{PN},$$

unde $u$ este un parametru. Ecuația vectorială a conului $\Sigma$ cu vârful în $P$ va fi deci

$$\bar{R}=\bar{i}au\cos v\cos\lambda+\bar{j}au\sin v\cos\lambda+\bar{k}b\,\frac{1-u\cos^2\lambda}{\sin\lambda}.$$

Familia $\Sigma$ se obține din variația parametrului $\lambda$, iar $u$ și $v$ sunt coordonatele curbilinii pe conul $\Sigma$.

Paralelele de contact se obțin pentru $u=1$ și $\lambda=\text{const}$. Este ușor de verificat că planul tangent într'un punct $N$, comun conului $\Sigma$ și elipsoidului $S$, este același pentru ambele suprafețe, determinând vectorii tangenți $\bar{R}_u, \bar{R}_v$ și $\bar{r}_\lambda, \bar{r}_v$.

Vom avea

$$\bar{R}_u=-\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\bar{r}_\lambda;\quad \bar{R}_v=\bar{r}_v \text{ pentru } u=1.$$

## § 196. Infășurătoarele familiilor de suprafețe cu un parametru

O familie de suprafețe $\sum(\lambda)$ cu un parametru poate fi dată și sub forma implicită printr'o ecuație

$$f(\bar{r},\lambda)=0.$$

Intersecția a două suprafețe vecine $\sum(\lambda)$ și $\sum(\lambda+\delta\lambda)$ este curba de ecuații

$$f(\bar{r},\lambda)=0;\quad f(\bar{r},\lambda+\delta\lambda)=0.$$

Ea verifică evident și ecuația

$$\frac{1}{\delta\lambda}[f(\bar{r},\lambda+\delta\lambda)-f(\bar{r},\lambda)]=0,$$

pentru $\delta\lambda$ arbitrar. Presupunând că $f(\bar{r},\lambda)$ este derivabilă continuu în raport cu $\lambda$, când $\delta\lambda\to 0$, vom avea relația

$$f_\lambda(\bar{r},\lambda)=0.$$

Deci punctele comune celor două suprafețe vecine vor verifica ecuațiile

$$f(\bar{r},\lambda)=0;\quad f_\lambda(\bar{r},\lambda)=0 \qquad (129,\text{VI})$$

când $\sum(\lambda+\delta\lambda)$ tinde spre $\sum(\lambda)$.

Dacă unul din determinanții funcționali

$$\frac{D(f,f_\lambda)}{D(x,y)};\quad \frac{D(f,f_\lambda)}{D(y,z)};\quad \frac{D(f,f_\lambda)}{D(z,x)} \qquad (130,\text{VI})$$

nu este nul în punctul $M(x,y,z)$, ecuațiile (129,VI) definesc o curbă $C(\lambda)$ în domeniul acestui punct. Această curbă, care este limita intersecției unei suprafețe $\sum(\lambda)$ cu o suprafață vecină $\sum(\lambda+\delta\lambda)$, se numește *curbă caracteristică*.

*Dacă familia de suprafețe* $\sum(\lambda)$ *admite o înfășurătoare* $S$, *aceasta este tangentă suprafețelor* $\sum(\lambda)$ *dealungul curbelor caracteristice* $C(\lambda)$.

In adevăr, fie $z=z(x,y)$, ecuația suprafeței $S$, presupusă tangentă suprafeței $\sum(\lambda)$ dealungul unei curbe $\Gamma(\lambda)$. Dacă într'un punct $M$ al lui $\Gamma(\lambda)$ am avea $f_\lambda(\bar{r},\lambda)\neq 0$, suprafața s'ar putea pune, rezolvând în raport cu $\lambda$, sub forma

$$\varphi(\bar{r})=\lambda.$$

Pentru ca $\sum(\lambda)$ și $S$ să fie tangente în $M$, trebue să avem

$$\frac{\varphi_x}{z_x}=\frac{\varphi_y}{z_y}=\frac{\varphi_z}{-1};\quad z_x=p;\quad z_y=q,$$

deci

$$\varphi_x+\varphi_z p=0;\quad \varphi_y+\varphi_z q=0.$$

Aceste relații vor avea loc și pentru valori vecine $\lambda+\delta\lambda$, deci în vecinătatea lui $M$ pe $S$.

Funcția

$$\varphi[x,y,z(x,y)]$$

va avea derivatele parțiale nule în $M$ și în vecinătatea acestui punct, deci se va reduce la o constantă:

$$\varphi[x,y,z(x,y)]=\lambda.$$

Aceasta înseamnă că orice punct al lui $S$ din vecinătatea lui $M$ se găsește pe $\sum(\lambda)$, deci suprafața $S$ ar coincide în vecinătatea lui $M$ cu $\sum(\lambda)$ și, în consecință, nu ar mai fi tangentă celorlalte suprafețe vecine. Prin urmare, condiția $f_\lambda(\bar{r},\lambda)=0$ este necesară și înfășurătoarea verifică obligatoriu sistemul (129,VI) adică este tangentă suprafețelor $\sum(\lambda)$, dealungul curbelor caracteristice.

*Înfășurătoarea familiei cu un parametru* $\sum(\lambda)$ *este generată de curbele caracteristice* $C(\lambda)$.

In ipoteza (130,VI), ecuațiile

$$f(\bar{r},\lambda)=0;\quad f_\lambda(\bar{r},\lambda)=0$$

vor putea fi rezolvate, de exemplu, în raport cu $x$ și $y$. Soluțiile vor defini o suprafață $S$, de ecuații

$$x=x(z,\lambda);\quad y=y(z,\lambda);\quad z=z, \tag{131,VI}$$

unde $z$ și $\lambda$ sunt parametri reprezentativi, sau sub formă vectorială

$$\bar{r}=\bar{i}x(z,\lambda)+\bar{j}y(z,\lambda)+\bar{k}z,$$

cu condiția ca

$$\bar{r}_z\times\bar{r}_\lambda=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & 1\\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & 0\end{vmatrix}\neq 0.$$

Desvoltând, vom avea

$$\bar{r}_z\times\bar{r}_\lambda=-\bar{i}\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\bar{j}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\bar{k}\frac{D(x,y)}{D(z,\lambda)},$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, introducând soluțiile (131,VI) în ecuațiile (129,VI) obținem identitățile:

$$f[x(z,\lambda),\ y(z,\lambda),\ z,\lambda]\equiv 0;\quad f_\lambda[x(z,\lambda),\ y(z,\lambda),\ z,\lambda]\equiv 0,$$

care, derivate în raport cu $z$ și $\lambda$, vor da:

$$\left.\begin{aligned} &f_x\frac{\partial x}{\partial z}+f_y\frac{\partial y}{\partial z}+f_z=0;\quad f_x\frac{\partial x}{\partial \lambda}+f_y\frac{\partial y}{\partial \lambda}=0;\\ &f_{\lambda x}\frac{\partial x}{\partial z}+f_{\lambda y}\frac{\partial y}{\partial z}+f_{\lambda z}=0;\quad f_{\lambda x}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+f_{\lambda y}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+f_{\lambda\lambda}=0, \end{aligned}\right\} \quad (132,VI)$$

fiindcă $f_\lambda=0$.

Dacă $f_{\lambda\lambda}\neq 0$, din ultima relație deducem că nu putem avea în același timp $\frac{\partial x}{\partial \lambda}=0$ și $\frac{\partial y}{\partial \lambda}=0$, deci vectorul $\bar{r}_z\times\bar{r}_\lambda\neq 0$, deoarece are cel puțin o componentă nenulă.

Prin urmare, *ecuațiile* (131,VI) *definesc o suprafață, pe care punctul M este ordinar, dacă* $f_{\lambda\lambda}\neq 0$.

Normala la $\Sigma(\lambda)$ fiind vectorul $f_x$, $f_y$, $f_z$, din primele două relații (132,VI) se deduce că acesta este perpendicular pe $\bar{r}_z$ și $\bar{r}_\lambda$, deci $S$ și $\Sigma(\lambda)$ sunt tangente în $M$.

Pe de altă parte, ecuațiile (131,VI) arată că $S$ este generată de curbele caracteristice $C(\lambda)$.

Pentru a avea ecuația carteziană a suprafeței $S$, va trebui să eliminăm pe $\lambda$ între ecuațiile

$$f(x,y,z,\lambda)=0\quad \text{și}\quad f_\lambda(x,y,z,\lambda)=0,$$

ceeace este posibil dacă $f_{\lambda\lambda}\neq 0$. Se arată atunci că *suprafața obținută poate conține, înafară de înfășurătoarea familiei și locul punctelor singulare ale suprafețelor familiei* $\Sigma(\lambda)$, *precum și suprafețele staționare ale familiei, definite prin condiția* $f_{\lambda_0}\equiv 0$, *în cazul când* $\lambda_0$ *există.*

Pentru a complecta aceste rezultate, vom observa că *pe suprafața S curbele caracteristice* $C(\lambda)$ *pot avea și ele o înfășurătoare*, care se obține adăugând condiția

$$f_{\lambda\lambda}=0.$$

Această curbă, formată din punctele excluse anterior, în care $f_{\lambda\lambda}=0$, se numește *muchie de înapoiere* a suprafeței.

Cazul suprafețelor parametrice conduce la rezultate analoage. Fie familia de suprafețe $\Sigma(\lambda)$, de ecuație vectorială

$$\bar{r}=\bar{r}(u,v,\lambda). \quad (133,VI)$$

Stabilind între $v$, $u$ și $\lambda$ o relație de forma

$$v=v(u,\lambda),$$

pentru $\lambda=\text{const}$, vom obține pe suprafața $\Sigma(\lambda)$ o curbă $C(\lambda)$, de ecuație

$$\bar{R}=\bar{r}[u,v(u,\lambda),\lambda]. \quad (134,VI)$$

Lăsând pe $\lambda$ să varieze, *curbele* $C(\lambda)$ *vor genera o suprafață* $S$. Pentru ca aceasta să fie înfășurătoarea familiei de suprafețe $\Sigma(\lambda)$, va trebui ca $S$ și $\Sigma(\lambda)$ să se racordeze dealungul lui $C(\lambda)$.

Scanned with OKEN Scanner

Problema determinării înfășurătoarei revine la aceea a găsirii funcției $v=v(u, \lambda)$, astfel încât suprafețele (133,VI) și (134,VI) să fie tangente dealungul curbei $\lambda=\text{const}$.

Planul tangent la $\Sigma(\lambda)$ este definit de vectorii $\bar{r}_u$ și $\bar{r}_v$, iar planul tangent la $S$ de vectorii

$$\bar{R}_u=\bar{r}_u+\bar{r}_v\frac{\partial v}{\partial u};\quad \bar{R}_\lambda=\bar{r}_v\frac{\partial v}{\partial \lambda}+\bar{r}_\lambda.$$

Acești patru vectori trebue să fie coplanari. deci

$$\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{R}_u=0 \quad \text{și} \quad \bar{r}_u\bar{r}_v\bar{R}_\lambda=0.$$

Prima condiție este îndeplinită dela sine, iar a doua revine la

$$\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_\lambda=0. \qquad (135,VI)$$

*Înfășurătoarea familiei $\Sigma(\lambda)$ va fi determinată de ecuațiile*

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v, \lambda);\quad \bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_\lambda=0. \qquad (136,VI)$$

Din condiția (135,VI) vom deduce relația $v=v(u, \lambda)$, care definește curbele caracteristice pe $\Sigma(\lambda)$. Aceste curbe vor fi date de ecuația (134,VI) pentru $\lambda=\text{const}$, aceeași ecuație reprezentând și înfășurătoarea $S$, pe care curbele caracteristice sunt coordonate.

Punctele singulare ale suprafețelor $\Sigma(\lambda)$ fiind date de condiția $\bar{r}_u\times\bar{r}_v=0$, se vede imediat că suprafața $S$ va conține și locul acestor puncte, deoarece vom avea

$$\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_\lambda=(\bar{r}_u\times\bar{r}_v)\bar{r}_\lambda=0 \quad \text{pentru} \quad \bar{r}_u\times\bar{r}_v=0.$$

Este interesant de observat că *ecuația* (133,VI) *poate reprezenta trei familii de suprafețe, după cum atribuim rolul de parametru uneia din variabilele* $\lambda$, $u$, $v$. Condiția, prin care se determină înfășurătoarea, este aceeași pentru oricare din aceste familii. Vom obține deci înfășurătoarele corespunzătoare fiecărei familii, eliminând convenabil parametrul respectiv între aceleași ecuații (136,VI).

**Aplicație.** *Înfășurătoare de sfere. Suprafețe-canal.* Ecuația generală a sferelor de centru și rază date fiind

$$f(\bar{R}, \lambda)\equiv(\bar{R}-\bar{r})^2-a^2=0,$$

vom presupune că $\bar{r}=\bar{r}(\lambda)$ și $a=a(\lambda)$, deci centrul $M$ al sferei $\Sigma(\lambda)$ descrie o curbă $\Gamma$, iar raza $a$ este variabilă (fig. 190). Printr'o schimbare convenabilă, putem alege ca parametru $\lambda$ chiar arcul curbei $\Gamma$.

Înfășurătoarea $S$ verifică sistemul

$$f(\bar{R}, \lambda)\equiv(\bar{R}-\bar{r})^2-a^2=0;$$

$$\frac{1}{2}f_\lambda(\bar{R}, \lambda)\equiv(\bar{R}-\bar{r})\bar{r}'+aa'=0;\quad \bar{r}'=\frac{d\bar{r}}{d\lambda},\ a'=\frac{da}{d\lambda}.$$

Curbele caracteristice $C(\lambda)$ sunt cercuri reale sau imaginare, intersecții ale sferei $\Sigma(\lambda)$ cu planul

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{r}'+aa'=(\bar{R}-\bar{r})\bar{r}'+aa'\bar{r}'^2=(\bar{R}-\bar{r}+aa'\bar{r}')\bar{r}'=0.$$

Folosind notația obișnuită din teoria curbelor, acest plan trece prin punctul $I$, având ca vector de poziție $\bar{r}-aa'\bar{t}$, deci situat pe tangenta la $\Gamma$ în $M$ și este paralel cu planul

Scanned with OKEN Scanner

normal la $\Gamma$. Punctul $I$ va fi centrul cercului caracteristic $C(\lambda)$. Pentru ca înfășurătoarea să fie reală, trebue ca $MI \leq a$, deci

$$|aa'| \leq a; \quad |a'| \leq 1.$$

In cazul când $S$ este reală, cercurile $C(\lambda)$ constitue o familie cu un parametru pe această suprafață și pot admite o înfășurătoare. Aceasta se obține derivând din nou în raport cu $\lambda$. Vom avea

$$\frac{1}{2} f_{\lambda\lambda}(\bar{R}, \lambda) = (\bar{R}-\bar{r})\bar{r}'' - \bar{r}'^2 + a'^2 + aa'' =$$

$$= (\bar{R}-\bar{r})\frac{\bar{n}}{\rho} - 1 + a'^2 + aa'' = 0,$$

deci un nou plan paralel cu planul rectificant al curbei $\Gamma$. Dacă acest plan intersectează sfera după un cerc real, vor exista două puncte caracteristice $P$ și $Q$, deci curbele caracteristice $C(\lambda)$ vor avea o înfășurătoare care este muchia de înapoiere a suprafeței $S$. Punctele $P$ și $Q$ sunt date de sistemul

$$(\bar{R}-\bar{r})^2 - a^2 = 0;$$

$$(R-\bar{r}+aa'\bar{t})\bar{t} = 0; \quad (137,VI)$$

$$[\bar{R}-\bar{r}-\rho(1-a'^2-aa'')\bar{n}]\bar{n} = 0.$$

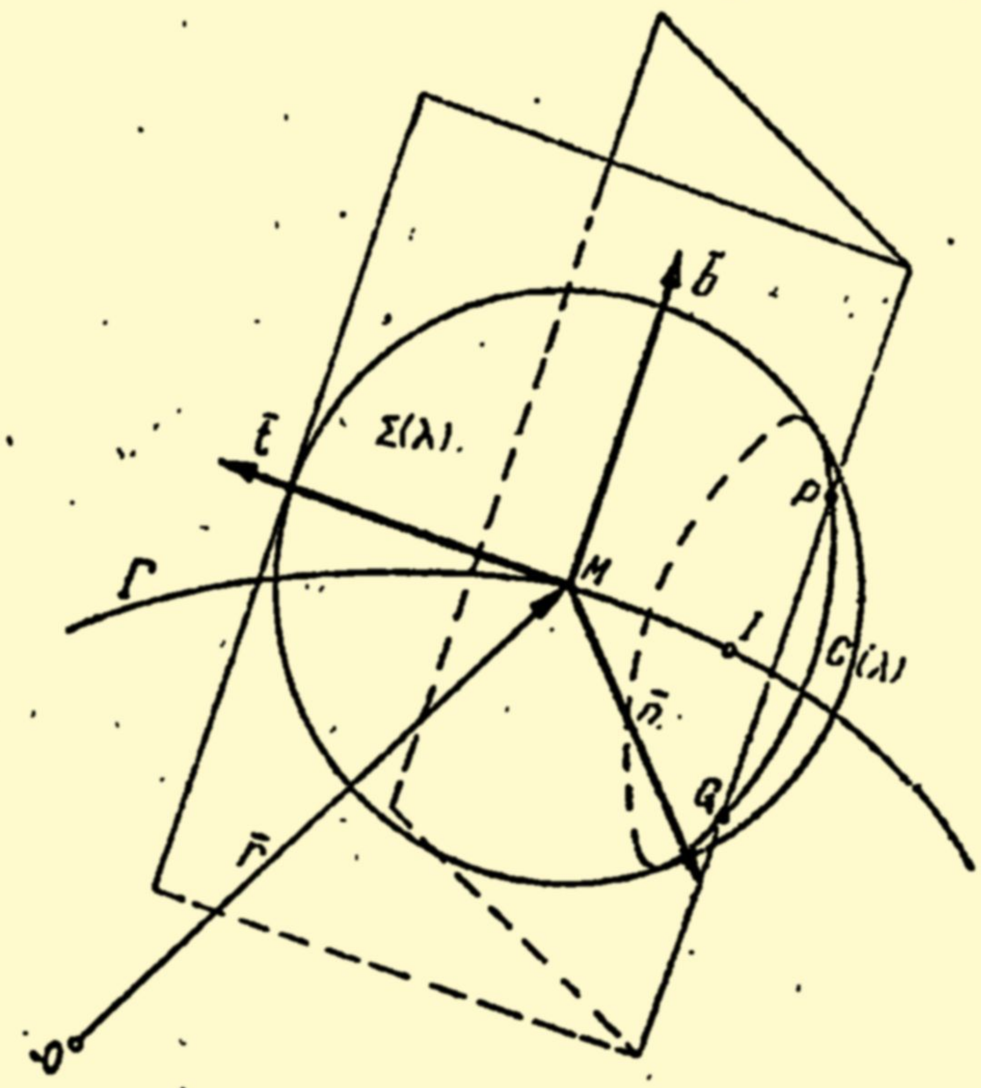



Fig. 190

Cele două plane se intersectează după dreapta

$$\bar{R} = \bar{r} - aa'\bar{t} + \rho(1-a'^2-aa'')\bar{n} + \mu\bar{b} \quad (138,VI)$$

paralelă cu polara curbei $\Gamma$ în punctul $M$. Dacă această dreaptă intersectează sfera, muchia de înapoiere va fi reală.

In cazul sferelor de rază $a = \text{const}$, $a' = a'' = 0$, și sistemul (137,VI) devine

$$(\bar{R}-\bar{r})^2 - a^2 = 0; \quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{t} = 0; \quad [\bar{R}-\bar{r}-\rho\bar{n}]\bar{n} = 0.$$

Cercul caracteristic $C(\lambda)$ este real, fiind intersecția sferei cu planul normal la $\Gamma$ în punctul $M$, deci un cerc diametral. Înfășurătoarea $S$, generată de o familie de cercuri de rază $a = \text{const}$, se numește *suprafață-canal*.

Muchia de înapoiere se obține prin intersecția sferei $\Sigma(\lambda)$ cu dreapta (138,VI)

$$\bar{R} = \bar{r} + \rho\bar{n} + \mu\bar{b},$$

deci cu polara curbei $\Gamma$ și poate fi reală sau imaginară, după cum $\rho \leq a$ sau $\rho > a$.

Torul este un exemplu de suprafață-canal, curba $\Gamma$ fiind un cerc. Curbele caracteristice sunt meridianele. Muchia de înapoiere este imaginară, dacă meridianele nu întâlnesc axa de rotație, care este axa polară a lui $\Gamma$. Dacă raza lui $\Gamma$ este mai mică decât $a$, muchia de înapoiere se va reduce la cele două puncte fixe $P$ și $Q$, prin care trec toate meridianele.

## § 197. Suprafețe desfășurabile

Suprafețele riglate, al căror plan tangent nu variază dealungul generatoarelor, au fost numite *desfășurabile*. Ele au proprietatea de a fi înfășurate de o familie de plane cu un singur parametru.

Această proprietate este caracteristică pentru suprafețele desfășurabile, deoarece vom stabili rezultatul următor:

Scanned with OKEN Scanner

*Infășurătoarea unei familii de plane cu un parametru este o suprafață desfășurabilă.*

Să căutăm înfășurătoarea familiei de plane $\sum(t)$ având ca ecuație

$$(\bar{R}-\bar{r})\,\bar{a}=0,$$

unde putem presupune că $\bar{a}$ este un versor, deci

$$\bar{r}=\bar{r}(t);\quad \bar{a}=\bar{a}(t);\quad |\bar{a}|=1;\quad \bar{a}\,\dot{\bar{a}}=0.$$

Caracteristicele vor fi dreptele de intersecție ale planelor

$$(\bar{R}-\bar{r})\,\bar{a}=0;\quad (\bar{R}-\bar{r})\,\dot{\bar{a}}-\dot{\bar{r}}\,\bar{a}=0. \qquad (139,VI)$$

Deoarece

$$\dot{\bar{r}}\,\bar{a}=(\dot{r}\,a)\frac{\dot{\bar{a}}\,\dot{\bar{a}}}{\dot{\bar{a}}^2};\quad \bar{a}\,\dot{\bar{a}}=0;\quad \dot{\bar{a}}\neq 0,$$

vom putea scrie aceste două plane sub forma

$$(\bar{R}-\bar{r})\,\dot{\bar{a}}-\dot{\bar{r}}\,\bar{a}\equiv\left[\bar{R}-\bar{r}-\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\dot{\bar{a}}\right]\dot{\bar{a}}=0. \qquad (140,VI)$$

$$(\bar{R}-\bar{r})\,\bar{a}\equiv\left[\bar{R}-\bar{r}-\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\dot{\bar{a}}\right]\bar{a}=0.$$

Vectorii $\bar{a}$ și $\dot{\bar{a}}$ fiind liniar independenți, deoarece $\bar{a}\,\dot{\bar{a}}=0$, vom putea deduce:

$$\bar{R}-\bar{r}-\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}=\mu(\bar{a}\times\dot{\bar{a}}),$$

unde $\mu$ este un parametru. Dreapta caracteristică va avea ecuația

$$\bar{R}=\bar{r}+\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\dot{\bar{a}}+\mu(\bar{a}\times\dot{\bar{a}}) \qquad (141,VI)$$

și va fi evident cuprinsă în planul $\sum(t)$

*Infășurătoarea familiei $\sum(t)$ va fi o suprafață riglată, generată de caracteristicele $C(t)$ și va avea ecuația vectorială* (141,VI), *unde parametrii sunt* $t$ și $\mu$.

Planul tangent va fi determinat de vectorii

$$\bar{R}_t=\dot{\bar{r}}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\dot{\bar{a}}\right)+\mu(\bar{a}\times\ddot{\bar{a}});$$
$$\bar{R}_\mu=\bar{a}\times\dot{\bar{a}}. \qquad (142,VI)$$

Acești vectori sunt amândoi perpendiculari pe $\bar{a}$. In adevăr, $\bar{R}_\mu$ este evident perpendicular pe $\bar{a}$ și determină direcția caracteristicei. In ceeace privește $R_t$, care este tangent la curba $\mu=\text{const}$, vom avea:

$$\bar{R}_t\bar{a}=\dot{\bar{r}}\,\bar{a}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\right)\dot{\bar{a}}\,\bar{a}+\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\ddot{\bar{a}}\,\bar{a}+\mu\,\bar{a}\,\ddot{\bar{a}}\,\bar{a}=\dot{\bar{r}}\,\bar{a}+\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\ddot{\bar{a}}\,\bar{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Insă din relația $\bar{a}\dot{\bar{a}}=0$, deducem prin derivare

$$\bar{a}\ddot{\bar{a}}+\dot{\bar{a}}^2=0;\quad \bar{a}\ddot{\bar{a}}=-\dot{\bar{a}}^2,$$

de unde

$$\bar{R}_t\bar{a}=\dot{\bar{r}}\,\bar{a}\Big|+\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,(-\dot{\bar{a}}^2)=0.$$

Planul tangent, fiind perpendicular pe $\bar{a}$ şi conţinând caracteristica $C(t)$, va coincide cu $\sum(t)$, oricare ar fi punctul $M$. Deci: *înfăşurătoarea unei familii de plane cu un parametru este o suprafaţă desfăşurabilă.*

Această proprietate se poate deduce şi direct din ecuaţiile (139,VI), considerând suprafaţa generată de caracteristicele $C(t)$, de ecuaţie (141,VI). Inlocuind în prima ecuaţie (139,VI) pe $\bar{R}$ prin expresia sa şi derivând identitatea obţinută în raport cu $t$, vom avea:

$$(\dot{\bar{R}}-\dot{\bar{r}})\,\bar{a}+(\bar{R}-\bar{r})\,\dot{\bar{a}}=0.\quad \dot{\bar{R}}=\bar{R}_t$$

Ţinând seamă de a doua ecuaţie (139,VI) aceasta devine

$$(\dot{\bar{R}}-\dot{\bar{r}})\,\bar{a}+\dot{\bar{r}}\,\bar{a}=\dot{\bar{R}}\bar{a}=0.$$

deci $\dot{\bar{R}}$ este perpendicular pe $\bar{a}$. Cum $\bar{R}_\mu$ este deasemenea perpendicular pe $\bar{a}$, planul tangent la suprafaţa considerată va coincide cu $\sum(t)$.

In tot ce precedă, am presupus că planul tangent la înfăşurătoare este determinat, deci că $\bar{R}_\mu\times\bar{R}_t\neq 0$. Este uşor de văzut că

$$\bar{R}_\mu\times\bar{R}_t=(\bar{a}\times\dot{\bar{a}})\times\left[\dot{\bar{r}}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\dot{\bar{a}}\right)\right]+\mu\,(\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}})\,\bar{a}.$$

Deci, dacă

$$\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}}\neq 0,$$

termenul în $\mu$ există şi $\bar{R}_\mu\times\bar{R}_t\neq 0$. Cu această condiţie suficientă, înfăşurătoarea va fi o suprafaţă nedegenerată. Dacă $\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}}=0$, vectorii $\bar{a}$, $\dot{\bar{a}}$, $\ddot{\bar{a}}$ sunt paraleli cu un plan fix (§ 151), deci $\bar{a}\times\dot{\bar{a}}$ este un vector de direcţie fixă. Cum $\bar{a}\times\dot{\bar{a}}$ dă direcţia caracteristicei, ce vede că, în acest caz, *înfăşurătoarea va avea generatoarele de direcţie fixă şi se va reduce la un cilindru sau la o dreaptă.*

Pe suprafaţa înfăşurătoare, *caracteristicele admit la rândul lor o înfăşurătoare, care este muchia de înapoiere.* Pentru a obţine punctul caracteristic, vom deriva din nou în raport cu $t$ a doua ecuaţie (139,VI) şi vom avea ca nouă condiţie relaţia:

$$(\bar{R}-\bar{r})\,\ddot{\bar{a}}-2\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{a}}-\ddot{\bar{r}}\,\bar{a}=0, \qquad (143,VI)$$

care reprezintă deasemenea un plan, a cărui intersecţie cu dreapta caracteristică va determina punctul caracteristic $P$. Inlocuind deci în (143,VI) expresia lui $\bar{R}-\bar{r}$ din (141,VI), vom determina parametrul $\mu$ din ecuaţia

$$\frac{\dot{\bar{r}}\,\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\,\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}}+\mu\,(\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}})-2\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{a}}-\ddot{\bar{r}}\,\bar{a}=0. \qquad (144,VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}} \neq 0$, vom obține un punct $P$ determinat, care va descrie muchia de înapoiere pe $S$. Dacă însă $\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}} = 0$, punctul $P$ va fi la infinit sau nedeterminat pe caracteristică. Primul caz corespunde generatoarelor paralele cu o direcție fixă, deci cilindrilor, iar al doilea — generatoarelor confundate, deci înfășurătoarelor reduse la o dreaptă, provenind din fascicole de plane, care trec printr'o dreaptă fixă.

*Caracteristicele sunt tangente la muchia de înapoiere.*

In adevăr, dacă derivăm ecuațiile (139,VI) în raport cu $t$, ținând seamă că $\bar{R} = \bar{R}(t)$ este punctul caracteristic, vom obține

$$(\dot{\bar{R}} - \dot{\bar{r}})\bar{a} + (\bar{R} - \bar{r})\dot{\bar{a}} = 0;$$

$$(\ddot{\bar{R}} - \ddot{\bar{r}})\dot{\bar{a}} + (\dot{\bar{R}} - \dot{\bar{r}})\ddot{\bar{a}} - \ddot{\bar{r}}\bar{a} - \dot{\bar{r}}\dot{\bar{a}} = 0.$$

Inlocuind în aceste relații pe $(\dot{\bar{R}} - \dot{\bar{r}})\dot{\bar{a}}$ și $(\dot{\bar{R}} - \dot{\bar{r}})\ddot{\bar{a}}$ prin valorile lor, scoase din (139,VI) și (143,VI), vom obține relațiile

$$\dot{\bar{R}}\bar{a} = 0 \quad \text{și} \quad \dot{\bar{R}}\dot{\bar{a}} = 0, \qquad (145,VI)$$

deci

$$\dot{\bar{R}} = \lambda(\bar{a} \times \dot{a}).$$

Prin urmare, tangenta la muchia de înapoiere este chiar caracteristica $C(t)$.

Din această proprietate rezultă că *suprafețele desfășurabile sunt generate de tangentele la o curbă, care este muchia de înapoiere a acestor suprafețe.*

Invers, se poate arăta că *suprafața generată de tangentele la o curbă din spațiu este o desfășurabilă,* adică o suprafață riglată, pe care planul tangent nu variază dealungul unei generatoare, iar curba considerată este muchie de înapoiere.

Pentru a complecta aceste rezultate, vom preciza relația dintre planul tangent la suprafața desfășurabilă și muchia de înapoiere:

*Planele tangente la o desfășurabilă sunt plane osculatoare ale muchiei de înapoiere.*

In adevăr, planul osculator la muchia de înapoiere este determinat de vectorii $\dot{\bar{R}}$ și $\ddot{\bar{R}}$, vectorul $\bar{R}$ verificând ecuațiile (139,VI) și (143,VI). Cum $\bar{R}$ verifică ecuațiile (145,VI), prin derivarea primei, vom avea

$$\ddot{\bar{R}}\bar{a} + \dot{\bar{R}}\dot{\bar{a}} = \ddot{\bar{R}}\bar{a} = 0,$$

deci $\dot{\bar{R}}$ și $\ddot{\bar{R}}$ sunt perpendiculari pe $\bar{a}$ și prin urmare, planul osculator coincide cu planul $\sum(t)$, care înfășoară suprafața desfășurabilă.

Din proprietățile expuse rezultă că o suprafață desfășurabilă poate fi concepută:

1) *ca suprafață riglată, pe care planul tangent nu variază dealungul generatoarelor;*

2) *ca suprafață riglată, generată de tangentele la o curbă strâmbă;*

3) *ca înfășurătoare a unei familii de plane cu un parametru;*

4) *ca înfășurătoare a planelor osculatoare la o curbă strâmbă.*

Scanned with OKEN Scanner

Intre suprafeţele desfăşurabile figurează şi cazurile de excepţie, ca de exemplu cilindrii, conurile, planele şi chiar suprafaţa formată de dreapta comună planelor unui fascicol, complectată cu planele fascicolului.

In general, considerând suprafeţele ca generate de elementele lor de contact, vom putea îngloba şi cazurile de degenerescenţă.

**Exemplu.** *Infăşurătoarea familiei de plane* $(\bar{R}-\bar{r})\,\bar{a}=0$, unde

$$\bar{r}=\bar{i}\cos t+\bar{j}\sin t+\bar{k}t;$$

$$\bar{a}=\frac{\bar{i}\cos t+\bar{j}\sin t+\bar{k}}{\sqrt{2}}.$$

Punctul $\bar{r}$ descrie o elice cilindrică, iar planul face un unghi $\frac{\pi}{4}$ cu axa $Oz$. Derivând ecuaţia familiei de plane în raport cu $t$ se obţine dreapta caracteristică (141,VI)

$$\bar{R}=\bar{r}+\frac{\dot{\bar{r}}\bar{a}}{\dot{\bar{a}}^2}\dot{\bar{a}}+\mu\,(\bar{a}\times\dot{\bar{a}}).$$

Insă

$$\dot{\bar{r}}=-\bar{i}\sin t+\bar{j}\cos t+\bar{k};$$

$$\dot{\bar{a}}=\frac{-\bar{i}\sin t+\bar{j}\cos t}{\sqrt{2}};$$

$$\ddot{\bar{r}}=-\bar{i}\cos t-\bar{j}\sin t;$$

$$\ddot{\bar{a}}=\frac{-\bar{i}\cos t-\bar{j}\sin t}{\sqrt{2}};$$

$$\bar{a}\times\dot{\bar{a}}=\frac{1}{2}\,[-\bar{i}\cos t-\bar{j}\sin t+\bar{k}];$$

$$\bar{a}\dot{\bar{a}}\ddot{\bar{a}}=\frac{1}{2\sqrt{2}};\quad \dot{\bar{r}}\bar{a}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \ddot{\bar{r}}\bar{a}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \dot{\bar{r}}\dot{\bar{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \dot{\bar{a}}^2=\frac{1}{2}.$$

Ecuaţia înfăşurătoarei se va scrie

$$\bar{R}=\bar{i}\,[(1-\mu)\cos t-\sin t]+\bar{j}\,[(1-\mu)\sin t+\cos t]+\bar{k}\,(t+\mu).$$

Pentru a determina înfăşurătoarea familiei de caracteristice, se derivează din nou ecuaţia planelor. Punctul, care descrie muchia de înapoiere, va avea parametrul $\mu$ dat de ecuaţia (144,VI), din care obţinem $\mu=2$.

Ecuaţia muchiei de înapoiere va fi

$$\bar{R}=-\bar{i}\,[\sin t+\cos t]-\bar{j}\,[\sin t-\cos t]+\bar{k}\,(t+2).$$

## § 198. Desfăşurabile asociate curbelor din spaţiu

Din deplasarea triedrului principal dealungul unei curbe $C$ iau naştere trei suprafeţe desfăşurabile: înfăşurătoarele planelor acestui triedru.

1. *Infăşurătoarea planului osculator este o desfăşurabilă generată de tangentele la curba $C$, care este muchie de înapoiere pe suprafaţă.*

In adevăr, fie

$$(R-r)\,\bar{b}=0$$

ecuația planului osculator, parametrul fiind $s$. Caracteristica sa va fi dreapta

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{b}=0;\quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{b}'-\bar{r}'\bar{b}\equiv -\frac{1}{\tau}(\bar{R}-\bar{r})\bar{n}=0, \qquad (146,VI)$$

în virtutea formulelor lui Frenet. Se vede imediat că această dreaptă trece prin $M$ şi are direcţia $\bar{n}\times\bar{b}=\bar{t}$, deci este chiar tangenta la curbă. Trebue să presupunem, însă, $\frac{1}{\tau}\not\equiv 0$ pentru ca a dotta ecuaţie să aibă sens. Dacă $\frac{1}{\tau}\equiv 0$, curba este plană şi deci $\bar{b}=$ const, iar planul osculator este acelaşi în toate punctele.

Muchia de înapoiere a înfăşurătoarei se obţine derivând din nou în raport cu $t$ a doua ecuaţie (146,VI):

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{n}'-\bar{r}'\bar{n}\equiv(\bar{R}-\bar{r})\left(-\frac{1}{\rho}\bar{t}+\frac{1}{\tau}\bar{b}\right)\equiv -\frac{1}{\rho}(\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0.$$

Impunând condiţia $\frac{1}{\rho}\not\equiv 0$, punctul caracteristic va fi dat de ecuaţiile

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{b}=0;\quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{n}=0;\quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0,$$

deci $\bar{R}=\bar{r}$, ceeace arată că este chiar $M$. Prin urmare, *muchia de înapoiere este chiar curba C.*

2. *Infăşurătoarea planelor normale este o desfăşurabilă numită suprafaţa polară, generată de polarele curbei C.*

Pentru a determina înfăşurătoarea planului normal, vom folosi sistemul

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0;\quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{t}'-\bar{r}'\bar{t}=0,$$

deci

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{t}=0;\quad (\bar{R}-\bar{r})\bar{n}-\rho=0. \qquad (147,VI)$$

Din prima ecuaţie rezultă că $\bar{R}-\bar{r}$ nu are componentă pe $\bar{t}$, deci vom putea pune

$$\bar{R}-\bar{r}=\alpha\bar{n}+\beta\bar{b}.$$

Introducând în a doua ecuaţie, obţinem $\alpha=\rho$ şi deci caracteristica va fi

$$\bar{R}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\beta\bar{b}. \qquad (148,VI)$$

Ea coincide cu polara curbei $C$ în punctul $M$ (§ 183).

Când $\beta$ variază, obţinem *suprafaţa polară*, a cărei ecuaţie este (148,VI) cu parametrii $s$ şi $\beta$.

Acest rezultat se putea deduce imediat din formula generală (141,VI), aplicabilă tuturor desfăşurabilelor, punând

$$\dot{\bar{r}}=\bar{t};\quad \bar{a}=\bar{t};\quad \dot{\bar{a}}=\frac{1}{\rho}\bar{n};\quad \frac{\dot{}}{a}^2=\frac{1}{\rho}.$$

*Muchia de înapoiere a suprafeţei polare este curba $\Gamma$, locul centrelor sferelor osculatoare la curba C, adică polara curbei C.*

In adevăr, muchia de înapoiere a suprafeţei polare se obţine adăugând sistemului (147,VI) ecuaţia

$$(\bar{R}-\bar{r})\bar{n}'-\bar{r}'\bar{n}-\rho'=0.$$

Ţinând seama de formulele lui Frenet şi de (148,VI) deducem

$$\beta = \rho' \tau,$$

astfel încât punctul caracteristic va fi dat de formula

$$\bar{R} = \bar{r} + \rho\bar{n} + \rho'\tau\,\bar{b} \qquad (149,VI)$$

Conform cu formula (70,VI), el va coincide cu centrul sferei osculatoare, şi va descrie curba $\Gamma$, care va fi muchie de înapoiere pe suprafaţa polară. Planul tangent la această suprafaţă va fi osculator la $\Gamma$, ale cărui tangente sunt polarele curbei $C$.

Acest rezultat se putea deduce deasemenea din formula generală (144,VI) care dă parametrul $\mu$ al punctului caracteristic, punând

$$\ddot{\bar{u}} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho} n\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\bar{n} + \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{n}}{ds}; \quad \ddot{\bar{r}} = \frac{1}{\rho}\bar{n},$$

de unde

$$\bar{a}\,\dot{\bar{a}}\,\ddot{\bar{u}} = \frac{1}{\rho^2\tau}; \quad \dot{\bar{a}}\,\ddot{\bar{a}} = -\frac{\rho'}{\rho^3}; \quad \mu = \rho\rho'\tau.$$

Dacă centrul sferei osculatoare este fix, muchia de înapoiere se va reduce la un singur punct $J$, prin care vor trece toate planele normale la curba $C$. Raza sferei osculatoare fiind constantă, curba $C$ va fi o curbă sferică, trasată pe această sferă.

Putem determina *condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie sferică*, impunând muchiei de înapoiere restricţia de a se reduce la un punct. Dacă $\bar{R} = \text{const}$ în formula (149,VI), prin derivare în raport cu $s$ vom avea

$$\bar{r}' + \rho'\bar{n} + \rho\bar{n}' + \frac{d}{ds}(\rho'\tau)\,\bar{b} + \rho'\tau\bar{b}' = 0.$$

Folosind formulele lui Frenet, obţinem relaţia

$$\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}(\rho'\tau) = 0,$$

care este condiţia căutată.

Din ea deducem, înmulţind cu $\rho'\tau$

$$\rho\rho' + \rho'\tau\,\frac{d}{ds}(\rho'\tau) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}(\rho^2 + \rho'^2\tau^2) = 0; \quad (\rho' \neq 0),$$

iar prin integrare

$$\rho^2 + \rho'^2\tau^2 = \text{const},$$

expresie care reprezintă raza sferei osculatoare. Deci: *condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie sferică este ca sfera sa osculatoare să aibă raza constantă.*

3. *Înfăşurătoarea planului rectificant este o suprafaţă desfăşurabilă, numită suprafaţă rectificantă.*

Ecuaţia planului rectificant fiind

$$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{n} = 0,$$



Scanned with OKEN Scanner

prin derivare obținem sistemul

$$(\bar{R}-\bar{r})\,\bar{n}=0\,;\quad (\bar{R}-\bar{r})\left(-\frac{\bar{t}}{\rho}+\frac{\bar{b}}{\tau}\right)=0. \qquad (150,VI)$$

Caracteristica este dreapta

$$\bar{R}=\bar{r}+\alpha\bar{n}\times\left(-\frac{\bar{t}}{\rho}+\frac{\bar{b}}{\tau}\right)=\bar{r}+\alpha\left(\frac{\bar{t}}{\tau}+\frac{\bar{b}}{\rho}\right)=\bar{r}+\beta\,(\rho\bar{t}+\tau\bar{b}), \qquad (151,VI)$$

paralelă la *vectorul lui Darboux*, (42,VI) iar suprafața *rectificantă* are ecuația (151,VI) unde $s$ și $\beta$ sunt parametrii pe suprafață, iar $\beta=\alpha\rho\tau$.

Pentru a obține muchia de înapoiere, derivăm din nou ecuația

$$(\bar{R}-\bar{r})\,(-\tau\bar{t}+\rho\bar{b})=0,$$

dedusă din a doua ecuație (150,VI) și vom avea

$$(\bar{R}-\bar{r})\left(-\tau'\bar{t}-\frac{\tau}{\rho}\,\bar{n}+\rho'\bar{b}-\frac{\rho}{\tau}\,\bar{n}\right)-\bar{t}\,(-\tau\bar{t}+\rho\bar{b})=0.$$

Ținând seama de expresia lui $\bar{R}-\bar{r}$, dedusă din (151,VI), obținem pentru $\beta$ valoarea

$$\beta=\frac{\tau}{\rho\tau'-\tau\rho'}\,. \qquad (152,VI)$$

Pentru $\beta=0$ obținem chiar curba $C$, deci *orice curbă se găsește pe suprafața sa rectificantă.*

In același timp, planul osculator, fiind perpendicular pe planul rectificant, care este tangent la suprafața rectificantă, va fi un plan normal. Curbele, care au planul osculator normal la suprafață, se numesc *geodezice. Deci, curba C va fi o geodezică a suprafeței rectificante.* Muchia de înapoiere a suprafeței rectificante va avea ecuația:

$$\bar{R}=\bar{r}+\frac{\tau}{\rho\tau'-\tau\rho'}\,(\rho\bar{t}+\tau\bar{b}). \qquad (153,VI)$$

Dacă punctul caracteristic este la infinit pe dreapta rectificantă, suprafața rectificantă este un cilindru. Condiția necesară și suficientă se obține din (152,VI), făcând $\beta=\infty$, deci,

$$\rho\tau'-\tau\rho'=0\,;\quad \frac{\rho'}{\rho}=\frac{\tau'}{\tau}\,.$$

Prin integrare, deducem: $\frac{\rho}{\tau}=$ const. Prin urmare:

*Condiția necesară și suficientă ca suprafața rectificantă să se reducă la un cilindru, este ca raportul curburii la torsiune să fie constant.*

Din ecuația (151,VI) rezultă că unghiul dreptei rectificante cu tangenta este dat de formula

$$\cos\theta=\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\tau^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\rho}\right)^2}}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\frac{\tau}{\rho} = \text{const.}$, acest unghi este constant. Cum însă dreapta rectificantă are o direcție fixă în acest caz, tangenta la curbă face un unghi constant cu o direcție fixă, deci curba este o elice și avem următorul rezultat:

*Curbele, a căror suprafață rectificantă este un cilindru, sunt elice.*

**Exemplu.** *Desfășurabilele asociate elicei cilindrice.* Ecuația vectorială a elicei fiind

$$\bar{r} = \bar{i}\, a\cos\theta + \bar{j}\, a\sin\theta + \bar{k}\, h\theta,$$

triedrul mobil va fi dat de vectorii

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(-\bar{i}\, a\sin\theta + \bar{j}\, a\cos\theta + \bar{k}\, b);$$

$$\bar{n} = -\bar{i}\cos\theta - \bar{j}\sin\theta;$$

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(\bar{i}\, b\sin\theta - \bar{j}\, b\cos\theta + \bar{k}\, a;$$

Curbura și torsiunea având valorile

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a}{a^2+h^2}; \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{b}{a^2+h^2},$$

vectorul lui Darboux va fi

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\tau}\bar{t} + \frac{1}{\rho}\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\bar{k},$$

deci paralel cu *Oz*.

Suprafața înfășurată de planele osculatoare, deci generată de tangente, va avea ecuația

$$\bar{R} = \bar{i}\, a(\cos\theta - \lambda\sin\theta) + \bar{j}\, a(\sin\theta + \lambda\cos\theta) + \bar{k}\, h(t+\lambda).$$

Normala la această suprafață, fiind binormala $\bar{b}$ a elicei, va face un unghi constan cu *Oz*, dat de

$$\cos\varphi = \bar{b}\bar{k} = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Deci înfășurătoarea planelor osculatoare este o *suprafață de pantă*, adică o suprafață al cărei plan tangent face un unghi constant cu o direcție fixă.

Suprafața polară se deduce din ecuația (148,VI). Planul său tangent, fiind planul normal la curbă, va face cu *Oz* un unghi constant, determinat prin relația

$$\cos\psi = \bar{t}\bar{k} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}; \qquad \left(\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Deci, *suprafața polară este deasemenea o suprafață de pantă.* Muchia de înapoiere a suprafeței polare, deci curba polară a elicei, are ecuația

$$\bar{R} = \bar{r} + \rho\bar{n},$$

dedusă din (149,VI), punând $\rho' = 0$. Ea va fi locul centrelor de curbură ale elicei. Deoarece normala principală este paralelă cu planul $xOy$ și întâlnește axa *Oz*, distanța centrului de curbură la axa *Oz* va fi

$$d = \bar{R}\bar{n} = (\bar{r} + \rho\bar{n})\,\bar{n} = \rho - a = \frac{a^2+h^2}{a} - a = \frac{h^2}{a}.$$

Deci: *Curba polară a elicei este trasată pe cilindrul circular vertical, de rază* $\frac{h^2}{a}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fiind muchie de înapoiere a suprafeței polare, această curbă va avea ca tangentă axa de curbură sau polara curbei, paralelă cu binormala. Cum binormala face un unghi constant $\varphi$ cu *Oz, curba polară a elicei va fi tot o elice,* de ecuație.

$$\bar{R}=\bar{r}+\rho\bar{n}=-\bar{i}\frac{h^2}{a}\cos\theta-\bar{j}\frac{h^2}{a}\sin\theta+\bar{k}h\theta.$$

Suprafața rectificantă, având ecuația

$$\bar{R}=\bar{r}+\alpha\bar{\delta}=\bar{i}a\cos\theta+\bar{j}h\sin\theta+\bar{k}\left(h\theta+\frac{\alpha}{\sqrt{a^2+h^2}}\right),$$

*coincide cu cilindrul pe care este trasată elicea,* iar muchia sa de înapoiere este la infinit pe generatoarele cilindrului.

## § 199. Aplicații: Evolute și evolvente ale unei curbe

Curbele strâmbe sau plane pun în evidență două familii de curbe situate pe desfășurabilele asociate.

In deplasarea triedrului principal dealungul curbei $C$, tangenta $\bar{t}$ generează o suprafață desfășurabilă având curba ca muchie de înapoiere. In același timp, normala $\bar{n}$ și binormala $\bar{b}$ generează două suprafețe riglate și este ușor de verificat că, în general, aceste suprafețe nu sunt desfășurabile. Prin urmare, aceste normale nu admit, în general, o înfășurătoare. Se pune atunci problema de *a determina normalele unei curbe C care admit o înfășurătoare,* deci care generează o suprafață desfășurabilă.

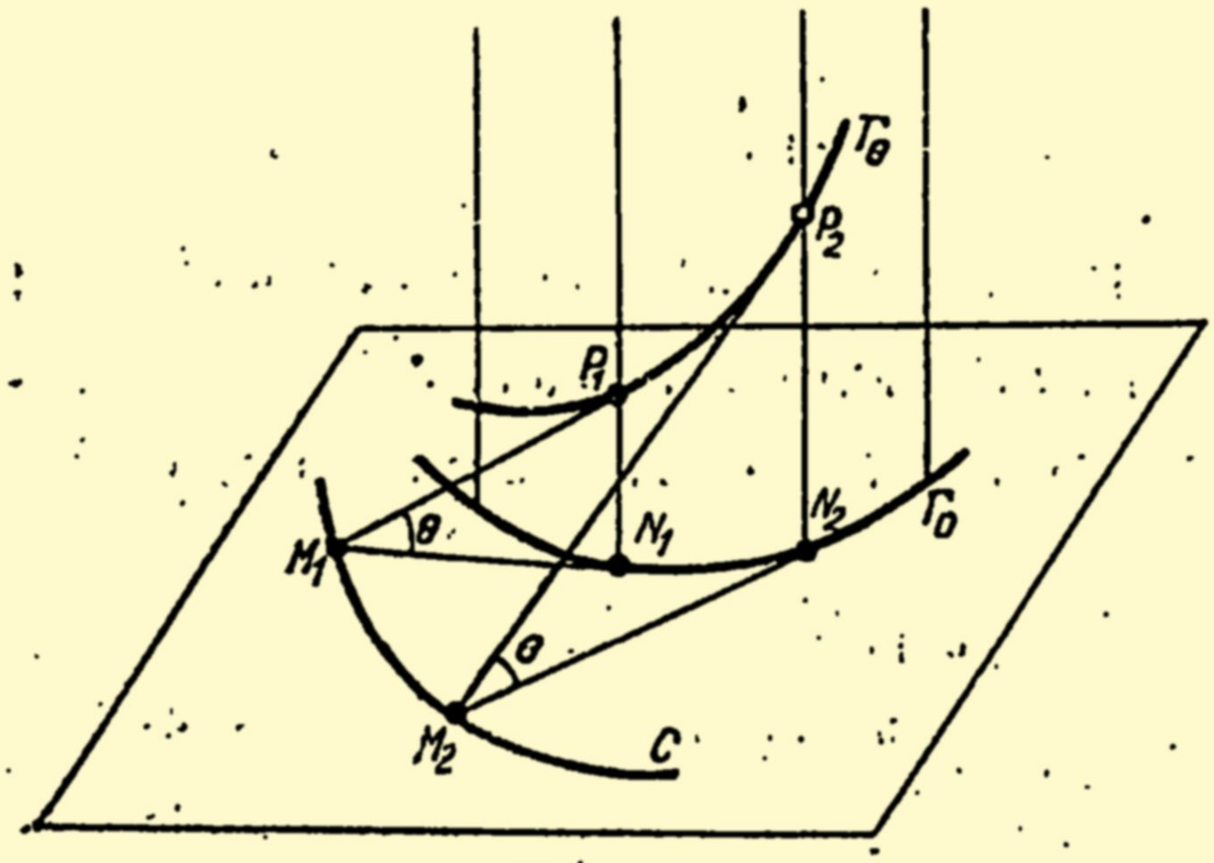



Fig. 191

Vom numi *evolută* sau *desfășurată* a unei curbe $C$ orice înfășurătoare a unei familii de normale ale acestei curbe.

In cazul curbelor plane, normalele din planul curbei $C$ admit o înfășurătoare $\Gamma_0$, care este locul centrelor de curbură ale curbei.

Să considerăm cilindrul drept, având ca bază curba $\Gamma_0$, și să rotim de un unghi $\theta$ normalele $M_1N_1$, $M_2N_2$ în planele proiectante $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, etc. Locul punctelor $P_1$, $P_2$, etc. va fi o elice, deoarece tangentele $P_1M_1$, $P_2M_2$, etc. fac un unghi constant cu generatoarea cilindrului (fig. 191).

Prin urmare, normalele considerate admit o înfășurătoare $\Gamma_\theta$, situată pe cilindrul proiectant al curbei $\Gamma_0$. Generatoarele acestui cilindru sunt dreptele polare ale curbei $C$, deci *cilindrul este suprafața polară a curbei plane C.* Am obținut astfel următorul rezultat: *Normalele din spațiu ale unei curbe plane C, care fac un unghi constant cu planul curbei, admit o înfășurătoare, care este o elice pe cilindrul drept având ca bază evoluta plană a lui C.*

Acest cilindru, care este suprafața polară a curbei $C$, poate fi considerat ca generat de familia de evolute $\Gamma_0$.

**1. Evolute.** Aceeași problemă se poate trata în mod analog în spațiu. Să căutăm familiile de normale ale unei curbe $C$, care admit o înfășurătoare.

Vom nota cu $\theta$ unghiul făcut de o normală $\bar{n}_0$ cu normala principală $\bar{n}$ a curbei $C$, acest unghi fiind măsurat în planul normal în sensul pozitiv dela $\bar{n}$ spre $\bar{b}$ (fig. 192).

Un punct $P$ de pe această normală este definit prin vectorul său de poziție

$$\bar{R}=\bar{r}+\lambda(\cos\theta\bar{n}+\sin\theta\bar{b}), \qquad (154,VI)$$

unde $\lambda$ este un parametru: $\lambda=|MP|$.

Vom determina $\lambda$ și $\theta$ în funcție de arcul $s$, astfel încât curba descrisă de $P$ să admită ca tangentă vectorul

$$\bar{n}_0=\cos\theta\bar{n}+\sin\theta\bar{b}.$$

Vom avea

$$\frac{d\bar{R}}{ds}=\bar{t}+\frac{d\lambda}{ds}(\cos\theta\bar{n}+\sin\theta\bar{b})+\lambda(-\sin\theta\bar{n}+\cos\theta\bar{b})\frac{d\theta}{ds}+$$

$$+\lambda\left[\cos\theta\left(-\frac{1}{\rho}\bar{t}+\frac{1}{\tau}\bar{b}\right)-\sin\theta\frac{1}{\tau}\bar{n}\right]=$$

$$=\left(1-\lambda\frac{\cos\theta}{\rho}\right)\bar{t}-\lambda\left(\frac{1}{\tau}+\frac{d\theta}{ds}\right)\sin\theta\bar{n}+\lambda\left(\frac{1}{\tau}+\frac{d\theta}{ds}\right)\cos\theta\bar{b}+$$

$$+\frac{d\lambda}{ds}(\cos\theta\bar{n}+\sin\theta\bar{b}).$$

Pentru ca acest vector să aibă direcția lui $\bar{n}_\theta$, trebue în primul rând ca

$$1-\lambda\frac{\cos\theta}{\rho}=0;\quad \lambda=\frac{\rho}{\cos\theta};\quad \rho=\lambda\cos\theta,$$

ceeace arată că *punctul $P$ trebue să se găsească pe polara $\Delta$ a curbei în punctul $M$.*

În același timp, deoarece vectorul

$$\lambda\left(\frac{1}{\tau}+\frac{d\theta}{ds}\right)(\cos\theta\bar{b}-\sin\theta\bar{n})$$

este perpendicular pe $\bar{n}_\theta$, pentru coliniaritate trebue ca

$$\frac{1}{\tau}+\frac{d\theta}{ds}=0. \qquad (155,VI)$$

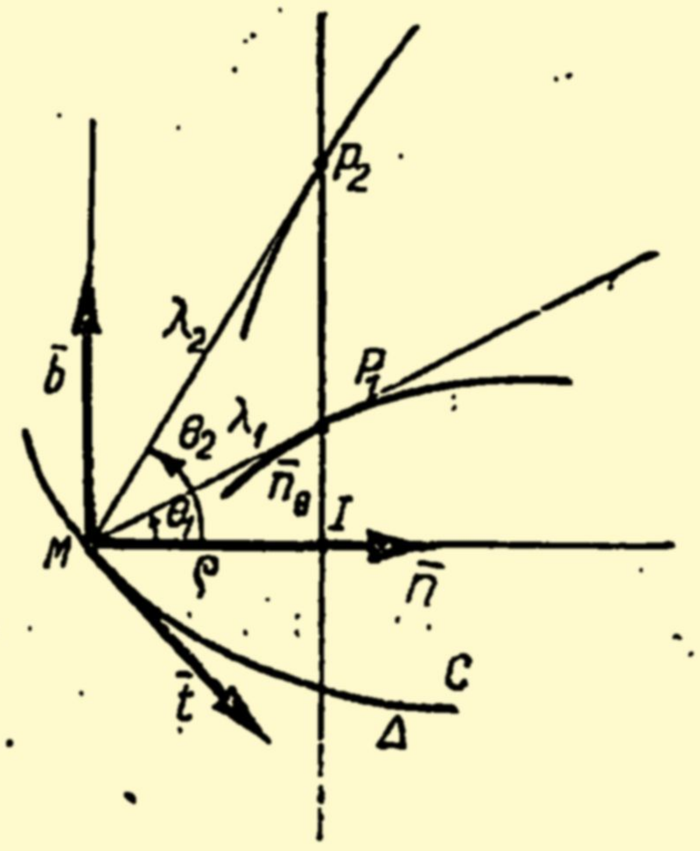



Fig. 192

Prin integrare obținem expresia lui $\theta(s)$

$$\theta=-\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\tau}+c=\psi(s)+c;\quad \psi(s)=-\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\tau} \qquad (156,VI)$$

unde $c$ este o constantă arbitrară.

*Există deci o infinitate de soluții*, care se deduc dintr'una, adăugând o constantă arbitrară. Cunoscând o familie de normale $n_\theta$, care admit o înfășurătoare, se obțin toate celelalte rotind familia $n_\theta$ de un unghi constant în planul normal. Avem următoarele proprietăți:

*Toate evolutele se găsesc pe suprafața polară a curbei $C$.*

*Suprafețele $S_\theta$, generate de normalele $\bar{n}_\theta$, sunt desfășurabile, admit evolutele $\Gamma_\theta$ ca muchii de înapoiere și conțin toate curba $C$.*

*Planele formate de tangentele $\bar{t}$ și de normalele $\bar{n}_\theta$ la curba $C$ sunt tangente la desfășurabilele $S_\theta$ și osculatoare la evolutele $\Gamma_\theta$.*

*Două desfășurabile $S_{\theta_1}$ și $S_{\theta_2}$, corespunzând la două familii $\bar{n}_{\theta_1}$, $\bar{n}_{\theta_2}$ se taie dealungul curbei $C$ sub un unghi constant.*

Suprafața polară poate fi considerată ca generată de evolutele curbei $C$. Ecuația sa, dedusă din (154,VI), ținând seama de valoarea lui $\lambda$, este

$$\bar{R}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\rho\operatorname{tg}\theta\bar{b}=\bar{r}+\rho\bar{n}+\rho\operatorname{tg}(\psi+c)\bar{b}, \qquad (157,IV)$$

parametrii fiind $s$ și $c$. Evolutele sunt curbele $c=\text{const}$, iar dreptele polare sunt curbele $s=\text{const}$.

Pentru ca normala principală să admită o înfășurătoare, ecuația (155,VI) trebue să admită soluția $\theta=0$, deci vom avea $\frac{1}{\tau}=0$, curba $C$ va avea torsiunea nulă. *Singurele curbe, ale căror normale principale admit o înfășurătoare, sunt curbele plane.*

In acest caz, soluția generală a ecuației (153,VI), este $\theta=c$, deci rezultatul stabilit anterior se complectează astfel:

*Evolutele unei curbe plane sunt elice trasate pe cilindrul, care are ca bază evoluta din planul curbei. Desfășurabilele generate de normalele curbelor strâmbe sunt suprafețe de pantă, în speță elicoizi desfășurabili.*

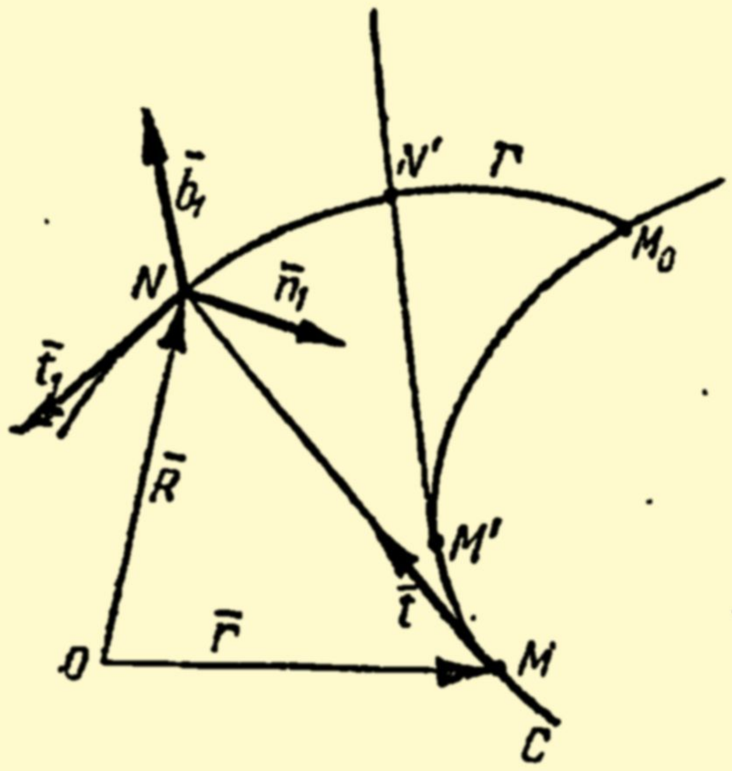



Fig. 193

Ecuațiile acestor elicoizi se deduc din (153,VI) luând $\theta=\text{const}$. Parametrii sunt $s$ și $\lambda$.

**2. Evolvente.** Vom numi *evolventă* sau *desfășurătoare* a unei curbe $C$ orice curbă $\Gamma$, pentru care $C$ este o evolută.

Tangentele curbei $C$ vor fi normale la evolventa $\Gamma$, care este deci o traiectorie ortogonală a tangentelor curbei $C$.

Deoarece tangentele la o curbă generează o desfășurabilă $S$, orice evolventă se va găsi pe această suprafață și vom putea defini evolventele ca *traectoriile ortogonale ale generatoarelor desfășurabilei formate de tangentele la o curbă $C$.*

In cazul curbelor plane, această desfășurabilă fiind chiar planul curbei, toate evolventele, ca traectorii ortogonale ale tangentelor, se vor găsi în același plan cu $C$.

Ecuația curbei $C$ fiind $\bar{r}=\bar{r}(s)$, vom obține o evolventă scriind că punctul $N$ definit prin ecuația

$$\bar{R}=\bar{r}+\lambda\bar{t},$$

descrie o curbă normală la $\bar{t}$, $\lambda$ fiind o funcție $\lambda(s)$, ce trebue determinată (fig. 193) Vom avea deci

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\bar{R}}{ds}=\bar{t}+\frac{d\lambda}{ds}\bar{t}+\lambda\frac{d\bar{t}}{ds}=\left(1+\frac{d\lambda}{ds}\right)\bar{t}+\frac{\lambda}{\rho}\bar{n};\\&\bar{t}\,\frac{d\bar{R}}{ds}=1+\frac{d\lambda}{ds}=0;\\&\lambda=-(s-\sigma),\end{aligned}\right\}\qquad(158,VI)$$

unde $\sigma$ este o constantă arbitrară. Există o infinitate de evolvente formând pe $S$ o familie cu un parametru $\sigma$, având ecuația

$$\bar{R}=\bar{r}-(s-\sigma)\,\bar{t}.\qquad(159,VI)$$

La fiecare valoare a lui $\sigma$ corespunde o evolventă, pe care parametrul este $s$. Pentru $s=\sigma$, avem $\bar{R}=\bar{r}$, deci evolventa întâlnește curba $C$ într'un punct $M_0$. Acest punct este ingular pe evolventa $\Gamma$, deoarece vom avea $\lambda=0$ și din (158,VI), $\frac{d\bar{R}}{ds}=0$, deci tangenta va fi nedeterminată. Se arată că $M_0$ este punct de înapoiere pe evolventa $\Gamma$.

Luând originea arcelor în $M_0$, vom avea $\lambda=-s$. Din această relație rezultă o construcție practică a evolventei punctului $M_0$: *considerând un fir întins dealungul curbei $C$ până în punctul $M_0$, dacă acest fir este desprins de pe curbă și întins pe desfășurabila $S$ dealungul tangentelor, capătul său va descrie evolventa $M_0N'N$.*

Relațiile între versorii fundamentali $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ ai curbei $C$ și $\bar{t}_1$, $\bar{n}_1$, $\bar{b}_1$ ai curbei $\Gamma$ se obțin imediat din ecuația (159,VI).

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea

$$d\bar{R}=d\bar{r}-tds-sd\bar{t}=-sd\bar{t};$$

$$ds_1^2=d\bar{R}^2=s^2d\bar{t}^2=\frac{s^2}{\rho^2}ds^2.$$

Alegând sensul pozitiv pe $\Gamma$, corespunzător circulației în sensul pozitiv pe $C$, vom avea

$$ds_1=\frac{s}{\rho}ds;\quad s_1=\int_0^s\frac{sds}{\rho}$$

deci

$$\frac{d\bar{R}}{ds_1}=\bar{t}_1=-s\frac{d\bar{t}}{ds_1}=-s\frac{d\bar{t}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=-\bar{n};$$

$$\frac{d\bar{t}_1}{ds_1}=\frac{1}{\rho_1}\bar{n}_1=-\frac{d\bar{n}}{ds_1}=-\frac{d\bar{n}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\frac{\rho}{s}\left(\frac{1}{\rho}\bar{t}-\frac{1}{\tau}\bar{b}\right), \qquad (160,VI)$$

de unde prin ridicare la pătrat scalar:

$$\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{\rho^2}{s^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)=\frac{\rho^2}{\varkappa^2s^2},\quad \rho\rho_1=\varkappa s,$$

unde $\frac{1}{\varkappa^2}$ este curbura totală (43,VI),

Deasemenea

$$\bar{b}_1=\bar{t}_1\times\bar{n}_1=-\frac{\rho\rho_1}{s}\bar{n}\times\left(\frac{1}{\rho}\bar{t}-\frac{1}{\tau}\bar{b}\right)=\frac{\rho\rho_1}{s}\left(\frac{1}{\tau}\bar{t}+\frac{1}{\rho}\bar{b}\right)=\varkappa\bar{\delta} \qquad (161,VI)$$

unde $\bar{\delta}$ este vectorul lui Darboux al curbei $C$ în $M$. Triedrul principal al evolventei este format cu vectorii

$$-\bar{n},\quad -\varkappa\frac{d\bar{n}}{ds},\quad \varkappa\bar{\delta}.$$

El provine din rotația triedrului lui Frenet în jurul lui $\bar{n}$ de un unghi $\varphi$, dat de formula

$$\cos\varphi=-\varkappa\frac{d\bar{n}}{ds}\bar{t}=\varkappa\bar{\delta}\bar{b}=-\frac{\varkappa}{\rho}=\frac{\tau}{\sqrt{\rho^2+\tau^2}},$$

cu schimbările de sens și semnificații din formulele (160,VI) și (161, VI).

## § 200. Infășurătoare de suprafețe cu doi parametri

O familie de suprafețe cu doi parametri poate fi dată prin ecuația sa implicită

$$f(\bar{r},\ \lambda,\ \mu)=0, \qquad (162,VI)$$

funcția $f$ fiind diferențiabilă continuu în raport cu variabilele $x, y, z, \lambda, \mu$ până la un ordin convenabil (regulată de clasa $C_r$).

Vom spune că o suprafață $S$ este *înfășurătoarea* familiei $\sum(\lambda, \mu,)$, dacă are cu fiecare din suprafețele acestei familii, în domeniul unui punct, un singur element de contact comun, deci dacă este tangentă într'un singur punct fiecăreia din suprafețele $\sum(\lambda, \mu)$, în domeniul acelui punct. Prin fiecare punct ordinar al lui $S$ va trece, în general, o suprafață $\sum(\lambda, \mu)$ și numai una, iar

când $\lambda$ și $\mu$ suferă variații elementare $\delta\lambda$, $\delta\mu$, suprafața $\sum(\lambda+\delta\lambda, \mu+\delta\mu)$ este tangentă lui $S$ într'un punct $M'$ vecin punctului de contact $M$.

Cu aceste condiții, înfășurătoarea va fi generată de elementele de contact comune cu suprafețele $\sum(\lambda, \mu)$.

Printr'un raționament analog celui folosit pentru suprafețele cu un parametru, intersecția a două suprafețe vecine $\sum(\lambda, \mu)$ și $\sum(\lambda+\delta\lambda, \mu+\delta\mu)$ are loc într'un punct $M'$, care tinde către o poziție limită $M$ pe $\sum(\lambda, \mu)$, când $\delta\lambda \to 0$ și $\delta\mu \to 0$. Acest punct, numit *caracteristic*, verifică ecuațiile

$$f_\lambda(\bar{r}, \lambda, \mu)=0 \quad \text{și} \quad f_\mu(\bar{r}, \lambda, \mu)=0. \tag{163,VI}$$

In ipoteza că:

$$\frac{D(f_\lambda, f_\mu)}{D(\lambda, \mu)} \neq 0 \tag{164,VI}$$

ecuațiile (162,VI) și (163,VI), admit o soluție unică în domeniul unui punct $M$, care le verifică.

*Dacă există o înfășurătoare S, punctele ei verifică deasemenea sistemul* (162,VI), (163,VI). In adevăr, dacă una din ecuațiile (163,VI) nu ar fi verificată, de exemplu prima, s'ar putea rezolva ecuația (162,VI) în raport cu $\lambda$:

$$\lambda=\varphi(\bar{r}, \mu).$$

Ținând atunci pe $\mu$ fix și lăsând pe $\lambda$ să varieze, am obține suprafețe $\sum(\lambda+\delta\lambda, \mu)$ tangente la $S$ în vecinătatea punctului $M$ de contact cu $\sum(\lambda, \mu)$. Ca și pentru suprafețele cu un parametru, se arată că, în acest caz, $S$ se confundă chiar cu $\sum(\lambda, \mu)$ în vecinătatea lui $M$ și deci nu mai este tangentă altor suprafețe din familie în domeniul lui $M$. Prin urmare: Infășurătoarea $S$ verifică sistemul

$$f(\bar{r}, \lambda, \mu)=0; \quad f_\lambda(\bar{r}, \lambda, \mu)=0; \quad f_\mu(\bar{r}, \lambda, \mu)=0.$$

Dacă în același timp este îndeplinită și condiția (164,VI), vom putea elimina pe $\lambda$ și $\mu$ între aceste trei ecuații și vom obține o suprafață, care va conține înfășurătoarea $S$, precum și locul punctelor singulare.

Cazul suprafețelor sub formă parametrică, de ecuație vectorială

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v, \lambda, \mu) \tag{165,VI}$$

conduce la rezultate analoage: dacă există o înfășurătoare, $\lambda$ și $\mu$ vor fi două funcții de $u$ și $v$:

$$\lambda=\lambda(u, v) \quad \text{și} \quad \mu=\mu(u, v) \quad \text{cu} \quad \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \neq 0,$$

astfel încât suprafața

$$\bar{R}=\bar{r}[u, v, \lambda(u, v), \mu(u, v)]$$

va avea același element de contact ca și $\sum(u, v)$ în punctul $M(u, v)$. Vectorii

$$\bar{R}_u=\bar{r}_u+\bar{r}_\lambda\lambda_u+\bar{r}_\mu\mu_u;$$

$$\bar{R}_v=\bar{r}_v+\bar{r}_\lambda\lambda_v+\bar{r}_\mu\mu_v$$

Scanned with OKEN Scanner

trebue să fie coplanari cu $\bar{r}_u$ şi $\bar{r}_v$. Din relaţiile

$$\bar{R}_u \bar{r}_u \bar{r}_v = \lambda_u (\bar{r}_\lambda \bar{r}_u \bar{r}_v) + \mu_u (\bar{r}_\mu \bar{r}_u \bar{r}_v) = 0;$$

$$\bar{R}_v \bar{r}_u \bar{r}_v = \lambda_v (r_\lambda \bar{r}_u \bar{r}_v) + \mu_v (\bar{r}_\mu r_u \bar{r}_v) = 0,$$

care constitue un sistem omogen în $(\bar{r}_\lambda \bar{r}_u \bar{r}_v)$ şi $(\bar{r}_\mu \bar{r}_u \bar{r}_v)$, deducem,

$$\bar{r}_\lambda \bar{r}_u \bar{r}_v = 0; \quad \bar{r}_\mu \bar{r}_u \bar{r}_v = 0, \tag{166,VI}$$

deoarece determinantul sistemului este

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \neq 0.$$

Dacă $\bar{r}_\lambda$ şi $\bar{r}_\mu$ nu sunt coliniari, deci $\bar{r}_\lambda \times \bar{r}_\mu \neq 0$, aceste două condiţii sunt distincte şi determină pe $\lambda$ şi $\mu$ în funcţie de $u$ şi $v$. Infăşurătoarea se obţine eliminând pe $\lambda$ şi $\mu$ între ecuaţiile (165,VI) şi ecuaţia suprafeţelor $\sum (\lambda, \mu)$. Se poate face observaţia că permutând $u, v$ cu $\lambda, \mu$ obţinem aceleaşi condiţii (166,VI), deci putem considera şi familia de suprafeţe $\sum (u, v)$, în care $\lambda$ şi $\mu$ sunt coordonate curbilinii, iar $u, v$ parametri. Infăşurătoarea se obţine eliminând $u$ şi $v$ între ecuaţiile (165,VI) şi (166,VI).

Dacă între $\lambda$ şi $\mu$ se stabileşte o relaţie $\mu = \mu(\lambda)$, se obţine o subfamilie de suprafeţe cu un singur parametru, care admite o înfăşurătoare, definită, de exemplu, prin ecuaţiile

$$f[\bar{r}, \lambda, \mu(\lambda)] = 0; \quad f_\lambda + f_\mu \frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Intersecţia acestei suprafeţe cu $f_\lambda = 0$ este o curbă, care verifică ecuaţiile

$$f[\bar{r}, \lambda, \mu(\lambda)] = 0; \quad f_\lambda = 0 \quad \text{şi} \quad f_\mu = 0,$$

deci sistemul (162,VI) şi (163,VI), adică se găseşte pe înfăşurătoarea $S$ a familiei cu doi parametri $\sum (\lambda, \mu)$.

Obţinem astfel următorul rezultat important:

*Infăşurătoarea unei familii cu un parametru, extrasă din familia* $\sum (\lambda, \mu)$, *se racordează cu înfăşurătoarea* $S$ *a familiei* $\sum (\lambda, \mu)$ *dealungul unei curbe.*

**Aplicaţie.** *Infăşurătoare de sfere. Suprafeţe paralele.* Fiind dată familia de sfere cu doi parametri de ecuaţie

$$(\bar{R} - \bar{r})^2 - \rho^2 = 0, \tag{167,VI}$$

unde

$$\bar{r} = \bar{r}(\lambda, \mu); \quad \rho = \rho(\lambda, \mu), \tag{168,VI}$$

centrul sferei $\Sigma (\lambda, \mu)$ se găseşte pe o suprafaţă $\Sigma$ (fig. 194, *a*), iar raza $\rho$ este variabilă cu punctul $M(u, v)$ al acestei suprafeţe.

Infăşurătoarea $S$ va fi dată de intersecţia sferei $\Sigma (\lambda, \mu)$ cu planele

$$(\bar{R} - \bar{r})\bar{r}_\lambda + \rho \rho_\lambda = 0; \quad (\bar{R} - \bar{r})\bar{r}_\mu + \rho \rho_\mu = 0 \tag{169,VI}$$

obţinute prin derivare în raport cu $\lambda$ şi $\mu$. Această intersecţie este o dreaptă $D(\lambda, \mu)$ perpendiculară pe vectorii $\bar{r}_\lambda$ şi $\bar{r}_\mu$, deci paralelă cu $\bar{r}_\lambda \times \bar{r}_\mu$, care este un vector normal la suprafaţa $\Sigma$. Dacă $D(\lambda, \mu)$ intersectează sfera $\Sigma (\lambda, \mu)$ în puncte reale, acestea vor fi puncte caracteristice. Deoarece $D(\lambda, \mu)$ se obţine prin scăderea ecuaţiilor a două sfere $\Sigma (\lambda + \delta\lambda, \mu)$ şi

$\Sigma(\lambda, \mu+\delta\mu)$ din ecuația lui $\Sigma(\lambda,\mu)$, ea va reprezenta limita axei radicale a acestor trei sfere și va putea fi exterioară sferei $\Sigma(\lambda, \mu)$, deci este posibil să nu existe o înfășurătoare reală.

Dreapta de intersecție a planelor (169,VI) va avea o ecuație de forma

$$\bar{R}=\bar{r}+\alpha(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)+\beta\bar{r}_\lambda+\gamma\bar{r}_\mu, \qquad (170,VI)$$

dacă raportăm vecinătatea lui $M(u, v)$ la un triedru format de $\bar{r}_\lambda$, $\bar{r}_\mu$ și $\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu$.

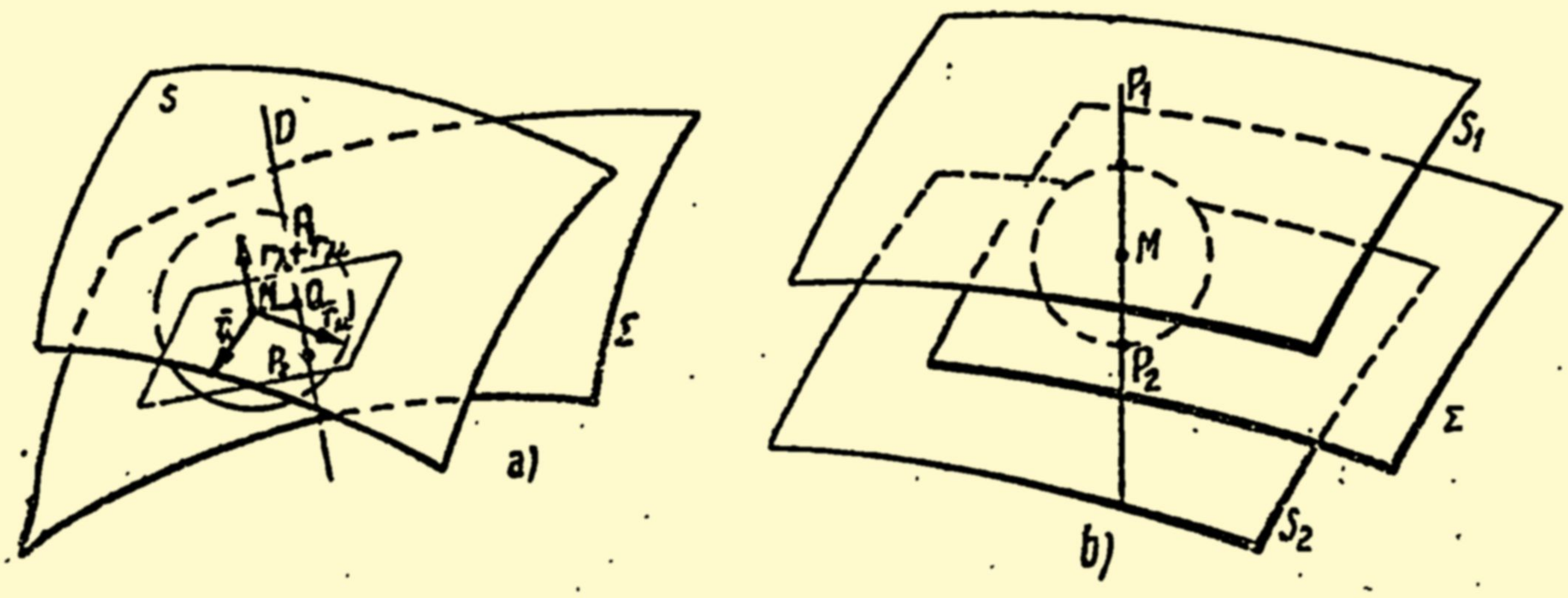



Fig. 194

Impunând vectorului $\bar{R}-\bar{r}$ condiția de a verifica ecuațiile (169,VI), vom determina parametrii $\beta$ și $\gamma$ din ecuațiile

$$\beta\bar{r}_\lambda^2+\gamma\bar{r}_\lambda\bar{r}_\mu=-\rho\rho_\lambda;$$

$$\beta\bar{r}_\lambda\bar{r}_\mu+\gamma\bar{r}_\mu^2=-\rho\rho_\mu;$$

Determinantul sistemului fiind

$$W^2=\bar{r}_\lambda^2\bar{r}_\mu^2-(\bar{r}_\lambda\bar{r}_\mu)^2, \quad \text{cu} \quad W\not\equiv 0,$$

dacă punctul $M$ descrie o suprafață nedegenerată, în punctele ordinare ale lui $\Sigma(\lambda, \mu)$ vom avea:

$$\beta=-\frac{\rho}{W^2}(\rho_\lambda\bar{r}_\mu^2-\rho_\mu\bar{r}_\lambda\bar{r}_\mu)=-\frac{\rho}{W^2}(\rho_\lambda\bar{r}_\mu-\rho_\mu\bar{r}_\lambda)\bar{r}_\mu;$$

$$\gamma=-\frac{\rho}{W^2}(\rho_\mu\bar{r}_\lambda^2-\rho_\lambda\bar{r}_\lambda\bar{r}_\mu)=\frac{\rho}{W^2}(\rho_\lambda\bar{r}_\mu-\rho_\mu\bar{r}_\lambda)\bar{r}_\lambda.$$

Vom nota pentru ușurință cu $\bar{p}$ vectorul

$$\bar{p}=\rho_\lambda\bar{r}_\mu-\rho_\mu\bar{r}_\lambda$$

din planul tangent și vom avea

$$\beta=-\frac{\rho}{W^2}\bar{p}\,\bar{r}_\mu; \quad \gamma=\frac{\rho}{W^2}\bar{p}\,\bar{r}_\lambda.$$

Ecuația (170,VI) a lui $D(\lambda, \mu)$ va deveni

$$\bar{R}=\bar{r}+\alpha(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)+\frac{\rho}{W^2}[(\bar{p}\,\bar{r}_\lambda)\bar{r}_\mu-(\bar{p}\,\bar{r}_\mu)\bar{r}_\lambda].$$

Scanned with OKEN Scanner

Punând în evidență dublul produs vectorial din membrul al doilea, vom scrie

$$\bar{R}=\bar{r}+\frac{\rho}{W^2}\,(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)\times\bar{p}+\alpha\,(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu), \qquad (171,VI)$$

parametrul $\alpha$ rămânând nedeterminat. Vom obține puncte caracteristice reale și deci o înfășurătoare $S$ reală, dacă intersecția acestei drepte cu sfera este reală.

Introducând expresia vectorului $\bar{R}-\bar{r}$ în ecuația sferei (167,VI), obținem condiția

$$\rho^2=\frac{\rho^2}{W^4}[(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)\times\bar{p}\,]^2+\alpha^2\,(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)^2=\frac{\rho^2}{W^4}\;W^2\,\bar{p}^2+\alpha^2\,W^2,$$

de unde

$$\alpha=\pm\frac{\rho}{W^2}\sqrt{W^2-p^2}.$$

Vor exista două puncte caracteristice $P_1$ și $P_2$ reale, dacă

$$W^2-p^2>0.$$

Ecuația înfășurătoarei $S$ va fi

$$\bar{R}=\bar{r}+\frac{\rho}{W^2}\,(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)\times\bar{p}\pm\frac{\rho}{W^2}\sqrt{W^2-p^2}\,(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu). \qquad (172,VI)$$

Această suprafață va avea două pânze $S_1$ și $S_2$, care pot avea puncte comune dealungul liniilor determinate de ecuația

$$W^2-p^2=0.$$

In cazul particular, când sferele $\Sigma\,(\lambda,\ \mu)$ au raza constantă (fig. 194,*b*), dreapta $D\,(\lambda,\ \mu)$ devine normală la suprafața $\Sigma$ în $M$, deoarece

$$\rho_u=0,\quad \rho_v=0,\quad \bar{p}=0.$$

Infășurătoarea $S$ are ecuația

$$\bar{R}=\bar{r}\pm\frac{\rho}{W}\,(\bar{r}_\lambda\times\bar{r}_\mu)=\bar{r}\pm\rho\bar{n} \qquad (173,VI)$$

și se obține luând pe normala la $\Sigma$, de o parte și de alta, vectori de modul egal cu $\rho$.

Suprafața, astfel generată, se numește *suprafață paralelă cu* $\Sigma$. Când $\rho$ variază, obținem deci familia suprafețelor paralele cu $\Sigma$, ca înfășurătoare ale sferelor de rază egală, dar variabilă, cu centrul pe $\Sigma$.

## EXERCIȚII

1. Fie $\bar{r}\,(u,v)=\bar{i}\,u+\bar{j}v+\bar{k}\sin(u+v)$ ecuația unei suprafețe:

a) să se determine unghiul dintre curbele $u+v=0$ și $u-v=0$;

b) să se scrie ecuația normalei și a planului tangent în punctul $u=0$, $v=0$ și să se calculeze unghiul dintre direcția normalei și direcția versorului $\bar{k}$.

2. O dreaptă $D$, perpendiculară pe o axă $\Delta$, se sprijină pe $\Delta$ și pe o elice circulară dreaptă de axă $\Delta$, generând astfel o suprafață riglată, numită *elicoid drept:*

a) să se scrie ecuația vectorială a elicoidului;

b) să se scrie ecuația normalei și a planului tangent la elicoid;

c) să se scrie expresia elementului liniar al elicoidului.

Indicație. Se va obține ecuația $\bar{r}\,(u,v)=\bar{i}\,u\cos v+\bar{j}\,u\sin\omega+\bar{k}\,\bar{b}\,v$.

3. Să se demonstreze că planul tangent în punctul $A$ la suprafața $S$ este limita către care tinde planul $ABC$, când punctele $B$ și $C$, rămânând pe suprafața $S$, tind către $A$ pe două direcții distincte. (Vâgodschi, ibid. p. 245).

Scanned with OKEN Scanner

**Indicație.** Pornind dela ecuația $[(\bar{r}_A-\bar{r})(\bar{r}_B-\bar{r})(\bar{r}_C-\bar{r})]=0$ a planului $ABC$, avem după formula lui Taylor

$$\bar{r}_B-\bar{r}=\bar{r}_u\,du+\bar{r}_v\,dv+\cdots$$

$$\bar{r}_C-\bar{r}=\bar{r}_u\,\delta u+\bar{r}_v\,\delta v+\cdots$$

$$(\bar{r}_B-\bar{r})\times(\bar{r}_C-\bar{r})=(\bar{r}_u\times\bar{r}_v)(du\,\delta v-\delta u\,dv)+\cdots$$

de unde se obține ecuația planului tangent în $A$

$$(\bar{r}_A-\bar{r})\,\bar{r}_u\,\bar{r}_v=0.$$

4. Fie suprafața $\bar{r}(u,v)=\bar{i}\,u+\bar{j}v+\bar{k}(uv+u)$; să se determine unghiul dintre curbele parametrice și unghiul făcut de aceste curbe și curba $u+v=0$.

5. Să se scrie cele două forme fundamentale ale unei suprafețe a cărei ecuație într'un sistem de axe ortogonal este $z=z(x,y)$.

**Indicație.** Notând $x=u$, $y=v$, se va găsi că prima formă fundamentală este

$$(1+p^2)\,dx^2+2\,pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2,$$

și a doua

$$\frac{r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

unde s'a notat

$$p=\frac{\partial z}{\partial x};\quad q=\frac{\partial z}{\partial y};\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

6. Curbele, care taie toate curbele unei familii de curbe, trasate pe o suprafață, sub un unghi constant, se numesc *traiectorii izogonale:*

a) să se găsească traiectoriile izogonale ale meridianelor unei sfere; ca aplicație, să se determine unghiul constant făcut de o asemenea traiectorie (care se mai numește și *loxodromă*), care unește două puncte ale unei sfere, cu meridianele sferei;

b) să se găsească o suprafață de rotație, astfel încât proiecțiile liniilor de pe suprafață, care taie meridianele sub un unghi constant, pe un plan perpendicular pe axa de rotație, să fie parabole cu focarul în punctul de intersecție al axei cu planul perpendicular pe axă;

c) să se găsească traiectoriile izogonale ale generatoarelor unui cilindru;

d) să se găsească traiectoriile izogonale ale generatoarelor unui con;

e) să se găsească traiectoriile izogonale ale generatoarelor elicoidului drept cu plan director.

**Indicație.** a) Un punct de pe sferă fiind determinat prin coordonatele sale geografice, longitudinea $\varphi$ și colatitudinea $\theta$, ecuația diferențială a loxodromelor de unghi $V$ este

$$\frac{d\theta}{\sin\theta}=(\operatorname{ctg} V)\,d\varphi$$

a cărei integrală generală este

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=ke^{\varphi\operatorname{ctg} V}.$$

Unghiul cerut (utilizat în navigația aeriană sau marină), pe care îl face un mobil, care se deplasează din $A(\theta_1,\varphi_1)$ în $B(\theta_2,\varphi_2)$ este dat de ecuația

$$\operatorname{ctg} V=\frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Se va găsi că suprafața de revoluție are ca meridiană o cicloidă obținută prin rostogolirea unui cerc dealungul unei drepte paralele cu axa de rotație a suprafeței.

c) Notând cu $y=f(x)$ ecuația bazei cilindrului în planul $xOy$, ecuația loxodromei se obține intersectând cilindrul cu următorul cilindru:

$$z-k=\operatorname{ctg} V\int\sqrt{1+f^2(x)}\,dx.$$

d) Notând cu

$$y=zf\left(\frac{x}{z}\right)$$

ecuația conului cu vârful în origine și punând $u=\frac{x}{z}$, ecuația loxodromei pe con se obține intersectând conul cu suprafața

$$x^2+y^2+z^2=e^{\pm 2\operatorname{ctg} V\int\sqrt{\frac{AC-B^2}{A}}\,du}$$

unde

$$A=1+u^2+f^2(u);\ B=u+f(u)f'(u);\ C=1+f'^2(u).$$

e) A se vedea exercițiul 2.

7. Să se arate că curbele trasate pe o suprafață și care satisfac ecuațiile $\sqrt{E}\,du+\sqrt{G}dv=0$ și $\sqrt{E}\,du-\sqrt{G}\,dv=0$ sunt ortogonale. (Vâgodschi, ibid, pag. 258).

8. Să se scrie a doua formă fundamentală:

a) pentru elicoidul drept de pas $2\pi\bar{b}$;

b) pentru o suprafață de rotație;

c) pentru o sferă.

Indicație. a) $L=0;\ M=\dfrac{-\bar{b}}{\sqrt{u^2+b^2}},\ N=0;$

b) $L=\varphi'\psi''-\psi'\varphi'';\ M=0;\ N=\varphi\psi';$

c) $L=-r^2;\ M=0;\ N=-r^2\sin^2 u.$

9. Fie suprafața

$$\bar{r}(u,v)=\bar{i}\,(u^2+v^2)+\bar{j}(v+u^2)+\bar{k}uv.$$

Să se determine:

a) elementul de arie orientat;

b) $E,\ F,\ G$;

c) normala la suprafață;

d) planul tangent la suprafață;

e) $L,\ M,\ N$.

10. Fie suprafața $\bar{r}(u,v)=\bar{i}\,u\cos v+\bar{j}\,u\sin v+\bar{k}\,u^2$. Să se calculeze unghiul dintre o curbă oarecare și curbele

$$u=\text{const. și } v=\text{const.}$$

11. Se dă o curbă plană $\bar{\rho}=\bar{\sigma}(s)$ ($s$ abscisa curbilinie) și fie suprafața

$$\bar{r}(u,s)=\bar{\rho}(s)+u\,\bar{t}(s),$$

unde

$$t(s)=\frac{d\bar{\rho}(s)}{ds}:$$

a) să se determine $d\bar{\sigma}$ și $\bar{n}$;

b) să se scrie ecuația planului osculator la curba $\bar{\rho}(s)$ și să se compare cu planul tangent la suprafață.

12. Se consideră suprafața

$$\bar{r}(u,v)=\bar{i}(3u+3uv^2-u^3)+\bar{j}(3v+3u^2v-v^3)+3\bar{k}(u^2-v^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine:

a) raportul dintre pătratul elementului de arc al suprafeței și $du^2+dv^2$;

b) planul tangent la suprafață în punctul $u=v=0$.

13. Fie $\bar{r}(u,v)=\bar{i}u+\bar{j}(u^2+v^2)+\bar{k}uv$. Să se determine $d\bar{\sigma}, \bar{n}$ și planul tangent la suprafață.

14. Fie $m$ un punct variabil pe o curbă strâmbă $\Gamma$, $\Sigma$ suprafața născută de normala principală în $m$ la $\Gamma$ și $M$ un punct pe normala principală. Se notează distanța $mM=\lambda$, cu orientarea de pe normala principală. Să se determine $\lambda$, știind că punctul $M$ descrie o linie asimptotică a suprafeței $\Sigma$.

Indicație. Se numește linie asimptotică pe o suprafață, o linie care este dată de ecuația diferențială obținută prin egalarea formei a doua fundamentale cu zero. Dealungul unei linii asimptotice planul osculator este tangent la suprafață.

Notând cu $\bar{p}=\bar{r}+\lambda\bar{n}$ vectorul de poziție al punctul $M$, iar cu $s$ arcul pe curba $\Gamma$ de curbură $\frac{1}{\rho}$ și torsiune $\frac{1}{\tau}$, ecuația diferențială, care dă pe $\lambda$ în funcție de $s$, este $(\bar{n}\bar{p}'\bar{p}'')=0$; efectuând calculele și utilizând formulele lui Frenet pentru curba $\Gamma$, se găsește că $\frac{1}{\lambda}$ este dat de ecuația liniară

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)'\cdot\frac{2}{\tau}-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\tau}\right)'+\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\tau}\right)'-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\rho}\right)'\right]=0,$$

care se poate integra printr'o singură cuadratură, deoarece ecuația omogenă, asociată, admite o integrală imediată.

15. Dacă planul osculator la o curbă strâmbă este tangent unei sfere fixe, atunci:

a) planul rectificant trece prin centrul sferei;

b) raportul dintre torsiune și curbură este o funcție liniară de arc;

c) reciprocele propozițiilor a) și b) sunt adevărate.

Indicație. Din ecuația $\bar{r}\bar{b}=\bar{d}$, rezultă prin derivare $\bar{r}\bar{n}=0$.

Derivând încă odată această relație, avem

$$\frac{\rho}{\tau}=\frac{1}{\alpha}(\bar{r}\bar{t}).$$

Insă

$$\frac{d}{ds}(\bar{r}\bar{t})=1, \qquad \text{deci} \qquad \frac{\rho}{\tau}=\frac{1}{d}s+k.$$

16. Condiția necesară și suficientă, pentru ca normalele la o curbă strâmbă să fie binormale la o altă curbă strâmbă, este ca între curbură și torsiune să avem relația

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}=A\frac{1}{\rho},$$

unde $A$ este o constantă.

Indicație. Fie $M$ un punct pe normala principală în $m$ la curba $\Gamma$ și

$$\bar{p}=\bar{r}+\lambda\bar{n}$$

vectorul său de poziție. Punând condiția ca $\bar{p}'\bar{n}=0$, se găsește că $\lambda$ este constant. Punând în fine, condiția ca $\bar{p}''\bar{n}=0$ se găsește relația din enunț.

17. Se consideră doi paraboloizi de rotație, având aceeași axă și simetrici față de planul tangent, comun în vârf. Să se determine muchiile de înapoiere ale suprafețelor desfășurabile, generate de dreptele care sunt tangente la ambii paraboloizi.

Indicație. Se ia ca axă $Oz$ axa de rotație și ca plan $xOy$ planul tangent comun. Dacă $x^2+y^2-2az=0$ este ecuația paraboloidului $P_1$ și $x^2+y^2+2az=0$ a paraboloidului $P_2$ simetric, ecuația diferențială a proiecției pe $xOy$ a celor două muchii de înapoiere, ce

Scanned with OKEN Scanner

corespund celor două suprafeţe desfăşurabile, obţinute luând convenabil puncte $M$ pe $P_1$ şi ducând tangente la $P_2$ comune cu $P_1$ este

$$(xdx+ydy+adz)^2-(x^2+y^2+2az)\,(dx^2+dy^2)=0$$

sau, ţinând seama de ecuaţia lui $P_1$ şi trecând în coordonate polare,

$$dr^2-r^2d\theta^2=0,$$

care se integrează imediat şi conduce la spirale logaritmice. Se găsesc deasemenea spirale logaritmice luând punctele $M$ pe $P_2$ şi ducând tangente la paraboloidul $P_1$.

18. In coordonate rectangulare se consideră familia de sfere depinzând de un parametru

$$x^2+y^2+z^2-2x\cos u-2y\sin u=v^2,$$

unde $v=v(u)$ este o funcţie de $u$.

Să cere să se determine funcţia $v=v(u)$, astfel încât caracteristicele sferelor să fie cercuri de rază constantă $a$.

In cazul particular $v=u$, să se determine traietoriile ortogonale ale cercurilor caracteristice.

Indicaţie. Ecuaţia diferenţială, care dă funcţia $v=v(u)$ este

$$\frac{vdv}{\sqrt{v^2+1-a^2}}=\pm du,$$

şi suprafaţa înfăşurătoare este generată de un cerc variabil de rază $a$ constantă şi al cărui centru descrie o evolventă a cercului unitar din planul $xOy$.

Dacă se ia $v=u$, avem $a=1$. Notând cu $\varphi$ unghiul pe care îl face un diametru al cercului caracteristic cu $xOy$, ecuaţiile suprafeţei înfăşurate sunt:

$$x=\cos u+u\sin u+\cos\varphi\cos u;$$

$$y=\sin u-u\cos u+\cos\varphi\sin u;$$

$$z=\sin\varphi.$$

Traiectoriile ortogonale ale cercurilor $u=\text{const.}$ sunt date de ecuaţia diferenţială

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=udu,$$

a cărei integrală generală este $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=ke^{\frac{1}{2}u^2}$

## C. SPAŢIUL ŞI VARIETĂŢILE SALE ÎN COORDONATE CURBILINII

### § 201. Coordonate curbilinii în spaţiu

Determinarea poziţiei unui punct $M$ în spaţiu prin vectorul său de poziţie implică alegerea unui punct de reper $O$ şi cunoaşterea unui mijloc de a fixa extremitatea $M$ a vectorului $\bar{r}=\overline{OM}$.

Utilizarea unui triedru fundamental $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, permite determinarea *numerică* a punctului $M$ prin coordonatele sale carteziene $x$, $y$, $z$. Vectorul de poziţie $\bar{r}$ este o funcţie vectorială

$$\bar{r}=\bar{r}(x,y,z)$$

de parametrii $x$, $y$, $z$. Când aceştia variază în trei intervale determinate

$$x_1<x<x_2;\quad y_1<y<y_2;\quad z_1<z<z_2,$$

punctul $M$ descrie interiorul unui paralelipiped paralel cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$; mai general, când $x, y, z$ descriu un domeniu aritmetic $\Delta$, punctul $M$ descrie un domeniu geometric $D$ din spațiu.

Să presupunem că vectorul de poziție al unui punct $M$ este o funcție continuă și diferențiabilă continuu de trei parametri $u, v, w$, *a căror semnificație nu este încă precizată.* Fie $\Delta$ domeniul aritmetic în care este definită funcția $\bar{r}(u, v, w)$. Pentru ușurința înțelegerii, putem figura acest domeniu într'un spațiu reprezentativ, considerând $u, v, w$ ca fiind coordonatele unui punct $\mu(u, v, w)$ față de un reper cartezian.

*Ce descrie punctul $M$ în spațiu când $u, v, w$ variază descriind domeniul $\Delta$ și care este semnificația geometrică a acestor parametri?*

Raportând spațiul la un triedru fundamental, vom avea

$$\bar{r}(u, v, w) = x\bar{a} + yb + z\bar{c},$$

de unde deducem

$$x = x(u, v, w); \quad y = y(u, v, w); \quad z = z(u, v, w), \qquad (174,VI)$$

funcțiile $x, y, z$ fiind continue și diferențiabile continuu în $\Delta$.

Să presupunem că putem rezolva sistemul (174,VI) în raport cu $u, v, w$ obținând soluțiile

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z). \qquad (175,VI)$$

Se știe că această rezolvare este posibilă, când sunt îndeplinite condițiile *teoremei funcțiilor implicite*, și anume:

*1) funcțiile $x(u, v, w)$; $y(u, v, w)$; $z(u, v, w)$ sunt continue în $\Delta$;*

*2) derivatele lor parțiale în raport cu $u, v, w$ sunt continue în punctul $(u_0, v_0, w_0)$, unde avem*

$$x(u_0, v_0, w_0) = x_0; \quad y(u_0, v_0, w_0) = y_0; \quad z(u_0, v_0, w_0) = z_0;$$

*3) determinantul funcțional*

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0 \qquad (176,VI)$$

în $(u_0, v_0, w_0)$.

*In aceste condiții, sistemul* (174,VI) *admite un sistem de soluții de forma* (175,VI) *și numai unul, funcțiile $u(x, y, z)$; $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, fiind continue și diferențiabile în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și reducându-se pentru $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$ la valorile $u = u_0$; $v = v_0$; $w = w_0$.*

Semnificația geometrică a acestei rezolvări este următoarea: *când $\mu(u, v, w)$ descrie domeniul punctului $\mu_0(u_0, v_0, w_0)$, punctul $M$, definit prin ecuațiile* (174,VI) *descrie domeniul punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în întregime, odată și numai odată.*

In adevăr, fiind dat un punct $M'(x', y', z')$ vecin cu $M_0$, el este obținut pentru valorile lui $u, v, w$ date de formulele (175,VI), în care $x, y, z$ iau valorile $x', y', z'$, iar punctul $\mu'(u', v', w')$ este vecin cu $\mu_0$, fiindcă funcțiile sunt continue.

Ecuațiile (175,VI) pentru $u = u_0$; $v = v_0$; $w = w_0$ reprezintă trei suprafețe continue, care se intersectează în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și sunt definite în domeniul acestui punct, unde fiecare admite un plan tangent determinat.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că $J \neq 0$ în tot domeniul $\Delta$ și fie $D$ domeniul din spațiu acoperit de $M$ când $\mu$ descrie $\Delta$. Acest domeniu are trei dimensiuni, fiindcă odată cu un punct oarecare $M_0$ al său cuprinde întreg domeniul acestui punct.

Din considerațiile făcute rezultă că:

*Dacă $J \neq 0$ într'un domeniu $\Delta$, descris de $\mu(u, v, w)$, punctul $M$, al cărui vector de poziție este $\bar{r}(u, v, w)$ descrie un domeniu $D$ din spațiu.*

La fiecare sistem de valori $u, v, w$ corespunde un punct $M$, determinat de aceste valori în $D$ (fig 195, *a*). Vom numi parametrii $u$, $v$, $w$. care determină punctul $M$ în $D$, *coordonatele curbilinii* ale acestui punct.

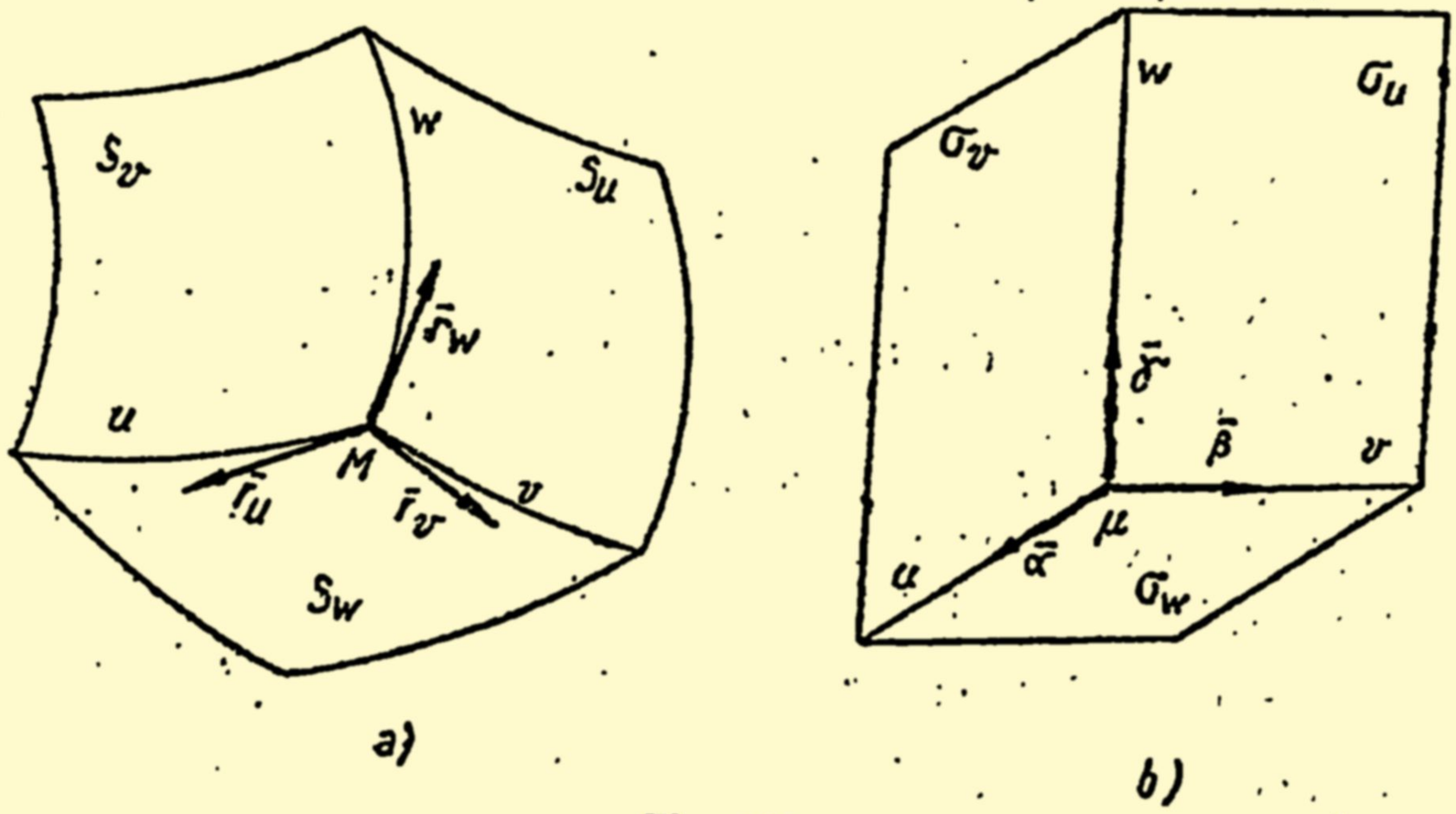



Fig. 195

Orice punct $M$ din $D$ este intersecția a trei suprafețe având ecuațiile (175,VI), în care $u, v, w$ iau valori determinate și constitue coordonatele curbilinii ale punctului. Când $u, v, w$ variază, aceste suprafețe formează trei familii distincte $S_u$, $S_v$, $S_w$, pe care le vom numi *suprafețe coordonate* sau *parametrice*.

Curbele de intersecție ale acestor suprafețe, două câte două, se vor numi *curbe coordonate* sau *parametrice*.

Să presupunem că *prin fiecare punct din $D$ trece câte o suprafață parametrică din fiecare familie și numai una;* cu alte cuvinte, la orice punct $M$ corespunde un singur punct $\mu$, deci *corespondența între domeniile $D$ și $\Delta$ este biunivocă.*

Fiind dat un vector $\bar{r} = \bar{r}(u, v, w)$ pentru care:

1) *$J \neq 0$ în $\Delta$,*

2) *corespondența între $D$ și $\Delta$, stabilită prin formulele* (174,VI) *și* (175,VI), *este biunivocă,*

vom spune că această corespondență constitue un *sistem de coordonate curbilinii propriu* în domeniul $D$. In cele ce urmează vom considera în general sisteme de coordonate proprii. [1])

Orice punct $M$ dintr'un domeniu $D$, pentru care $J \neq 0$ într'un sistem de coordonate propriu, se numește *punct ordinar*, în acest sistem de coordonate.

Punctele, în care $J \neq 0$ într'un sistem de coordonate propriu, se numesc *singulare* în acest sistem și nu aparțin lui $D$, ci frontierei sale.

[1]) Sistemele de coordonate proprii fac parte din sistemele numite *sisteme admise*. Cf. Veblen-Whitehead, loc. cit.



Scanned with OKEN Scanner

Definițiile punctelor ordinare și singulare sunt deci *dependente* de sistemul de coordonate propriu utilizat. Un punct ordinar într'un sistem de coordonate, poate fi singular în alt sistem.

Astfel, în sistemul de coordonate polare (v. § 204)

$$x=r\cos\theta\sin\varphi;\quad y=r\sin\theta\sin\varphi;\quad z=r\cos\varphi,$$

Jacobianul $J=r^2\sin\varphi$ este nul pentru orice punct de pe axa $Oz$, care deci este o linie de puncte singulare pentru sistemul de coordonate polare.

Totuși, în sistemul de coordonate cartezian

$$x=x;\quad y=y;\quad z=z,$$

care este tot un sistem de coordonate curbilinii particular, avem $J=1$ în tot spațiul și punctele axei $Oz$ sunt evident ordinare.

In primul caz, axa $Oz$ constituia frontiera domeniului $\Delta$, pe când în al doilea caz ea era formată din puncte interioare domeniului $\Delta$.

Trecerea dela un sistem de coordonate curbilinii la altul *constitue o transformare de coordonate curbilinii.*

Dacă notăm cu $u_1, v_1, w_1$ noile coordonate și cu $\Delta_1$ domeniul noului sistem de coordonate curbilinii, formulele de transformare sunt de forma

$$u=u(u_1,v_1,w_1);\quad v=v(u_1,v_1,w_1);\quad w=w(u_1,v_1,w_1).$$

Când corespondența între $\Delta$ și $\Delta_1$ este biunivocă și jacobianul

$$J_1=\frac{D(u,v,w)}{D(u_1,v_1,w_1)}\neq 0$$

în $\Delta_1$, iar funcțiile $u(u_1,v_1,w_1)$, $v(u_1,v_1,w_1)$, $w(u_1,v_1,w_1)$ sunt regulate de clasa $C^p$ cu $p\geqq 1$, spunem că transformarea este *regulată de clasa* $C^p$.

Se arată că *orice transformare regulată de clasa* $C^p$ *transformă un sistem propriu într'un sistem propriu și că punctele ordinare se transformă în puncte ordinare* (v. § 193).

Astfel, în cazul sistemelor carteziene și polare, trecerea dela un sistem cartezian la un sistem polar se face printr'o transformare regulată de clasa $C^\infty$, cu condiția de a exclude din spațiu axa $Oz$.

Aceleași observații sunt valabile dealtfel și în cazul reprezentărilor parametrice ale curbelor și suprafețelor din spațiu.

Coordonatele curbilinii $u$, $v$, $w$ sunt în spațiul reprezentativ coordonate carteziene, punctul $\mu(u,v,w)$ fiind *imaginea* punctului $M(x,y,z)$. Când $M$ descrie o suprafață coordonată, de exemplu $S_w$, punctul $\mu$ va descrie planul de ecuație $w=\text{const}$ (fig. 195, *b*). Prin urmare, imaginile suprafețelor coordonate sunt planele

$$u=\text{const};\quad v=\text{const};\quad w=\text{const},$$

paralele cu planele coordonate. In mod analog, curbele coordonate, pe care le vom nota cu $u$, $v$, $w$, și anume

$$u=(S_v,S_w);\quad v=(S_w,S_u);\quad w=(S_u,S_v).$$

Scanned with OKEN Scanner

vor avea ca imagini dreptele

$$u=\text{const};\quad v=\text{const. pentru}\quad w=(S_u, S_v);$$

$$v=\text{const};\quad w=\text{const. pentru}\quad u=(S_v, S_w);$$

$$w=\text{const};\quad u=\text{const .pentru}\quad v=(S_w, S_u).$$

*Un sistem de coordonate curbilinii este deci o corespondență univocă între un domeniu D din spațiu și un domeniu Δ dintr'un spațiu reprezentativ, în care suprafețele familiilor $S_u, S_v, S_w$ cu un parametru au ca imagini planele a trei familii de plane paralele distincte.*

*Sistemul este propriu, când corespondența este biunivocă și $J\neq 0$ în Δ.*

**Exemplu.** *Coordonatele cilindrice.* Să considerăm familia de cilindri circulari drepți (fig. 196, *a*), de ecuație

$$(S_\rho);\quad x^2+y^2=\rho^2;\quad (\rho\geqq 0),$$

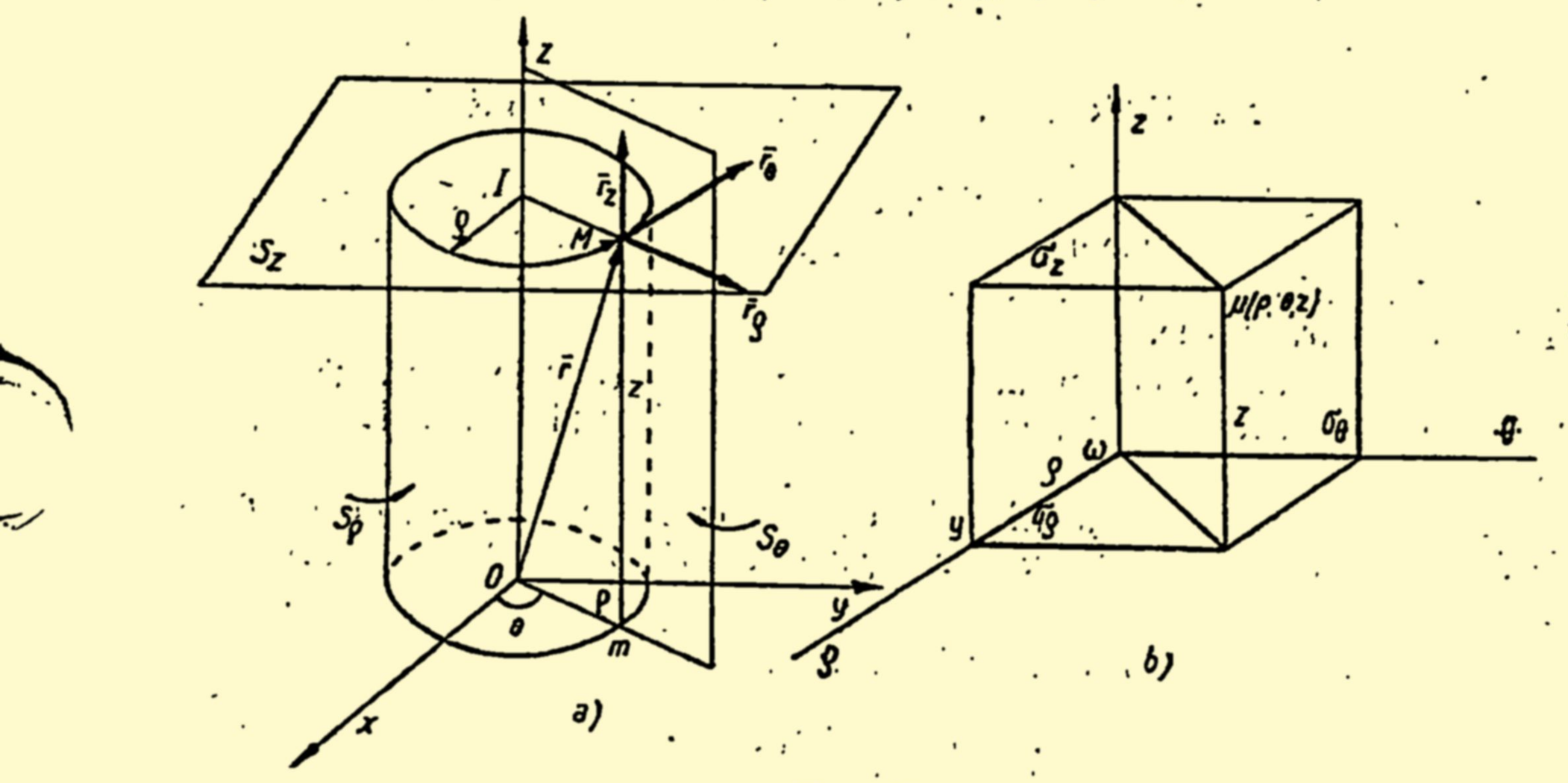



Fig. 196

familia de *semiplane* verticale, care trec prin *Oz*, făcând cu planul *zOx* unghiul θ, de ecuație

$$(S_\theta);\quad y=x\operatorname{tg}\theta;\quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

și familia de plane paralele cu planul *xOy*, de ecuație

$$(S_z);\quad z=z;\quad (-\infty<z<+\infty).$$

Prin fiecare punct din spațiu, *care nu este situat pe axa Oz*, trece câte o suprafață și numai una din fiecare familie $\rho, \theta, z=\text{const}$.

Vectorul

$$\bar{r}=\bar{r}(\rho, \theta, z)=\bar{i}_\rho\cos\theta+\bar{j}_\rho\sin\theta+\bar{k}z \qquad (177,VI)$$

descrie întreg spațiul, când punctul $\mu(\rho, \theta, z)$ descrie domeniul

$$\rho\geqq 0;\quad 0\leqq\theta<2\pi;\quad -\infty<z<+\infty$$

care este o fâșie din primul octant al spațiului reprezentativ. Punctele axei $Oz$ sunt singulare, fiindcă

$$J=\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

se anulează pentru $\rho=0$.

Vom avea

$$x=\rho\cos\theta;\quad y=\rho\sin\theta;\quad z=z;$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x};\quad z=z.$$

Sistemul de coordonate curbilinii $\rho, \theta, z$ se numește *cilindric*.

Suprafețele coordonate $S_\rho$ sunt cilindri, $S_\theta$ plane trecând prin $Oz$, iar $S_z$ plane paralele cu $xOy$.

Curbele coordonate $\rho=(S_\theta, S_z)$ sunt razele orizontale $IM$; $\theta=(S_z, S_\rho)$, cercurile orizontale $I$, $z=(S_\rho, S_\theta)$, generatoarele $Mm$ ale cilindrilor $S_\rho$. In spațiul reprezentativ, suprafețele coordonate sunt planele

$$\rho=\text{const};\quad \theta=\text{const};\quad z=\text{const},$$

iar curbele coordonate, paralelele la axele $\omega\rho$, $\omega\theta$, $\omega z$ duse prin $\mu$ $(\rho, \theta, z)$ (fig. 196, *b*).

## § 202. Sisteme de referință carteziene locale

Din punct de vedere geometric, un sistem de coordonate curbilinii determină punctele unui domeniu $D'$ din spațiu prin intersecția a trei suprafețe, generalizând astfel coordonatele carteziene, în care orice punct rezultă din intersecția a trei plane.

Din punct de vedere analitic, un sistem de coordonate curbilinii exprimă coordonatele carteziene ale punctelor $M$ dintr'un domeniu $D$, în funcție de trei parametri $u, v, w$.

Numărul acestor parametri este egal cu trei, deci cu numărul de dimensiuni ale spațiului, sau cu numărul *gradelor de libertate* ale punctului în spațiu.

Raportând vectorul $\bar r$ la un triedru $\bar a, \bar b, \bar c$ vom scrie:

$$\begin{aligned}
&\bar r=x\bar a+y\bar b+z\bar c;\\
&\bar r_u=x_u\bar a+y_u\bar b+z_u c; \qquad (178,\ VI)\\
&\bar r_v=x_v\bar a+y_v\bar b+z_u\bar c;\\
&\bar r_w=x_w\bar a+y_w\bar b+z_w\bar c,
\end{aligned}$$

astfel încât vom avea:

$$J=\frac{\bar r_u\,\bar r_v\,\bar r_w}{\bar a\,\bar b\,\bar c};\quad [\bar a\,\bar b\,\bar c]\neq 0, \qquad (178',VI)$$

cum este ușor de constatat.

Când $u$ este variabil, iar $v$ și $w$ constanți, vectorul $\bar r$ descrie curba $u$, iar vectorul $\bar r_u$ este tangent la această curbă în $M$ (fig. 195). Din (178',VI) deducem atunci: *Jacobianul sistemului de coordonate curbilinii reprezintă volumul paralelipipedului format de vectorii $\bar r_u, \bar r_v, \bar r_w$ tangenți la curbele coordonate, când unitatea de măsură este volumul $[\bar a, \bar b, \bar c]$.*

Triedrul nedegenerat, format de cei trei vectori $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ într'un punct ordinar se numeşte *sistemul de referinţă cartezian local al punctului M.*

Dând parametrilor $u, v, w$ o succesiune de valori destul de apropiate între ele, obţinem din fiecare familie $S_u, S_v, S_w$ câte un şir de suprafeţe, care compartimentează domeniul $D$ în volume destul de asemănătoare cu paralelipipedele. Ducând vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ în fiecare din vârfurile $M_1, M_2, \ldots$, fiecărui punct $M$, luat ca vârf al unuia din paralelipipedele curbilinii astfel formate, îi corespunde câte un sistem cartezian local, la care putem raporta spaţiul în vecinătatea punctului considerat (fig. 197). Dacă notăm cu $\bar{\rho}$ vectorul de poziţie al punctului $\mu(u, v, w)$ în spaţiul reprezentativ, vom putea scrie

$$d\bar{r} = \bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv + \bar{r}_w\, dw;$$
$$d\bar{\rho} = \bar{\alpha}\, du + \bar{\beta}\, dv + \bar{\gamma}\, dw. \qquad (179, VI)$$

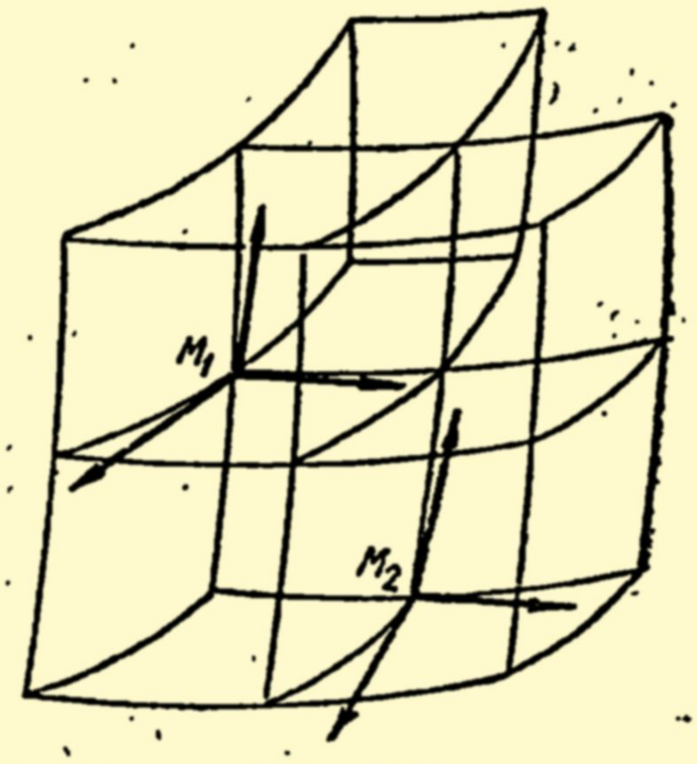


Fig. 197

Vectorul $d\bar{r}$, raportat la sistemul local $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ are *aceleaşi componente du, dv, dw* ca şi vectorul $d\rho$ faţă de sistemul $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$.

Ţinând seama de rezultatele obţinute (§ 102) relativ la sistemele carteziene, putem spune că *între vectorii $d\bar{\rho}$ şi $d\bar{r}$ există o transformare liniară, prin care vecinătatea punctului $\mu(u,v,w)$ se transformă în vecinătatea punctului M, triedrul $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ transformându-se în triedrul local $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$.*

Cu alte cuvinte, *într'un sistem de coordonate curbilinii, deşi nu există un triedru fundamental, în fiecare punct M al domeniului D există un triedru de referinţă local, la care se raportează vecinătatea punctului prin vectorii elementari $d\bar{r}$.* Este, ca şi cum, fiecare din compartimentele arbitrar de mici, în care am împărţit domeniul, ar fi organizat autonom, cu sistemul său de referinţă, ca un adevărat spaţiu afin.

Fiecare din aceste sisteme locale este determinat de un sistem de coordonate curbilinii. Când trecem dela un sistem de coordonate la altul, sistemul local se transformă în alt sistem cartezian local. Vectorul $d\bar{r}$ este independent de orice sistem de referinţă, dar are componente diferite în fiecare sistem local. Aceste componente se vor transforma unele în altele prin formulele de transformare (157, III), vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ vor forma o bază, iar componentele $du$, $dv$, $dw$ vor fi contravariante. Dacă suprafeţele coordonate se taie ortogonal într'un punct $M$, vom avea

$$\bar{r}_u \bar{r}_v = 0; \quad \bar{r}_v \bar{r}_w = 0; \quad \bar{r}_w \bar{r}_u = 0 \qquad (180, VI)$$

şi sistemul local va fi *ortogonal.*

Când sistemul local este ortogonal în fiecare punct al domeniului $D$, spunem că acesta este raportat la un *sistem de coordonate curbilinii ortogonal.*

Formulele de trecere dela sistemul cartezian $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, la care este raportat întreg spaţiul, la sistemul local cartezian, la care este raportată vecinătatea unui punct oarecare $M$, sunt date de (178, VI), care exprimă $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ în funcţie de $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Aceste formule se inversează ușor, fie prin rezolvarea în raport cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ a sistemului (178, VI), ținând seama că $J \neq 0$, fie pornind dela expresia vectorului de poziție

$$\bar{r} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$$

și observând că avem

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x}; \quad \bar{b} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y}; \quad \bar{c} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z},$$

considerând pe $\bar{r}$ ca funcție compusă de $x, y, z$ prin $u, v, w$. Efectuând derivatele, obținem, de exemplu,

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = u_x \bar{r}_u + v_x \bar{r}_v + w_x \bar{r}_w,$$

deci formulele căutate vor fi:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= u_x \bar{r}_u + v_x \bar{r}_v + w_x \bar{r}_w; \\ \bar{b} &= u_y \bar{r}_u + v_y \bar{r}_v + w_y \bar{r}_w; \\ \bar{c} &= u_z \bar{r}_u + v_z \bar{r}_v + w_z \bar{r}_w. \end{aligned} \qquad (181, VI)$$

Cu aceste formule putem exprima vectorul de poziție $\bar{r}$, raportat la sistemul local al punctului $M$.

Toate componentele, atât în formulele (178,VI), cât și în (181,VI), se modifică, dacă se aleg baze formate din versori, înmulțindu-se cu factori ușor de determinat.

Să presupunem, în particular, spațiul raportat la triedrul ortogonal $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ și să notăm prin $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$ versorii

$$\bar{e}_u = \frac{\bar{r}_u}{|\bar{r}_u|}; \quad \bar{e}_v = \frac{\bar{r}_v}{|\bar{r}_v|}; \quad \bar{e}_w = \frac{\bar{r}_w}{|\bar{r}_w|}.$$

Din formulele (178,VI) și (181,VI) vom deduce

$$\bar{e}_u = \frac{x_u}{|\bar{r}_u|}\bar{i} + \frac{y_u}{|r_u|}\bar{j} + \frac{z_u}{|\bar{r}_u|}\bar{k}, \text{ etc.}$$

deci, rezolvând în raport cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vom avea:

$$\bar{i} = |\bar{r}_u| u_x \bar{e}_u + |\bar{r}_v| v_x \bar{e}_v + |\bar{r}_w| w_x \bar{e}_w, \text{ etc.}$$

In cazul când ambele sisteme sunt ortogonale, formulele vor fi conform cu (58, III):

| | $\bar{e}_u$ | $\bar{e}_v$ | $\bar{e}_w$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{i}$ | $\frac{x_u}{\lvert\bar{r}_u\rvert}$ | $\frac{x_v}{\lvert\bar{r}_v\rvert}$ | $\frac{x_w}{\lvert\bar{r}_w\rvert}$ |
| $\bar{j}$ | $\frac{y_u}{\lvert\bar{r}_u\rvert}$ | $\frac{y_v}{\lvert\bar{r}_v\rvert}$ | $\frac{y_w}{\lvert\bar{r}_w\rvert}$ |
| $\bar{k}$ | $\frac{z_u}{\lvert\bar{r}_u\rvert}$ | $\frac{z_v}{\lvert\bar{r}_v\rvert}$ | $\frac{z_w}{\lvert\bar{r}_w\rvert}$ |

Scanned with OKEN Scanner

**Exemplu:** *Vectorul de poziție în coordonate cilindrice.* Sistemul fundamental al spațiului fiind $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, vom avea

$$\bar{r}=\bar{i}\,\rho\cos\theta+\bar{j}\,\rho\sin\theta+\bar{k}\,z,$$

de unde

$$\bar{r}_\rho=\bar{i}\cos\theta+\bar{j}\sin\theta;$$

$$\bar{r}_\theta=-\bar{i}\,\rho\sin\theta+\bar{j}\,\rho\cos\theta;$$

$$\bar{r}_z=\bar{k}.$$

Aceste formule fac trecerea dela $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ la sistemul local $\bar{r}_\rho$, $\bar{r}_\theta$, $r_z$. Trecerea inversă se face prin rezolvare directă, obținând formulele

$$\bar{i}=\bar{r}_\rho\cos\theta-\frac{\bar{r}_\theta}{\rho}\sin\theta;$$

$$\bar{j}=\bar{r}_\rho\sin\theta+\frac{\bar{r}_\theta}{\rho}\cos\theta;$$

$$\bar{k}=\bar{r}_z.$$

Înlocuind $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ în expresia lui $\bar{r}$, vom avea

$$\bar{r}=\rho\,\bar{r}_\rho+z\bar{r}_z.$$

Este ușor de verificat că $\bar{r}_\rho$, $\frac{\bar{r}_\theta}{\rho}$, $\bar{r}_z$ sunt versori. Triedrul local al punctului $M$, (fig. 196) are muchiile $\bar{r}_\rho$, $\bar{r}_\theta$ orizontale și este ortogonal.

## § 203. Baze reciproce în spațiul local. Gradient

Introducerea sistemelor de coordonate curbilinii în spațiu pune în evidență posibilitatea și chiar necesitatea, de a se considera fiecare vecinătate a unui punct al spațiului ca un spațiu, raportat la un reper cartezian local.

Fenomenele fizice rezultând din acțiuni ce se transmit din aproape în aproape, relațiile fizice diferențiale se stabilesc între mărimi asociate particulelor, deci unor porțiuni elementare ale mediilor fizice. Deaceea, vecinătatea unui punct oarecare joacă un rol important în stabilirea acestor relații, iar introducerea sistemelor de referință locale permite folosirea metodelor geometrice, în particular a metodelor vectoriale, în cercetarea fenomenelor elementare, care au loc în vecinătatea unui punct material.

Vom spune că vecinătatea unui punct $M$ constitue *spațiul local* al acestui punct, iar *mărimile fizice asociate particulei cu centrul în M vor fi considerate ca aparținând acestui spațiu local.* De exemplu, viteza și accelerația unui punct material vor fi doi vectori din spațiul local al punctului, masa și sarcina electrică vor fi doi scalari din acest spațiu, etc. [1])

Fiecare sistem de coordonate curbiliniu din spațiu *induce* în spațiul local un sistem de coordonate cartezian, format de $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$. Prin aceasta înțelegem că, fiind dat sistemul de coordonate curbilinii considerat, triedrul determinat de vectorii $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$, tangenți liniilor coordonate într'un punct $M$, constitue un sistem de referință local, determinat chiar de sistemul de coordonate curbilinii.

[1]) Mai precis, spațiul local al punctului $M$ este un spațiu aritmetic reprezentativ, format de mulțimea vectorilor elementari $d\bar{r}$, legați de punctul $M$.

Bază $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ admite o bază reciprocă, pe care o vom nota prin $\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}'_w$. Vom avea

$$\bar{r}'_u = \frac{\bar{r}_v \times \bar{r}_w}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w}; \quad r_v = \frac{\bar{r}_w \times \bar{r}_u}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w}; \quad \bar{r}'_w = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w}. \qquad (182, VI)$$

Din relațiile (178,VI) deducem

$$\bar{r}_v \times \bar{r}_w = \begin{vmatrix} \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}, \text{ etc.},$$

folosind expresia produsului vectorial raportat la axe oarecare. Ținând seama de (178',VI) vom avea deci:

$$\bar{r}'_u = \frac{\bar{r}_v \times \bar{r}_w}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w} = \frac{1}{J}\left[\begin{vmatrix} y_v & z_v \\ y_w & z_w \end{vmatrix} \bar{a}' + \begin{vmatrix} z_v & x_v \\ z_w & x_w \end{vmatrix} \bar{b}' + \begin{vmatrix} x_v & y_v \\ x_w & y_w \end{vmatrix} \bar{c}'\right].$$

In același timp, din formulele (181, VI), deducem că matricele

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{Vmatrix}$$

sunt inverse una alteia, deoarece aceste formule (181, VI) se obțin prin rezolvarea sistemului (178, VI) în raport cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Cum determinantul primei matrici este $J$, vom avea

$$u_x = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} y_v & z_v \\ y_w & z_w \end{vmatrix}; \quad u_y = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} z_v & x_v \\ z_w & x_w \end{vmatrix}; \quad u_z = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} x_v & y_v \\ x_w & y_w \end{vmatrix}, \qquad (183, VI)$$

de unde:

$$\bar{r}'_u = u_x \bar{a}' + u_y \bar{b}' + u_z \bar{c}'. \qquad (183', VI)$$

*Componentele vectorului $\bar{r}'_u$ față de baza $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$, reciprocă bazei $a, \bar{b}, \bar{c}$, sunt derivatele parțiale ale funcției $u\,(x, y, z)$. Aceste componente sunt covariante.*

Vom numi *gradient* al funcției scalare $u\,(x, y, z)$ vectorul

$$\text{grad}\, u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{a}' + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{b}' + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{c}', \qquad (184, VI)$$

definit prin componentele sale covariante față de o bază $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Vom putea atunci spune: *Baza reciprocă bazei $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$, în spațiul local al unui punct M, este formată de gradienții funcțiilor $u\,(x, y, z)$; $v\,(x, y, z)$; $w\,(x, y, z)$.*

Vom avea formulele

Scanned with OKEN Scanner

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\bar{r}_v \times \bar{r}_w}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w} = \bar{r}'_u; \quad \nabla v = \operatorname{grad} v = \frac{\bar{r}_w \times \bar{r}_u}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w} = \bar{r}'_v;$$

$$\nabla w = \operatorname{grad} w = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w} = \bar{r}'_w. \qquad (185, VI)$$

$$\nabla u \nabla v \nabla w = \frac{1}{\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \bar{a}' \bar{b}' \bar{c}' = J^{-1} \bar{a}' \bar{b}' \bar{c}'.$$

Notația $\nabla$, utilizată în aplicațiile fizice, pune în evidență caracterul de operator al acestui simbol. Vom scrie

$$\nabla u = \left( \bar{a}' \frac{\partial}{\partial x} + b' \frac{\partial}{\partial y} + \bar{c}' \frac{\partial}{\partial z} \right) u. \qquad (186, VI)$$

și vom numi simbolul $\nabla$ *operator nabla.*

Dacă baza $\bar{a}$, $b$, $\bar{c}$, este formată din trei versori ortogonali $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, vom avea

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left( \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u. \qquad (186'VI)$$

Vectorul grad $w$, fiind perpendicular pe $\bar{r}_u$ și $\bar{r}_v$, va fi normal la suprafața coordonată $S_w$, deci: *baza reciprocă triedrului local* $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$ *este formată cu vectorii* $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$, $\bar{r}'_w$ *normali la suprafețele coordonate;* deci cu grad $u$, grad $v$, grad $w$.

Nu trebue însă uitat că $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ reprezintă componentele covariante ale vectorului grad $u$, deci sunt coordonatele elementului plan, tangent la suprafața $u(x, y, z) = \text{const}$, în punctul $M$.

In coordonate carteziene ortogonale componentele covariante și contravariante fiind confundate, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ reprezintă componentele normalei la suprafața $u = \text{const}$.

Dacă sistemul de coordonate curbilinii este ortogonal, vectorii grad $u$, grad $v$, grad $w$, vor avea direcțiile vectorilor $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$, dar, în general, nu vor fi egali cu aceşti vectori, deoarece $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$ nu sunt versori.

Dacă notăm cu $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$, $\bar{e}_w$ versorii ortogonali

$$\bar{e}_u = \frac{\bar{r}_u}{|\bar{r}_u|}; \quad \bar{e}_v = \frac{\bar{r}_v}{|\bar{r}_v|}; \quad \bar{e}_w = \frac{\bar{r}_w}{|\bar{r}_w|},$$

vom avea în acest caz

$$\nabla u = \frac{\bar{e}_u}{|\bar{r}_u|}; \quad \nabla v = \frac{\bar{e}_v}{|\bar{r}_v|}; \quad \nabla w = \frac{\bar{e}_w}{|\bar{r}_w|}; \qquad (187, VI)$$

$$\bar{r}_u = |\bar{r}_u| \bar{e}_u; \quad \bar{r}_v = |\bar{r}_v| \bar{e}_v; \quad \bar{r}_w = |\bar{r}_w| \bar{e}_w.$$

Scanned with OKEN Scanner

## § 204. Elementul de volum și elementul liniar al spațiului

In spațiul local al fiecărui punct $M$, toate mărimile fiind legate de $M$, vor fi constante, astfel încât vom putea aplica regulile Algebrei vectoriale, obținând rezultate *valabile în punctul M*.

Spațiul local poate fi considerat ca făcând parte dintr'un spațiu euclidian, care are comun cu domeniul $D$ vecinătatea $V_\epsilon(M)$ a punctului $M$, cu o eroare care poate fi făcută mai mică decât orice $\epsilon > 0$.

Vom putea face în acest spațiu geometrie, calculând elementul său de volum și folosind în acest scop triedrul fundamental $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$. Deoarece vecinătatea lui $M$ este comună cu $D$, vom putea considera elementul de volum al spațiului local ca element de volum al spațiului în coordonate curbilinii.

*Acest element va fi dat de volumul paralelipipedului elementar, format de vectorii liniar independenți* $\bar{r}_u\,du, \bar{r}_v\,dv, \bar{r}_w\,dw$. Vom avea

$$d\omega = (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w)\,du\,dv\,dw \qquad (188,VI)$$

în spațiul local. Cum volumul paralelipipedului curb din spațiu diferă de volumul paralelipipedului $\bar{r}_u\,du, \bar{r}_v\,dv, \bar{r}_w\,dw$ printr'un termen de forma $\epsilon\,du\,dv\,dw$, $\epsilon$ putând fi făcut oricât de mic printr'o compartimentare convenabilă, vom putea lua ca element de volum al spațiului mărimea (188,VI). Din (179,VI) deducem

$$d\omega = J[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]\,du\,du\,dw = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})\,du\,dv\,dw. \qquad (188'VI)$$

*Elementul de volum este orientat.* Dacă orientarea triedrelor $\bar{a}, b, \bar{c}$ și $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ este aceeași, vom avea $J > 0$ și semnul volumului va depinde de $du\,dv\,dw$, deci de deplasările elementare pe curbele coordonate.

Putem oricând schimba numele parametrilor între ei pentru a avea într'un punct $M$ un triedru local pozitiv. *Prin deplasarea acestui triedru dealungul unei curbe din spațiu, care nu trece prin niciun punct singular,* $(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w)$ *își păstrează semnul, și orientarea triedrului local nu se schimbă.*

Putem deci spune că *domeniul D de existență al unui sistem de coordonate curbilinii propriu are aceeași orientare în toate punctele interioare.*

Facem observația că expresia elementului de volum poate fi calculată și cu alți vectori din spațiul local. Fie

$$d_k\bar{r} = \bar{r}_u d_k u + \bar{r}_v d_k v + \bar{r}_w d_k w; \qquad (k = 1,2,3)$$

trei vectori elementari având direcții determinate în $M$. Volumul paralelipipedului format de $d_1\bar{r}$, $d_2\bar{r}$, $d_3\bar{r}$ va avea expresia

$$d\omega = (d_1\bar{r},\ d_2\bar{r},\ d_3\bar{r}) = \begin{vmatrix} d_1u & d_2u & d_3u \\ d_1v & d_2v & d_3v \\ d_1w & d_2w & d_3w \end{vmatrix} (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w) \qquad (189,VI)$$

și va putea fi considerat ca element de volum al spațiului. Acest element este independent de sistemul de coordonate curbilinii utilizat, deși expresia sa (189,VI) depinde de acest sistem. Este ușor de verificat că (189,VI) se reduce la (188,VI) pentru deplasări dealungul curbelor coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

In general, volumul $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ este considerat ca unitar, astfel încât în formula (188,VI) vom putea lua $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=1$; totuși factorul $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ nu poate fi neglijat, deoarece în spațiul afin schimbarea bazei nu lasă invariant elementul de volum.

Pentru a calcula volumul unei porțiuni finite din domeniul $D$ va fi necesară însumarea volumelor elementare printr'o integrală de volum, în care elementul $d\omega$ va avea una din expresiile (188,VI) sau (188'VI).

Considerațiile făcute până în prezent nu presupun spațiul local înzestrat cu un mijloc de măsură a lungimilor, deși în cele ce precedă am folosit structura euclidiană a spațiului, utilizând versorii. Putem considera tot atât de bine un spațiu afin. *Coordonatele curbilinii, deasemenea, nu presupun spațiul înzestrat cu o metrică.*

Vom putea introduce măsura lungimilor începând din spațiile locale, în care vom considera ca distanță între punctul $M$ și un punct vecin $M'$ *norma* vectorului $\overline{MM'}$ sau pătratul său scalar:

$$ds^2=d\bar{r}\,d\bar{r}=d\bar{r}^2\,; \qquad (190,VI)$$

$$d\bar{r}=\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv+\bar{r}_w dw.$$

Vom avea deci

$$ds^2=d\bar{r}^2=(\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv+\bar{r}_w dw)^2.$$

Notând pentru ușurință

$$\left.\begin{aligned} &\bar{r}_u^2=H_1;\quad \bar{r}_v^2=H_2;\quad \bar{r}_w^2=H_3;\\ &\bar{r}_v\bar{r}_w=F_1;\quad \bar{r}_w\bar{r}_u=F_2;\quad \bar{r}_u\bar{r}_v=F_3, \end{aligned}\right\} \qquad (191,VI)$$

expresia lui $ds^2$ va deveni

$$ds^2=H_1du^2+H_2dv^2+H_3dw^2+2F_1dv\,dw+2F_2dw\,du+2F_3du\,dv. \qquad (192,VI)$$

Astfel, *în spațiul local, măsura unei distanțe elementare se face cu ajutorul unei forme pătratice, în care variabilele sunt du, dv, dw*, deci componentele vectorului $d\bar{r}$ față de triedrul fundamental $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$.

In consecință, *putem aplica în domeniul punctului M metodele folosite în Geometrie când raportăm spațiul la un sistem cartezian oarecare* (§ 99).

Forma pătratică (192,VI) va fi *forma metrică fundamentală a spațiului*. In spațiul local, ea poate servi la măsura lungimii oricărui vector, înlocuind *du, dv, dw* prin componentele respective.

Vom numi expresia $ds^2$ *elementul liniar al spațiului în coordonate curbilinii.*

Putem exprima și elementul de volum cu ajutorul coeficienților formei metrice fundamentale. Folosind determinantul lui Gram (78,II), vom avea

$$(\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_w)^2=\begin{vmatrix} \bar{r}_u\bar{r}_u & \bar{r}_u\bar{r}_v & \bar{r}_u\bar{r}_w\\ \bar{r}_v\bar{r}_u & \bar{r}_v\bar{r}_v & \bar{r}_v\bar{r}\\ \bar{r}_w\bar{r}_u & \bar{r}_w\bar{r}_v & \bar{r}_w\bar{r}_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2\\ F_3 & H_2 & F_1\\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}=M. \qquad (193,VI)$$

Deci, elementul de volum va fi

$$d\omega=\sqrt{M}\,du\,dv\,dw. \qquad (193'VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul sistemelor ortogonale, din condițiile de ortogonalitate (180,VI) deducem

$$F_1=0;\quad F_2=0;\quad F_3=0.$$

Elementul liniar ia atunci forma:

$$ds^2=H_1du^2+H_2dv^2+H_3dw^2, \tag{194,VI}$$

analoagă expresiei sale în coordonate carteziene ortogonale, iar elementul de volum devine

$$d\omega=\sqrt{H_1H_2H_3}\,du\,dv\,dw. \tag{195,VI}$$

**Exemplu:** *Coordonatele polare în spațiu.* Luând ca familii de suprafețe:

sferele $x^2+y^2+z^2=r^2$; $r\geq 0$;

semiconurile $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\varphi=0$; $0\leq\varphi\leq\pi$;

semiplanele $y=x\operatorname{tg}\theta$; $0\leq\theta<2\pi$,

obținem sistemul de coordonate curbilinii propriu

$$\left.\begin{aligned} &x=r\cos\theta\sin\varphi;\ y=r\sin\theta\sin\varphi;\ z=r\cos\varphi\\ &\bar r=r(\bar i\cos\theta\sin\varphi+\bar j\sin\theta\sin\varphi+\bar k\cos\varphi)\\ &\bar r_r=\bar i\cos\theta\sin\varphi+\bar j\sin\theta\sin\varphi+\bar k\cos\varphi\\ &\bar r_\varphi=r(\bar i\cos\theta\cos\varphi+\bar j\sin\theta\cos\varphi-\bar k\sin\varphi)\\ &\bar r_\theta=r(-\bar i\sin\theta\sin\varphi+\bar j\cos\theta\sin\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{196,VI}$$

$$ds^2=(\bar r_r dr+\bar r_\varphi d\varphi+\bar r_\theta d\theta)^2=dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi d\theta^2. \tag{197,VI}$$

Sistemul de coordonate polare este ortogonal

$$H_1=1;\quad H_2=r^2;\quad H_3=r^2\sin^2\varphi.$$

Ordinea parametrilor este $r,\varphi,\theta$ pentru ca triedrele locale să fie pozitive.

Aplicând formula (195,VI), elementul de volum va fi:

$$d\omega=r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta, \tag{198,VI}$$

iar Jacobianul transformării (196,VI)

$$J=r^2\sin\varphi.$$

Punctele singulare fiind pe axa $Oz$, sistemul de coordonate polare are ca domeniu întreg spațiul; din care se extrage această axă.

Transformarea inversă este

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z};\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Notând cu $\bar e_r$, $\bar e_\varphi$, $\bar e_\theta$ versorii axelor triedrului local, vom avea

$$\bar e_r=\frac{\bar r_r}{|\bar r_r|}=\bar r_r;\quad \bar e_\varphi=\frac{\bar r_\varphi}{|\bar r_\varphi|}=\frac{1}{r}\bar r_\varphi;\quad \bar e_\theta=\frac{\bar r_\theta}{|\bar r_\theta|}=\frac{1}{r\sin\varphi}\bar r_\theta.$$

Aplicând formulele (192,VI) obținem:

$$\nabla r=\bar r_r=\frac{\bar r}{r};\quad \nabla\varphi=\frac{1}{r^2}\bar r_\varphi;\quad \nabla\theta=\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\bar r_\theta, \tag{199,VI}$$

deci vectorii normali la suprafețele coordonate în $M$.

Scanned with OKEN Scanner

## § 205. Coordonate curbilinii în notația tensorială

Folosind notația tensorială, formulele capătă un aspect simetric și sunt susceptibile de generalizare la spații cu $n$ dimensiuni. Această notație introdusă de Riemann (fără însă a plasa indicii sus și jos) se aplică în Geometria spațiilor riemanniene, în Mecanică, Relativitate, etc.

Parametrii vor fi notați, de exemplu, cu $u^1, u^2, u^3$ sau $q^1, q^2, q^3$, etc. Vectorul de poziție va fi deci

$$\bar{r}=\bar{r}(u^1,u^2,u^3)=x^1\bar{a}_1+x^2\bar{a}_2+x^3\bar{a}_3.$$

Formulele (174,VI) și (175,VI), care dau transformările de coordonate, se scriu condensat:

$$x^i=x^i(u^1,u^2,u^3);\quad u^i=u^i(x^1,x^2,x^3),$$

Jacobianul fiind

$$J=\frac{D(x^1,x^2,x^3)}{D(u^1,u^2,u^3)}.$$

Vom pune deasemenea

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r}_1=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1};\ \bar{r}_2=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2};\ \bar{r}_3=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3};\quad \bar{r}_i=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^i};\\ &d\bar{r}=\bar{r}_1du^1+\bar{r}_2du^2+\bar{r}_3du^3=\bar{r}_kdu^k,\ (k=1,2,3),\end{aligned}\right\}\quad (200,VI)$$

suprimând semnul sumă.

Derivatele parțiale $x_u, x_v, x_w$, etc. vor fi notate condensat $\frac{\partial x^i}{\partial u^k}$, $\frac{\partial u^i}{\partial x^k}$, astfel încât formulele (178,VI) și (181,VI) devin

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r}_k=\frac{\partial x^1}{\partial u^k}\bar{a}_1+\frac{\partial x^2}{\partial u^k}\bar{a}_2+\frac{\partial x^3}{\partial u^k}\bar{a}_3=\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\bar{a}_i;\\ &\bar{a}_k=\frac{\partial u^1}{\partial x^k}\bar{r}_1+\frac{\partial u^2}{\partial x^k}\bar{r}_2+\frac{\partial u^3}{\partial x^k}\bar{r}_3=\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\bar{r}_i.\end{aligned}\right\}\quad (201,VI)$$

Baza reciprocă lui $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ va fi notată $\bar{r}^1, \bar{r}^2, \bar{r}^3$ și vom avea, în virtutea formulelor (182,VI),

$$\bar{r}^1=\frac{\bar{r}_2\times\bar{r}_3}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3};\quad \bar{r}^2=\frac{\bar{r}_3\times\bar{r}_1}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3};\quad \bar{r}^3=\frac{\bar{r}_1\times\bar{r}_2}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3}.$$

Raportând baza reciprocă $\bar{r}^1, \bar{r}^2, \bar{r}^3$ la baza $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3$, reciprocă bazei $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, vom avea (183′,VI),

$$\bar{r}^k=\frac{\partial u^k}{\partial x^1}\bar{a}^1+\frac{\partial u^k}{\partial x^2}\bar{a}^2+\frac{\partial u^k}{\partial x^3}\bar{a}^3=\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\bar{a}^i.$$

Ținând seama de formulele (184,VI), vom scrie deci

$$\operatorname{grad}u^k=\nabla u^k=\bar{r}^k=\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\bar{a}^i.\qquad (202,VI)$$

Din formulele (201,VI) și (202,VI) deducem

$$(\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3)=J(\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3);\quad (\bar{r}^1\bar{r}^2\bar{r}^3)=J^{-1}(\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{a}^3),$$

deoarece avem

$$J=\frac{D(x^1,x^2,x^3)}{D(u^1,u^2,u^3)}\quad J^{-1}=\frac{D(u^1,u^2,u^3)}{D(x^1,x^2,x^3)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Operatorul *nabla*, dat de (186,VI), se scrie

$$\nabla u=\left(\bar{a}^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\bar{a}^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\bar{a}^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)u=\left(\bar{a}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)u. \qquad (203,VI)$$

Elementul de volum, exprimat prin formula (188,VI), devine

$$d\omega=(\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3)\,du^1du^2du^3. \qquad (204,VI)$$

Calitățile notației tensoriale devin evidente odată cu introducerea elementului liniar. Vom înlocui notațiile (191,VI) prin

$$\bar{r}_1\bar{r}_1=g_{11},\ \bar{r}_1\bar{r}_2=g_{12},\ \ldots\ \bar{r}_i\bar{r}_j=g_{ij};\quad (i,j=1,2,3) \qquad (205,VI)$$

Cu această notație, elementul liniar $ds^2$ se scrie

$$ds^2=d\bar{r}^2=(\bar{r}_k du^k)^2=(\bar{r}_i du^i)(\bar{r}_j du^j)=\bar{r}_i\bar{r}_j du^i du^j.$$

Expresiile condensate înlocuesc produsul

$$(\bar{r}_1du^1+\bar{r}_2du^2+\bar{r}_3du^3)(\bar{r}_1du^1+\bar{r}_2du^2+\bar{r}_3du^3).$$

Vom regăsi toți termenii dând lui $i$ și $j$ toate valorile 1, 2, 3. Când $i$ și $j$ sunt diferiți, vom obține doi termeni $\bar{r}_i\bar{r}_j du^i du^j$ și $\bar{r}_j\bar{r}_i du^j du^i$, care sunt egali. În produsul efectuat ei vor da termenul $2\bar{r}_i\bar{r}_j du^i du^j$. Ținând seama de notația făcută, (a se vedea deasemenea § 99), elementul liniar se va scrie

$$ds^2=g_{ij}du^i du^j, \qquad (206,VI)$$

membrul al doilea fiind o sumă dublă, în care indicii iau valorile 1, 2, 3. Se pune astfel în evidență forma pătratică fundamentală $g_{ij}du^i du^j$.

Pentru calculul elementului de volum vom folosi formula (193,VI)

$$(\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3)^2=\begin{vmatrix} g_{11}g_{12}g_{13}\\ g_{21}g_{22}g_{23}\\ g_{31}g_{32}g_{33}\end{vmatrix}=g. \qquad (207,VI)$$

Cum din definiția (205,VI) a coeficienților $g_{ij}$ rezultă că

$$g_{ij}=g_{ji},$$

determinantul $g$ va fi simetric, iar *forma pătratică fundamentală va fi deasemenea simetrică.*

Fiindcă putem oricând permuta doi parametri între ei, produsul mixt $\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3$ poate fi considerat pozitiv, deci $g>0$. În orice caz, deoarece acest determinant este discriminantul formei $g_{ij}du^i du^j$, aceasta va fi *nesingulară*. Totodată, cum $ds^2$ reprezintă pătratul modulului unui vector în spațiul local al punctului $M$, această formă va fi *pozitiv definită.*

Elementul de volum va avea o expresie simplă

$$d\omega=\sqrt{g}\,du^1du^2du^3. \qquad (208,VI)$$

Dacă notăm cu $g^{ji}$ minorul normalizat al elementului $g_{ij}$ din determinantul $g$ (179,III), vom avea

$$g^{ji}=g^{ij}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Intre elementele $g_{ij}$ şi $g^{jk}$ vor avea loc relaţiile cunoscute

$$g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j;\quad g^{ik}g_{kj}=\delta_j^i \tag{209,VI}$$

şi vom deduce, conform cu rezultatele stabilite anterior:

$$\bar{r}^j=g^{ij}\bar{r}_j;\quad \bar{r}_i=g_{ij}\bar{r}^j;\quad g^{ij}=\bar{r}^i\bar{r}^j;$$

$$(\bar{r}^1\bar{r}^2\bar{r}^3)^2=\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{vmatrix}=g^{-1}, \tag{210,VI}$$

deoarece

$$(\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3)(\bar{r}^1\bar{r}^2\bar{r}^3)=1.$$

Orice vector din punctul $M$ va avea componente contravariante şi covariante, trecerea dela unele la celelalte făcându-se cu ajutorul formulelor

$$V_i=g_{ij}V^j;\quad V^i=g^{ij}V_j. \tag{211,VI}$$

Dacă, în particular, presupunem că sistemul de coordonate carteziene $x^1, x^2, x^3$ este ortogonal, coeficienţii formei fundamentale se pot calcula simplu.

In adevăr, să presupunem că $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ sunt trei versori ortogonali. In acest caz, reciprocii $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3$ vor fi chiar aceşti versori. Din formulele (201,VI) şi (205,VI) vom deduce

$$\bar{r}_i\bar{r}_j=\left(\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\bar{a}_k\right)\left(\frac{\partial x^l}{\partial u^j}\bar{a}_l\right)=\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^l}{\partial u^j}\bar{a}_k\bar{a}_l.$$

Cum însă

$$\bar{a}_k\bar{a}_l=\delta_{kl}=\begin{cases}0, & k\neq l;\\ 1, & k=l,\end{cases} \tag{212,VI}$$

unde $\delta_{kl}$ este simbolul lui Kronecker, vom avea

$$g_{ij}=r_i\bar{r}_j=\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j}=\frac{\partial x^1}{\partial u^i}\frac{\partial x^1}{\partial u^j}+\frac{\partial x^2}{\partial u^i}\frac{\partial x^2}{\partial u^j}+\frac{\partial x^3}{\partial u^i}\frac{\partial x^3}{\partial u^j} \tag{213,VI}$$

Deasemenea, din formulele (202,VI) şi (210,VI) vom deduce

$$\bar{r}^i\bar{r}^j=\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\bar{a}^k\right)\left(\frac{\partial u^j}{\partial x^l}\bar{a}^l\right)=\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^j}{\partial x^l}\bar{a}^k\bar{a}^l.$$

Folosind aceleaşi relaţii de ortogonalitate (212,VI), fiindcă $\bar{a}^k=\bar{a}_k$, vom avea

$$g^{ij}=\bar{r}^i\bar{r}^j=\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^j}{\partial x^k}=\frac{\partial u^i}{\partial x^1}\frac{\partial u^j}{\partial x^1}+\frac{\partial u^i}{\partial x^2}\frac{\partial u^j}{\partial x^2}+\frac{\partial u^i}{\partial x^3}\frac{\partial u^j}{\partial x^3}. \tag{214,VI}$$

Facem observaţia că $g^{ij}$ *se obţin din* $g_{ij}$ *înlocuindu-se literele* $x^i$ *prin* $u^i$ *şi reciproc*, ceeace constitue un exemplu de avantajele pe care le prezintă notaţia tensorială în formulele teoretice. Dealtfel, această observaţie apare din momentul întroducerii Jacobianului, fiindcă

$$\frac{D(x^1,x^2,x^3)}{D(u^1,u^2,u^3)}=\frac{1}{\dfrac{D(u^1,u^2,u^3)}{D(x^1,x^2,x^3)}}$$

Scanned with OKEN Scanner

și se explică prin faptul că matricele respective sunt inverse una alteia, conform cu formulele (183,VI).

Deplasările dealungul liniilor coordonate, care se obțin lăsând să varieze numai una din coordonatele curbilinii, vor avea expresiile

$$d_1\bar{r}=\bar{r}_1du^1;\quad d_2\bar{r}=\bar{r}_2du^2;\quad d_3\bar{r}=\bar{r}_3du^3.$$

Elementele liniare corespunzătoare vor fi

$$ds_1=\sqrt{g_{11}}du^1;\quad ds_2=\sqrt{g_{22}}du^2;\quad ds_3=\sqrt{g_{33}}du^3,$$

astfel încât, în spațiul local aceste deplasări vor avea în baza $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ componentele contravariante

$$d_1\bar{r}\equiv\{\sqrt{g_{11}}du^1,0,0\};\quad d_2\bar{r}\equiv\{0,\sqrt{g_{22}}du^2,0\};\quad d_3\bar{r}\equiv\{0,0,\sqrt{g_{33}}du^3\}.$$

Vectorii unitari ai axelor vor fi

$$\bar{e}_1=\frac{\bar{r}_1}{\sqrt{g_{11}}};\quad \bar{e}_2=\frac{\bar{r}_2}{\sqrt{g_{22}}};\quad \bar{e}_3=\frac{\bar{r}_3}{\sqrt{g_{33}}}. \qquad (215,VI)$$

Când sistemul de coordonate curbilinii este ortogonal, vom avea

$$\bar{r}_i\bar{r}_j=g_{ij}=0 \text{ pentru } i\neq j.$$

Această condiție poate fi scrisă astfel, încât să punem în evidență și cazul $i=j$, când $g_{ii}\neq 0$. Vom scrie că într'un sistem ortogonal coeficienții formei metrice fundamentale sunt

$$g_{ij}=\bar{r}_i\bar{r}_j=g_{ij}\delta_{ij} \text{ (fără sumare)}, \qquad (216,VI)$$

deci $ds^2$ va avea forma

$$ds^2=g_{ij}\delta_{ij}du^idu^j=g_{ii}du^idu^i;\quad (i,j=1,2,3),$$

deci

$$ds^2=g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2+g_{33}(du^3)^2. \qquad (217,VI)$$

Ținând seama de (213,VI), condițiile de ortogonalitate (216,VI) se vor scrie sub forma

$$\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j}=0;\quad (i\neq j), \qquad (218,VI)$$

**Exemplu.** *Coordonatele polare și notația tensorială.* După cum am observat și anterior, notația tensorială, care prezintă avantaje teoretice, evidente, prin sistematizarea pe care o introduce, în practică se dovedește uneori greoaie, mai ales în cazurile când în calcul intervin puține simboluri. Prezența unui număr mare de indici plasați sus și jos complică operațiile. Deaceea, este preferabil să se utilizeze notația obișnuită, interpretându-se rezultatele ținând seama de semnificația lor obținută cu notația tensorială.

In cazul coordonatelor polare, vom avea

$$x^1=r\cos\theta\sin\varphi;\quad x^2=r\sin\theta\sin\varphi;\quad x^3=r\cos\varphi;$$
$$u^1=r;\qquad u^2=\varphi;\qquad u^3=\theta.$$

Din (196,VI) vom deduce

$$g_{11}=1;\quad g_{22}=r^2;\quad g_{33}=r^2\sin^2\varphi;\quad g_{12}=g_{23}=g_{31}=0,$$

sistemul fiind ortogonal.

Matricea coeficienților va fi,

$$\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\varphi\end{matrix}\right\| \text{ iar } g=r^4\sin^2\varphi.$$

Pentru a forma coeficienții $g^{ij}$ vom calcula matricea inversă, formată cu minorii normalizați, cu observația esențială de a ține seama că $g^{ij}$ este minorul normalizat al lui $g_{ji}$. Astfel, vom avea

$$g^{11}=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\varphi\end{vmatrix}=1;\quad g^{12}=\frac{-1}{g}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\varphi\end{vmatrix}=0,\text{ etc.}$$

deci matricea coeficienților $g^{ij}$ va fi

$$\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\end{matrix}\right\| \text{ cu } g^{-1}=\frac{1}{r^4\sin^2\varphi}.$$

Componentele unui vector oarecare $\bar{V}$ din spațiul local, față de baza $\bar{r}_r\bar{r}_\varphi\bar{r}_\theta$ și reciproca sa $\nabla r, \nabla\varphi, \nabla\theta$, se vor deduce unele din altele prin formulele (211,VI)

$$V_1=V^1;\quad V_2=r^2V^2;\quad V_3=r^2\sin^2\varphi V^3.$$

De exemplu, componentele covariante ale unei deplasări elementare

$$d\bar{r}=\bar{r}_r dr+\bar{r}_\varphi d\varphi+\bar{r}_\theta d\theta,$$

ale cărei componente contravariante sunt $dr$, $d\varphi$, $d\theta$, vor fi

$$dr;\quad r^2d\varphi;\quad r^2\sin^2\varphi\, d\theta.$$

Aceste componente nu au dimensiunile unor lungimi, ceeace este explicabil prin faptul că bazele nu au fost formate cu versori. Dacă în loc de $\bar{r}_r, \bar{r}_\varphi, \bar{r}_\theta$, folosim versorii $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_\theta$, componentele contravariante ale deplasării elementare vor deveni

$$dr;\quad rd\varphi;\quad r\sin\varphi\, d\theta.$$

In același timp, dacă în baza reciprocă vom folosi versorii lui

$$\nabla r, \nabla\varphi, \nabla\theta, \text{ deci } (\nabla r,\ \nabla r\varphi,\ r\sin\varphi\nabla\theta),$$

componentele covariante găsite se vor înmulți cu $1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r\sin\varphi}$ și vor deveni în această bază

$$dr;\quad rd\varphi;\quad r\sin\varphi d\theta,$$

deci vor fi egale cu cele contravariante, ceeace este explicabil, deoarece sistemul $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_\theta$ este format din trei versori ortogonali.

## § 206. Geometria în spațiile locale

Orice figură geometrică, formată din linii sau suprafețe, are o porțiune cuprinsă în spațiul local al oricăruia din punctele sale. Astfel, dacă figura este o curbă, iar punctul $M$ este ordinar, în spațiul local vom înregistra un arc elementar cu tangenta sa în $M$. Vom putea apoi, pentru unele proprietăți, aproxima acest arc prin tangenta sa elementară $d\bar{r}$. Alteori, va fi necesar să considerăm două puncte vecine $M$ și $M'$ cu spațiile lor locale, să calculăm



Scanned with OKEN Scanner

deplasarea $d\bar{r}$ în fiecare dintre ele și apoi să transportăm prin paralelism pe $d\bar{r}'$ în $M$ pentru a calcula diferența

$$\Delta d\bar{r} = d\bar{r}' - d\bar{r} \simeq d^2\bar{r}$$

*Toate proprietățile locale ale curbelor și suprafețelor, pe care le-am pus în evidență în capitolele respective, sunt proprietăți geometrice ale figurilor de aproximație din spațiile locale ale punctelor acestor curbe sau suprafețe.* De exemplu, planul tangent la o suprafață într'un punct ordinar provine din considerarea tuturor curbelor de pe suprafață, care trec prin $M$, ca fiind aproximate fiecare prin vectorul tangent elementar $d\bar{r}$. Mulțimea acestor vectori formează în spațiul local un element plan $d\bar{\sigma}$, care este element al planului tangent și element al suprafeței. Pentru unele din aceste proprietăți este suficient să considerăm spațiul local al unui singur punct $M$, pe când pentru altele este necesar să folosim și figuri din spațiul local al unui al doilea punct vecin $M'$, sau din alte spații locale vecine, ca în cazul planului osculator.

Pentru a putea compara mărimi din spații locale diferite, trebue să existe un mijloc de transport al acestor mărimi dintr'un loc în altul, ceeace se realizează prin *transportul paralel.* În acest transport, vectorii suferă mișcări de translație, deci păstrează aceleași componente, măsurate într'un sistem de referință cartezian fix. Dacă însă măsurăm aceste componente în spațiile locale, ele se vor schimba, în general, în cursul transportului, fiindcă diversele triedre sunt diferite unele de altele.

Proprietatea pe care o are spațiul euclidian de a putea compara între ele mărimi legate de spațiile locale ale punctelor sale se numește *conexiune euclidiană.* Dacă această conexiune este înfăptuită pe baza unui mijloc de transport diferit, se obține un spațiu cu o conexiune diferită, de exemplu un spațiu riemannian.

Importanța spațiilor locale rezultă și din faptul că *și în spațiile, care au altă conexiune decât cea euclidiană și care intevin în aplicațiile fizice, cum sunt spațiile riemanniene, spațiile locale sunt tot euclidiene (afine sau metrice), deci, în mic, vom regăsi în vecinătatea fiecărui punct proprietățile geometrice clasice.*

După cum am arătat, orice sistem de coordonate curbilinii induce în fiecare spațiu local al domeniului său de existență $D$ un sistem de referință cartezian $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$. Folosind acest sistem, putem defini de exemplu unghiul a două direcții date prin vectorii elementari $d\bar{r}$ și $\delta r$. Vom avea

$$\cos\theta = \frac{d\bar{r}\cdot\delta\bar{r}}{|dr||\delta\bar{r}|} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{\delta\bar{r}}{\delta s}, \qquad (219,VI)$$

unde

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv + \bar{r}_w dw = \bar{r}_i du^i;$$
$$\delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v + \bar{r}_w \delta w = \bar{r}_i \delta u^i. \qquad (220,VI)$$

Un calcul simplu, în care ținem seama și de formulele (191,VI) și (192,VI) ne conduce la formula

$$\cos\theta = \frac{H_1 du\,\delta u + H_2 dv\,\delta v + H_3 dw\,\delta w}{ds\,\delta s} + \frac{F_1(dv\,\delta w + dw\,\delta v) + F_2(dw\,\delta u + du\,\delta w) + F_3(du\,\delta v + dv\,\delta u)}{ds\,\delta s}, \qquad (221,VI)$$

$ds$ și $\delta s$ având expresiile corespunzătoare, deduse din (192,VI.)

Scanned with OKEN Scanner

Se vede că *unghiul* $\theta$ *este definit exclusiv cu coeficienții formei fundamentale*, proprietate pe care o vom regăsi și în calculul altor mărimi geometrice din spațiul local.

Lungimea formulei (221,VI) arată încă odată avantajele notațiilor condensate și în special ale notației tensoriale. Cu ajutorul acesteia vor putea scrie

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\,du^i\,\delta u^j}{\sqrt{g_{ij}\,du^i\,du^j}\;\sqrt{g_{ij}\,\delta u^i\,\delta u^j}}, \qquad (221'VI)$$

forma dela numărător fiind *polara formei fundamentale*. Condiția de ortogonalitate a două direcții se va obține anulând $\cos\theta$ și va fi

$$g_{ij}\,du^i\delta u^j = 0. \qquad (222,VI)$$

Subliniem încă odată faptul că $du^1$, $du^2$, $du^3$, pe de o parte, și $\delta u^1$, $\delta u^2$, $\delta u^3$, pe de altă parte, sunt componentele contravariante ale vectorilor elementari $d\bar{r}$ și $\delta\bar{r}$, față de triedrul local $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$. Comparând aceste rezultate cu cele obținute în Geometria analitică, observăm că ele sunt aceleași ca în cazul coordonatelor carteziene oblice, cu singura deosebire că vectorii sunt elementari.

Vom putea deasemenea da ecuația unei sfere elementare cu centrul în $M$ și de rază $d\lambda$. Dacă $M'$ este un punct pe această sferă, vom avea

$$\overline{MM'} = d\bar{r}; \qquad |\overline{MM'}| = d\lambda.$$

Deci, ecuația vectorială a sferei va fi

$$d\bar{r}^2 = d\lambda^2.$$

iar raportată la triedrul local

$$g_{ij}\,du^i\,du^j = d\lambda^2 \qquad (223,VI)$$

Extinzând spațiul local indefinit și considerându-l ca un spațiu reprezentativ, ecuația

$$g_{ij}\,\frac{du^i}{d\lambda}\,\frac{du^j}{d\lambda} = 1$$

va reprezenta sfera de rază unitate. Notând atunci prin

$$\xi^i = \frac{du^i}{d\lambda}; \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

coordonatele unui punct din spațiul local, sfera unitate va avea ecuația

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1, \qquad (224,VI$$

Din relația de ortogonalitate, deducem imediat ecuația unui plan elementar, care trece prin $M$ (fig. 198). Fie $n^1$, $n^2$, $n^3$ componentele vectorului $\bar{n}$ normal la acest plan. Scriind că vectorul de poziție $d\bar{r}$ al unui punct $M'$ din acest plan este perpendicular pe $\bar{n}$, din (222,VI) vom deduce relația

$$g_{ij}\,n^i\,du^j = 0, \qquad (225,VI)$$

Scanned with OKEN Scanner

care reprezintă ecuația planului, coordonatele curente fiind

$$du^1,\quad du^2,\quad du^3$$

Această ecuație se obține din polara formei fundamentale și, în aparență, este întrucâtva deosebită de ecuația cunoscută a planului, care trece prin origine. Dacă însă notăm cu $n_1$, $n_2$, $n_3$ *componentele covariante* ale vectorului normal $\bar{n}$ care, conform cu (211,VI), sunt:

$$n_i = g_{ij}\, n^j, \quad \text{sau} \quad n_j = g_{ij}\, n^i,$$

ecuația (225,VI) se va scrie imediat sub forma

$$n_i\, du^i = n_1 du^1 + n_2 du^2 + n_3 du^3 = 0, \qquad (225',VI)$$

care coincide cu cea cunoscută.

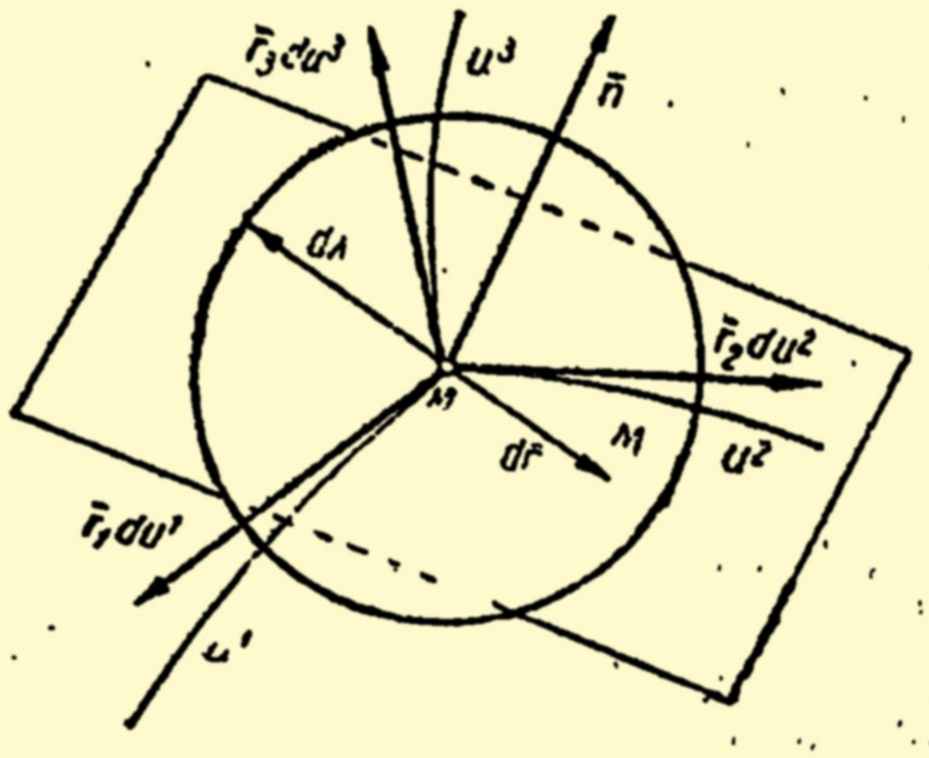



Fig. 198

Regăsim astfel observația făcută asupra normalei la un plan sau la o suprafață: *în ecuația carteziană a planului elementar, normala intervine prin componentele sale covariante.* Obișnuința folosirii coordonatelor carteziene ortogonale face ca această proprietate să treacă neobservată din cauză că cele două feluri de componente sunt confundate.

Este important să atragem atenția asupra faptului că *proprietățile spațiilor locale, ale figurilor și ale mărimilor geometrice și fizice din aceste spații, sunt independente de sistemele de referință locale,* deci rămân invariante când schimbăm sistemul de coordonate curbilinii.

Cercetarea acestor proprietăți nu este condiționată de folosirea niciunui fiistem de referință. De exemplu, formula (219,VI), care definește unghiul, sau sormul le

$$d\bar{r}^2 = d\lambda^2; \quad \bar{n} d\bar{r} = 0,$$

care dau ecuațiile sferei elementare și ale planului elementar, nu implică nici un sistem de referință.

In studiul curbelor și suprafețelor, spațiile locale sunt raportate la sisteme de coordonate legate de însăși aceste varietăți. Astfel, pentru proprietățile locale ale curbelor se folosește triedrul principal al lui Frenet, format cu trei direcții ortogonale, legate intrinsec de curba considerată, iar în studiul suprafețelor intervine triedrul lui Gauss, format de normala $\bar{n}$ și de tangentele la două curbe coordonate ale suprafeței.

Prin urmare: *Geometria spațiilor locale este independentă de orice sistem de referință, dar poate folosi o anumită clasă de sisteme locale, indicată de configurațiile geometrice cercetate.*

Aceste spații fiind euclidiene, regăsim în mic proprietățile spațiului euclidian și putem folosi local metodele Algebrei și Analizei vectoriale sau alte metode, cum este de exemplu, metoda tensorială, în toate cazurile în care ele se aplică spațiului euclidian. Deasemenea putem considera exclusiv proprietățile afine ale spațiilor locale.

Scanned with OKEN Scanner

## § 207. Suprafeţe şi curbe în coordonate curbilinii

Pentru raportarea spaţiului euclidian la un sistem de coordonate curblilinii, am presupus că în domeniul $\Delta$ din spaţiul reprezentativ, Jacobianul $J$ este diferit de zero. Cu această condiţie şi dacă transformarea (174,VI) este biunivocă, obţinem un sistem de coordonate curbilinii pentru un domeniu $D$ din spaţiu. *In general, nu vom putea obţine reprezentarea întregului spaţiu printr'un singur sistem de coordonate curbilinii,* ci acesta se va întinde la un domeniu $D$, cum am văzut, de exemplu, în cazurile coordonatelor cilindrice sau sferice (polare). Punctele, în care $J=0$, sunt singulare şi constitue frontiera domeniului $D$.

Să presupunem că $J\equiv 0$ într'un întreg domeniu al spaţiului. In acest caz formulele (174,VI) nu vor mai putea da loc unui sistem de coordonate curbilinii, fiindcă nu vom mai putea reprezenta vecinătatea unui punct $\mu(u, v, w)$ pe întreg domeniul unui punct $M(x, y, z)$, deoarece unui punct $M'(x', y', z')$ vecin cu $M$, nu-i vom putea găsi, în orice caz, o imagine $\mu(u', v', w')$ vecină cu $\mu(u, v, w)$.

In adevăr, se ştie din analiză că *dacă* $J\equiv 0$ *în* $D$, *între* $x, y, z$ *există cel puţin o relaţie funcţională* de forma

$$F(x, y, z)=0,$$

în care nu intervin variabilele $u, v, w$. Deci $x, y, z$ nu variază independent şi un sistem de valori $u'$, $v'$, $w'$ va corespunde unui punct ce satisface condiţia $F(x', y', z')=0$ deci, nu unui punct oarecare $M'(x', y', z')$ din $V_\varepsilon(M)$.

Putem preciza această observaţie, menţionând următoarea *teoremă a dependenţei funcţionale:*

*Condiţia necesară şi suficientă ca între funcţiile*

$$x=x(u, v, w);\ y=y(u, v, w);\ z=z(u, v, w),$$

*continue şi diferenţiabile continuu într'un domeniu* $D$, *să existe cel puţin o relaţie funcţională, independentă de* $u, v, w$, *este ca determinantul funcţional*

$$J=\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\equiv 0 \qquad (226,VI)$$

*în* $D$. *Dacă rangul matricei*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix} \right\| \qquad (227,VI)$$

*este* $r=3, 2, 1$, *între cele trei funcţii există* $3-r$ *relaţii funcţionale.*

Se ştie că rangul unei matrice este ordinul cel mai înalt al determinanţilor diferiţi de zero, extraşi din ea.

Pentru $r=3$ nu va exista nici o relaţie şi funcţiile (174,VI) vor fi independente, deci vom putea introduce coordonatele curbilinii în $D$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $r=2$, între $x, y, z$ va exista o singură relație de forma

$$F(x, y, z)=0, \qquad (228,VI)$$

deci *punctul M va descrie o suprafață în domeniul D.* In același timp, introducând valorile (174,VI) ale lui $x, y, z$ în relația obținută, vom avea

$$F[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]=\Phi(u, v, w)=0,$$

deci între $u, v, w$ va exista deasemenea o relație, din care vom deduce, de exemplu,

$$w=\varphi(u, v).$$

Punctul $M$ nu va mai depinde decât de doi parametri și va descrie o suprafață de ecuație carteziană (228,VI). Putem totdeauna permuta literele între ele, astfel încât să presupunem că unul din determinanții de ordinul al doilea, diferiți de zero, este format cu elementele primelor două linii ale matricei (227,VI). Cum aceste componente reprezintă vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v$, rezultă că putem presupune

$$\bar{r}_u \times r_v \neq 0 \qquad (229,VI)$$

în cazul unei singure relații funcționale.

Cum în același timp $J\equiv 0$, vom avea

$$\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_w = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\bar{r}_w \equiv 0,$$

deci

$$\bar{r}_w = 0 \text{ sau } \bar{r}_w = \alpha \bar{r}_u + \beta \bar{r}_v$$

în tot domeniul $D$.

In primul caz, vectorul $\bar{r}=\bar{r}(u, v, w)$ nu depinde de $w$ și se reduce la forma

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v),$$

iar în al doilea, $\bar{r}_w \neq 0$, se găsește în planul format de $\bar{r}_u$ și $\bar{r}_v$. Cum între $u, v$ și $w$ există o relație funcțională $\Phi(u, v, w)=0$, vom putea deasemenea elimina pe $w$ și vectorul de poziție $\bar{r}$ va deveni de aceeași formă $\bar{r}=\bar{r}(u, v)$.

Prin urmare: *Când între $x, y, z$ există o singură relație funcțională, punctul M descrie o suprafață, care poate fi reprezentată parametric prin ecuația vectorială*

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v) \text{ cu } \bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0.$$

In acest caz, triedrul $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ este degenerat, vectorii fiind coplanari. Vectorii $r_u$ și $\bar{r}_v$ formează un sistem de referință local în planul tangent la suprafață și *putem considera elementul de suprafață orientat $d\bar{\sigma}$* ca un *spațiu local cu două dimensiuni, în care $\bar{r}_u$ și $\bar{r}_v$ constitue un reper cartezian local.*

La aceleași rezultate ajungem chiar în cazul când $J\not\equiv 0$ într'un domeniu $D$, în care deci introducem un sistem de coordonate curbilinii, dacă impunem parametrilor $u, v, w$ o relație de forma

$$\Phi(u, v, w)=0 \text{ sau } w=\varphi(u, v) \qquad (230,VI)$$

Punctul $M$ va descrie o suprafață de ecuație vectorială $\bar{r}=\bar{r}(u, v)$, iar imaginea sa $\mu$ va descrie în spațiul reprezentativ o suprafață de ecuație (230,VI)

Scanned with OKEN Scanner

In particular, suprafeţele coordonate se obţin ţinând unul din parametri constanţi. Curbele coordonate ale spaţiului, care se găsesc pe suprafeţe corespunzătoare, vor fi curbe coordonate şi pe acea suprafaţă. De exemplu, pentru $w=\text{const}$, vom avea suprafaţa

$$\bar{r}=\bar{r}(u, v, w_0)$$

pe care curbele coordonate vor fi

$$u=\text{const}; \quad v=\text{const}.$$

Dacă rangul matricei (227,VI) este $r=1$, vor exista două relaţii funcţionale de forma $F(x, y, z)=0$; $G(x, y, z)=0$ *şi punctul M va descrie o curbă în domeniul D.*

Intre $u, v, w$ vor exista deasemenea două relaţii de forma

$$\Phi(u, v, w)=0; \quad \Psi(u, v, w)=0,$$

din care vom putea deduce

$$v=\varphi(u); \quad w=\psi(u). \tag{231,VI}$$

Fiindcă rangul matricei este $r=1$, vom putea, printr'o permutare eventuală a literelor, să presupunem că cel puţin un element din prima linie este diferit de zero şi deci

$$\bar{r}_u \neq 0; \quad \bar{r}_v \times \bar{r}_w = 0; \quad \bar{r}_w \times \bar{r}_u = 0; \quad \bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0. \tag{232,VI}$$

In adevăr, dacă unul din cele trei produse vectoriale nu ar fi nul, am reveni la cazul (229,VI), rangul matricei fiind $r=2$.

Din relaţiile (232,VI) deducem

$$\bar{r}_v=0; \quad \bar{r}_w=0 \quad \text{sau} \quad \bar{r}_v=\alpha\bar{r}_u; \quad \bar{r}_w=\beta\bar{r}_u.$$

Deci, vectorii $r_v, \bar{r}_w$ sunt coliniari cu $\bar{r}_u$, sau nuli.

In cazul $\bar{r}_v=0$, vectorul de poziţie nu depinde de $v$, iar $w$ poate fi eliminat prin relaţiile (231,VI); la fel în cazul $\bar{r}_w=0$, iar dacă $\bar{r}_v \neq 0, \bar{r}_w \neq 0$, ambii parametri se elimină prin relaţiile (231,VI).

Prin urmare: *Când între x, y, z există două relaţii funcţionale, punctul M descrie o curbă reprezentabilă vectorial prin ecuaţia*

$$\bar{r}=\bar{r}(u) \text{ cu } \bar{r}_u \neq 0.$$

Triedrul $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ este degenerat, vectorii fiind coliniari. Vectorul $\bar{r}_u$ este tangent la curba descrisă de $M$.

La aceleaşi rezultate ajungem într'un sistem de coordonate curbilinii, deci pentru $J \neq 0$, dacă impunem parametrilor $u, v, w$ două relaţii de forma (231,VI). Punctul $M$ va descrie o curbă de ecuaţie vectorială $\bar{r}=r(u)$, iar imaginea sa va descrie în spaţiul reprezentativ o curbă de ecuaţii (231,VI).

In particular, curbele coordonate se obţin ţinând doi dintre parametri constanţi.

Se vede deci că *un sistem de coordonate curbilinii reprezintă un domeniu D al spaţiului pe un domeniu Δ al spaţiului reprezentativ şi că, în această reprezentare, curbele şi suprafeţele din spaţiu au ca imagini curbe şi suprafeţe corespunzătoare din spaţiul reprezentativ.*

Scanned with OKEN Scanner

Suprafețele și curbele coordonate pot fi reprezentate pe spații cu două, respectiv una, dimensiuni, în speță pe planele și axele de coordonate din spațiul reprezentativ.

*Teoria curbelor și suprafețelor reprezentate parametric*, desvoltată anterior, separat, pentru fiecare din aceste varietăți, considerate ca aparținând spațiului euclidian, raportat la un reper cartezian, *se înglobează în teoria geometrică a spațiului euclidian, raportat la un sistem de coordonate curbilinii.*

Pentru proprietățile intrinseci ale suprafețelor, de exemplu, este suficient, să presupunem că am ales un sistem de coordonate, în care suprafața considerată este $w=\text{const.}$, pentru a constata că prima formă fundamentală

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

se deduce din elementul liniar (192,VI) al spațiului, pentru $dw=0$. Din aceasta vor decurge apoi toate consecințele geometrice, ca măsura unghiului dintre două curbe trasate pe suprafață, etc.

## EXERCIȚII

**1.** Să se găsească expresia elementului de arie al unei suprafețe coordonate, în coordonate curbilinii.

Indicație. Se consideră un paralelogram curbiliniu elementar pe suprafața $u=\text{const}$ format de intersecția curbelor $v$ și $w$. Dacă notăm cu $d\bar{s}_2, d\bar{s}_3$ deplasările elementare pe curbele $v$ și $w$, mărimea ariei lui este

$$d\sigma_u = |d\bar{s}_2 \times d\bar{s}_3| = |\bar{r}_v \times \bar{r}_w|\,dv\,dw = \sqrt{(\bar{r}_v \times \bar{r}_w)(\bar{r}_v \times \bar{r}_w)}\,dv\,dw.$$

Prin aplicarea identității lui Lagrange, expresia de sub radical poate fi adusă la forma

$$(\bar{r}_v \times \bar{r}_w)(\bar{r}_v \times \bar{r}_w) = H_2 H_3 - F_1^2$$

și deci avem

$$d\sigma_u = \sqrt{H_2 H_3 - F_1^2}\,dv\,dw.$$

Cu notația tensorială se obține

$$d\sigma_1 = \sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23}^2}\,du^2\,du^3,$$

expresiile elementelor celorlalte obținându-se prin permutarea circulară a indicilor. A compara cu expresia elementului de arie al unei suprafețe: $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.

**2.** Cu ajutorul rezultatelor din problema precedentă să se deducă elementele de arie ale suprafețelor coordonate în coordonate cilindrice și sferice.

| Coordonate cilindrice | Coordonate sferice |
|---|---|
| $d\sigma_\rho = \rho\,d\theta\,dz$; | $d\sigma_r = r^2 \sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$; |
| $d\sigma_r = d\rho\,dz$; | $d\sigma_\theta = r\,dr\,d\varphi$; |
| $d\sigma_z = \rho\,d\rho\,d\theta$; | $d\sigma_\varphi = r \sin\varphi\,dr\,d\theta$. |

**3.** Fie $P_1$ și $P_2$ două puncte fixe pe axa $Ox$, cu coordonatele $x=c$ respectiv $x=-c$ și fie $r_1$, $r_2$ distanțele unui punct oarecare al planului $z=0$ la $P_1$ și $P_2$. Atunci variabilele

$$\xi = u^1 = \frac{r_1 + r_2}{2c};$$

$$u^3 = z.$$

$$\eta = u^2 = \frac{r_1 - r_2}{2c};$$

Se numesc coordonate *eliptice* (sau coordonate *cilindrice eliptice*).

Să se determine:

a) restricțiile impuse asupra noilor coordonate pentru a avea un sistem propriu de coordonate;

b) suprafețele și curbele coordonate și expresia vectorului de poziție;

c) coeficienții formei metrice fundamentale și elementul de volum.

Indicație: a) $\xi \geq 1$; $-1 \leq \eta \leq 1$.

b) Suprafețele $\xi = \text{const.}$ sunt cilindri cu secțiune eliptică, de focare $P_1$ și $P_2$, cu semiaxele $a = c\xi$, $b = c\sqrt{\xi^2 - 1}$ și excentricitatea $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\xi}$, suprafețele $\eta = \text{const.}$ sunt cilindri de secțiune hiperbolică cu două pânze și cu focarele $P_1$ și $P_2$. Ecuațiile celor două familii ortogonale sunt:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2; \quad \frac{x^2}{\eta^2} + \frac{y^2}{1 - \eta^2} = c^2,$$

de unde putem obține expresia vectorului de poziție

$$\bar{r}(\xi, \eta, z) = \bar{i} c\xi\eta + \bar{j} c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} + \bar{k}z.$$

c) Sistemul este ortogonal, versorii formând un sistem pozitiv. Avem

$$H_1 = c^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}; \quad H_2 = c^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}; \quad H_3 = 1;$$

$$d\omega = \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}.$$

4. Dacă $\rho, \theta, z$ sunt coordonate cilindrice, funcțiile

$$u^1 = \xi = \sqrt{2\rho} \sin\frac{\theta}{2}; \quad u^2 = \eta = \sqrt{2\rho} \cos\frac{\theta}{2}; \quad u^3 = z$$

definesc așa numitele coordonate *cilindrice parabolice*.

Să se determine:

a) suprafețele și curbele coordonate și expresia vectorului de poziție;

b) forma metrică fundamentală și elementul de volum

Indicație. a) Înlocuind $\rho$ și $\theta$ prin expresiile lor în funcție de $x, y$, se găsește

$$\xi^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x;$$

$$\eta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x,$$

de unde $\xi = \text{const.}$ și $\eta = \text{const.}$ sunt două familii de cilindri parabolici ortogonali. Vectorul de poziție are expresia

$$\bar{r}(\xi, \eta, z) = \frac{\bar{i}}{2}(\eta^2 - \xi^2) + \bar{j}\xi\eta + \bar{k}z.$$

b) $H_1 = H_2 = \xi^2 + \eta^2$, $H_3 = 1$;

$$d\omega = (\xi^2 + \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, dz.$$

5. Fie $P_1$ și $P_2$ două puncte fixe ale planului $z = 0$, de coordonate respectiv $(a, 0, 0)$ și $(-a, 0, 0)$. Să se studieze sistemul de coordonate *bipolar*, dat de parametrii

$$\xi, \eta, \zeta; \quad (-\infty < \xi < +\infty; \quad 0 < \eta < 2\pi; \quad -\infty < \zeta < +\infty)$$

definiți prin ecuațiile

$$(x - a\,\text{cth}\,\xi)^2 + y^2 = a^2\,\text{cosec h}^2\xi;$$

$$x^2 + (y - a\,\text{ctg}\,\eta)^2 = a^2\,\text{cosec}^2\eta;$$

$$\zeta = z.$$

Scanned with OKEN Scanner

**Indicație.** Suprafețele $\xi=$const. reprezintă două familii de cilindri circulari cu axele paralele cu axa $Oz$ și situate în planul $y=0$.

$P_1$ corespunde valorii $\xi=+\infty$; $P_2$ se obține pentru $\xi=-\infty$; lui $\xi=0$ îi corespunde planul $x=0$. Suprafețele $\eta=$const. formează o familie de cilindri ortogonali cu primii, cercurile de bază trecând prin punctele $P_1$, $P_2$.

Coeficienții metricii sunt

$$H_1=H_2=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)^2};\quad H_3=1.$$

6. După cum prin translația unui sistem de elipse dealungul axei $Oz$ se obține sistemul de coordonate eliptice (exercițiul 3), prin rotirea aceluiași sistem în jurul uneia dintre axe, obținem coordonatele *sferoidale*, și anume, după cum rotirea se face după axa mare sau mică, vom obține sferoizi alungiți sau turtiți. Să se studieze sistemul de coordonate obținut. Importanța practică a acestor sisteme constă în faptul că, făcând excentricitatea să tindă către unu, sferoizii alungiți capătă aspectul unor bare subțiri, iar cei turtiți devin discuri subțiri cu secțiune eliptică, fapt folosit în teoria antenelor. În celălalt caz extrem (excentricitatea tinde la zero, distanța între focare $2c$), coordonatele sferoidale devin coordonate polare (sferice) $\xi\to r$, $\eta\to\cos\varphi$.

**Indicație.** Considerând axa mare situată pe axa $Ox$ și rotind elipsele și hiperbolele în jurul acesteia, se obține o familie de sferoizi alungiți, iar ca familie ortogonală hiperboloizi cu două pânze. Notând cu $\varphi$ unghiul de rotație față de axa $Oy$ în planul $x=0$ și cu $r$ distanța punctului dela axa $Ox$, avem $y=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$.

Variabilele $\xi$, $\eta$, $\varphi$, sunt definite de aceste relații și de relațiile din exercițiul 3 $\left(\xi=\frac{r_1+r_2}{2c},\ \eta=\frac{r_1-r_2}{2c}\right)$. Cele două familii de suprafețe sunt

$$\frac{x^2}{\xi^2}+\frac{r^2}{\xi^2-1}=c^2;\quad \frac{x^2}{\eta^2}-\frac{r^2}{1-\eta^2}=c^2:$$

$\varphi=$const, de unde $x=c\xi\eta$; $y=c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi$;

$$z=c\sqrt{(\xi^2-1)\,(1-\eta^2)}\sin\varphi;$$

$$\xi\geq 1;\ -1\leq\eta\leq 1;\ 0\leq\varphi<2\pi.$$

Coeficienții metricii sunt

$$H_1=c^2\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1};\quad H_2=c^2\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2},$$

$$H_3=c^2(\xi^2-1)\,(1-\eta^2);$$

în cazul sferoizilor turtiți, rotația se face în jurul axei $Oy$; focarele elipselor descriu cercuri în planul $x=0$. Introducând coordonatele cilindrice $r$, $\varphi$, $y$ cu axa $Oy$ ca axă, vom avea ca ecuații ale suprafețelor coordonate

$$\frac{r^2}{\xi^2}+\frac{y^2}{\xi^2-1}=c^2,\quad \frac{r^2}{\eta^2}-\frac{y^2}{1-\eta^2}=c^2;\quad \varphi=\text{const},$$

de unde

$$x=c\xi\eta;\quad y=c\sqrt{(\xi^2-1)\,(1-\eta^2)};\quad z=c\xi\eta\cos\varphi;$$

suprafețele $\xi=$const. sunt sferoizi turtiți, $\eta=$const. hiperboloizi cu o pânză. Coeficienții metricii sunt

$$H_1=c^2\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1};\quad H_2=c^2\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2};\quad H_3=c^2\xi^2\eta^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

# METODA VECTORIALĂ ÎN MECANICA RAŢIONALĂ. MIŞCĂRI ŞI MĂRIMI MECANICE

## § 208. Mărimi geometrice în fenomenele fizice

Fenomenele fizice se desfăşoară în spaţiu şi timp şi se caracterizează prin modificarea stării corpurilor materiale. Determinarea stării la un anumit moment se face prin măsurarea unor mărimi fizice caracteristice fenomenului considerat, iar aceste mărimi sunt, în general, variabile în spaţiu şi timp.

Unele dintre aceste mărimi fizice sunt reprezentabile geometric prin segmente, elemente de suprafaţă, volume orientate, etc., şi măsurabile prin mărimi geometrice ca vectori, bivectori, trivectori, etc., asociate cu mărimi fizice scalare sau pseudo-scalare.

Aşa, de exemplu, forţa, care este o mărime vectorială, este măsurabilă prin vectorul acceleraţie şi scalarul masă cu ajutorul celor trei unităţi fundamentale de lungime, masă şi timp,

Corpurile sunt constituite din molecule, atomi, electroni, şi alte particule legate prin forţe de interacţiune. Pentru studiul multor fenomene însă, ele sunt considerate continue. In acest caz, reprezentarea geometrică a mărimilor fizice capătă o însemnătate deosebită prin posibilitatea de a aplica la cercetarea acestor fenomene metodele Algebrei şi Analizei vectoriale, în particular cele ale Geometriei diferenţiale vectoriale.

Cum în modificarea stării unui corp intervine şi modificarea poziţiei particulelor sale în raport cu alte corpuri, deci mişcarea, fenomenele de mişcare sunt fundamentale.

*„Mişcarea mecanică se prezintă ca cea mai simplă şi totodată foarte răspândită formă de existenţă şi de manifestare a materiei, deaceea este uşor de înţeles uriaşa însemnătate a mecanicei raţionale pentru ştiinţele naturii şi rolul excepţional, pe care îl ocupă numeroasele ei aplicaţii în domeniul tehnicei“* [1]).

In Mecanica raţională se găsesc numeroase exemple de mărimi fizice reprezentate geometric, pe care apoi le regăsim în diferite fenomene fizice importante, cu semnificaţia specială caracteristică acestor fenomene.

Pentru studiul fenomenelor de mişcare mecanică sunt necesare unele noţiuni cu caracter geometric, a căror introducere justifică rolul mărimilor geometrice în cercetarea fenomenelor fizice.

---

[1]) *G. C. Suslov* „Mecanica raţională“ vol. I. Ed. Tehnică, Bucureşti 1950 p. 48.

„Vom numi *mediu* o mulțime continuă (loc geometric) de obiecte geometrice oarecare identice între ele, iar fiecare obiect geometric intrând în alcătuirea mulțimii va fi numit *element* al mediului. Prin *obiect geometric*, înțelegem un punct, o linie, o suprafață, un corp sau un număr finit sau infinit din ele. De exemplu, o suprafață riglată se prezintă ca o mulțime continuă de drepte (generatoarele) sau ca o mulțime continuă de puncte; prin urmare, această suprafață, considerată drept mediu, poate să aibă ca element o dreaptă sau un punct. Dimensiunile unui mediu pot fi finite sau infinit de mari.

Prin mișcarea unui obiect geometric dat, într'un mediu dat, se înțelege coincidența succesivă, în cursul timpului, a acestui obiect cu elementele mediului, identice cu el. O astfel de definiție a mișcării are sens, numai în cazul când putem defini poziția elementelor mediului identice între ele. Aceasta se realizează prin alegerea unui sistem determinat de referință, adică a unui sistem oarecare de corpuri (elementele geometrice ale mediului) în raport cu care are loc mișcarea“[1]).

In cazul când elementele mediului nu sunt puncte, ci alte figuri geometrice, acestea vor fi la rândul lor, fie definite ca mulțimi de puncte, fie reperate prin componente la interiorul mediului considerat, deci mărimile geometrice vor intra în considerație, ceeace se vede dealtfel din însuși faptul că sistemul de unități fundamentale este format din unitățile de lungime, masă și timp.

Dacă trecem la alte fenomene, cum ar fi cele din Mecanica corpurilor deformabile, folosind pentru început aceeași aproximație printr'un mediu continuu a mediului deformabil, vom regăsi deasemenea mărimile geometrice.

„Corpurile deformabile pot fi considerate ca sisteme de puncte materiale ale căror distanțe reciproce variază în timpul deformațiilor lor. Dar în multe cazuri este mai rațional să considerăm corpul deformabil ca un continuu. Astfel se poate proceda în aproape toate calculele tehnicei: săgeata unei grinzi, curgerea apei într'un canal, scurgerea unui gaz printr'un robinet. In general, toate deformațiile, pentru a căror măsurare ne mulțumim cu mijloace relativ grosolane (macroscopice), pot fi considerate ca globale“[2]).

Deformarea este definită ca variația distanței între două elemente ale mediului, presupus împărțit într'un mare număr de compartimente. Cea mai simplă deformație, numită *omogenă*, are următoarele proprietăți geometrice: dreptele și planele mediului dinainte de deformare rămân drepte, și plane după deformare, iar dreptele și planele paralele rămân paralele.

Când o deformare este suficient de mică, ea poate fi aproximată printr'o deformare omogenă. Cercetarea fenomenului de deformare se bazează pe un studiu geometric, în care se introduc obiecte geometrice și din care vor rezulta mărimi geometrice. Astfel, întinderea și comprimarea sunt măsurate prin variația unității de lungime în direcția deformării, *alunecarea* prin variația unghiului fețelor unui paralelipiped elementar, iar o deformare elementară rezultă din compunerea a șase deformări simple; trei întinderi după direcțiile muchiilor și trei alunecări în planele unui triedru ortogonal.

Iată, deci, cum o anumită mărime geometrică, asociată unui element al mediului, caracterizează un fenomen elementar.

---

[1]) Idem, p. 49. Din comparația cu noțiunea de obiect geometric definită în Cap. I rezultă echivalența definițiilor, dacă ținem seama că figurile considerate, puncte, linii, suprafețe sunt generice, deci au un număr de proprietăți comune caracteristice.

[2]) Acad. *N. D. Papalexi* (redactor). Curs de Fizică, vol. I Ed. Tehnică, București, 1951, p. 147.

Scanned with OKEN Scanner

Deformarea elementelor este reprezentabilă geometric printr'un elipsoid, care este obiectul geometric, în care se transformă o sferă unitate prin deformarea omogenă.

Se arată că deformările pot fi caracterizate printr'o mărime geometrică asociată triedrului ortogonal, format de axele elipsoidului, numite direcţii principale. Această mărime geometrică, reprezentând o mărime fizică, ce caracterizează fenomenul deformării elementare, este un *tensor*.

Ceeace este important de observat în această cercetare geometrică a mărimilor fizice, este faptul că *obiecte geometrice, care apar într'un anumit fenomen, şi mai ales mărimile geometrice corespunzătoare, se regăsesc şi în alte fenomene, care nu au la prima vedere nicio înrudire.* Astfel, tensorii se găsesc în Elasticitate ca şi în Electromagnetism, cu semnificaţii fizice speciale, dar aceleaşi din punct de vedere geometric.

Din această cauză, orice metodă matematică, aplicabilă unei mărimi geometrice, poate fi folosită în studiul teoretic al tuturor fenomenelor, în care intervine acea mărime caracteristică.

In particular, metodele vectoriale sunt aplicabile în studiul fenomenelor caracterizate prin mărimi vectoriale, bivectoriale, trivectoriale, unde introduc ordine, simplicitate şi claritate.

Aceasta însă nu exclude folosirea altor metode; dimpotrivă, îmbinând metodele vectoriale şi analitice, iar uneori înlocuind metode vectoriale prin metode tensoriale, atunci când primele devin greoaie, se obţin rezultate mai profunde şi mai precise.

In cele ce urmează, vom arăta pe un număr de exemple, cum se aplică, atât punctele de vedere prezentate mai sus, cât şi metodele vectoriale, în studiul unora din fenomenele mecanice clasice cele mai importante.

## A. APLICAŢII LA CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

In Cinematică, unde mişcarea este considerată, fără a se ţine seama de forţe, intervin relaţii spaţiale şi temporale între corpurile în mişcare. Procesul de geometrizare a corpurilor este foarte înaintat.

„Cinematica nu este altceva decât o geometrie, în care timpul serveşte drept variabilă independentă. Obiectul mobil este important în Cinematică numai prin forma şi poziţia lui; el este un obiect geometric: un punct, o linie o suprafaţă, un corp sau o mulţime de corpuri, etc.“[1]).

Deaceea, în Cinematică vor interveni mărimi vectoriale, între care vor exista relaţii exprimabile prin mijloacele Algebrei şi Analizei vectoriale în mod simplu şi natural.

### § 209. Viteza unui punct mobil

Când un punct mobil se mişcă, traiectoria sa este hodograful vectorului său de poziţie faţă de un centru oarecare $O$, parametrul fiind timpul. Viteza punctului, considerat ca obiect geometric al mediului, este un vector tangent

[1]) *G. C. Suslov*, Op. cit. p. 48.

Scanned with OKEN Scanner

la traiectorie, orientat în sensul parametrului crescător, deci în sensul circulaţiei pe traiectorie.

Notând ecuaţia traiectoriei prin

$$\bar{r}=\bar{r}(t),$$

viteza va fi dată de vectorul

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}},$$

care este independent de alegerea punctului de reper $O$.

Exprimând arcul $s$ în funcţie de $t$, vom putea scrie

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{d\bar{r}}{ds}=v\bar{t};\quad v=\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|=\frac{ds}{dt},\qquad (1,VII)$$

dacă notăm prin $\bar{t}$ versorul tangentei la traiectorie.

In aplicaţii intervin des componentele vitezei pe anumite direcţii fixe sau mobile. Fie $\bar{p}=\bar{p}(t)$ versorul unei direcţii. Proiecţia ortogonală a lui $\bar{v}$ pe această direcţie este $\overline{ap}$ (fig. 199). Vom evalua această proiecţie scriind:

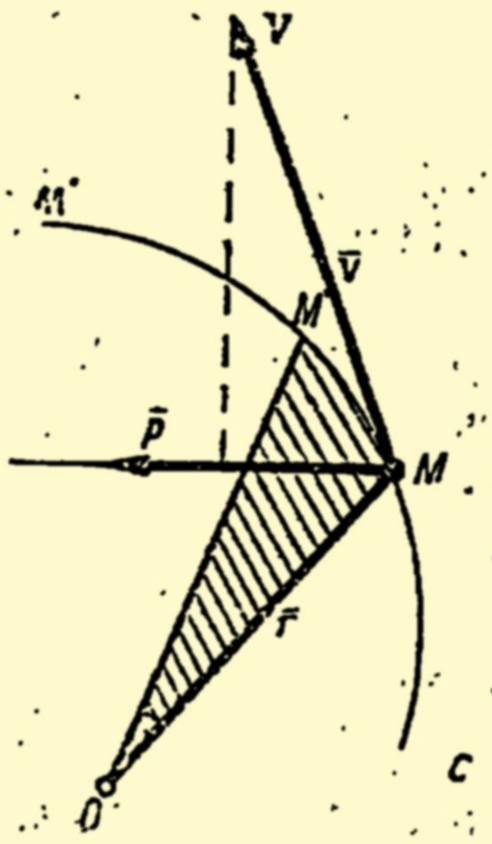


Fig. 199

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\bar{p})=\frac{d\bar{r}}{dt}\bar{p}+\bar{r}\frac{d\bar{p}}{dt},$$

de unde

$$\bar{v}\bar{p}=\frac{d}{dt}(\bar{r}\bar{p})-\bar{r}\frac{d\bar{p}}{dt}.\qquad (2,VII)$$

Introducând un triedru fundamental ortogonal $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, expresia vitezei va fi

$$\bar{v}=\bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}=\bar{i}\dot{x}+\bar{j}\dot{y}+\bar{k}\dot{z}.\qquad (3,VII)$$

Componentele pe direcţiile fundamentale se pot deduce din (2,VII) făcând $\bar{p}=\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.

Alegerea unui sistem cartezian ortogonal nu este obligatorie, ci se poate utiliza un triedru oarecare, sau chiar un sistem de coordonate curbilinii în spaţiu, deoarece viteza este un vector legat de punctul mobil.

Presupunând punctul material liber, coordonatele sale curbilinii, $q^1$, $q^2$, $q^3$ vor fi funcţii de $t$. Deoarece, în Mecanică este adesea necesar să folosim coordonate curbilinii, vom presupune că mişcarea se face pe o traiectorie de ecuaţie

$$\bar{r}=\bar{r}(q^1,q^2,q^3),$$

unde $q^i=q^i(t)$ sunt funcţii de $t$. Vom nota coordonatele curbilinii cu indici superiori, folosind notaţia tensorială concomitent cu notaţia obişnuită a parametrilor $q^i$, care se mai numesc şi *parametrii lui Lagrange*.

Vom avea

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^1}\frac{dq^1}{dt}+\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^2}\frac{dq^2}{dt}+\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^3}\frac{dq^3}{dt}=\dot{\bar{r}}.$$

Punând pentru uşurinţă

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} = \bar{r}_i; \quad \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \tag{4,VII}$$

expresia lui $\bar{v}$, scrisă condensat, va fi

$$\bar{v} = \bar{r}_i \dot{q}^i. \tag{5,VII}$$

Vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ fiind liniar independenţi; vom avea

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 = \frac{D(x, y, z)}{D_1(q^1, q^2, q^3)} \neq 0$$

în toate punctele interioare domeniului de definiţie al funcţiei $\bar{r}(q^1, q^2, q^3)$.

Dacă alegem vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ ca bază, la care raportăm vectorii în punctul $M$, din formula (5,VII) deducem că expresiile

$$v^i = \dot{q}^i$$

reprezintă componentele contravariante ale vitezei faţă de această bază. Forma metrică fundamentală va fi

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} dq^i\right)^2 = \bar{r}_i \bar{r}_j \, dq^i \, dq^j,$$

de unde, folosind notaţia tensorială din formula (136,III) relativă la metrica euclidiană, vom scrie:

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad \text{cu} \quad g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j. \tag{6,VII}$$

Pătratul modulului vitezei va fi

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = Q(q^1, q^2, q^3; \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3), \tag{7,VII}$$

unde $Q$ reprezintă o *formă pătratică* în variabilele $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3$.

Notând cu $g^{ij}$ minorii normalizaţi ai elementelor $g_{ij}$ din determinantul

$$g = |g_{ij}|,$$

care este diferit de zero, deoarece, în baza formulei lui Gram, $g$ este tocmai pătratul determinantului $\frac{D(x, y, z)}{D(q^1, q^2, q^3)} \neq 0$, *componentele covariante ale vitezei* vor fi, conform cu (183,III)

$$v_i = g_{ij} v^j = g_{ij} \dot{q}^j.$$

Vectorii

$$\bar{r}^j = g^{kj} \bar{r}_k$$

formează baza reciprocă bazei $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$.

Cum

$$g_{ij} \dot{q}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}^i},$$

Scanned with OKEN Scanner

componentele covariante ale vectorului viteză se pot scrie

$$v_l = g_{lj} v^j = g_{lj} \dot{q}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}^l} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} v^2. \qquad (8,\text{VII})$$

*Trebue să observăm că cele două baze nu sunt în general formate din versori.* Dacă în loc de $\bar{r}_l$ folosim versorii $\bar{\rho}_l$ ai acestor vectori, componentele vor fi respectiv:

$$v^i = |\bar{r}_i| \dot{q}^i = \sqrt{g_{ii}}\, \dot{q}^i; \quad v_l = \frac{1}{|\bar{r}_l|} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}^l} = \bar{v} \cdot \frac{\bar{r}_l}{|\bar{r}_l|} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{r}_l}{\sqrt{g_{ll}}} \text{ (fără sumare)}, \qquad (9,\text{VII})$$

deoarece

$$\bar{r}_l^2 = \bar{r}_l \bar{r}_l = g_{ll},$$

iar

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}^l} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} v^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} \bar{v} \bar{v} = \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}^l} = \bar{v} \bar{r}_l,$$

conform cu (5,VII). Componentele covariante sunt proiecţiile ortogonale ale vectorului $\bar{v}$ pe direcţiile fundamentale $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$.

In cazul particular, când vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ sunt ortogonali, vom avea

$$g_{ij} = \delta_{ij} |\bar{r}_i| |\bar{r}_j|; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0; & (i \neq j) \\ 1; & (i = j) \end{cases}$$

şi deci

$$v_i = \frac{g_{ij} \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{|\bar{r}_i| |\bar{r}_j| \delta_{ij} \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ii}}} = \sqrt{g_{ii}}\, \dot{q}^i \text{ (fără sumare după } i)$$

de unde

$$v_i = v^i.$$

*Componentele covariante şi contravariante ale vitezei vor fi în acest caz particular egale.* Pătratul vitezei va fi

$$v^2 = g_{ij} q^i \dot{q}^j = \delta_{ij} |\bar{r}_i| |\bar{r}_j| \dot{q}^i \dot{q}^j = \bar{r}_1^2 (\dot{q}^1)^2 + \bar{r}_2^2 (\dot{q}^2)^2 + \bar{r}_3^2 (\dot{q}^3)^2 =$$

$$= g_{11} (\dot{q}^1)^2 + g_{22} (\dot{q}^2)^2 + g_{33} (q^3)^2. \qquad (10,\text{VII})$$

Componentele contravariante $\dot{q}^i$ se numesc *viteze generalizate.* Când coordonata curbilinie $q^l$ este un unghi, viteza generalizată $\dot{q}^l$ se mai numeşte şi *viteză unghiulară.*

**Exemplu.** *Viteza în coordonate cilindrice.* In practică, notaţia tensorială nu este indicată, în cazul sistemelor de coordonate particulare, cel puţin în cazul a două sau trei variabile. Vom pune deci:

$$x = \rho \cos\theta; \quad y = \rho \sin\theta; \quad z = z.$$

Coordonatele cilindrice vor fi

$$q^1 = \rho; \quad q^2 = \theta; \quad q^3 = z.$$

$$\bar{r} = \bar{i}\rho \cos\theta + \bar{j}\rho \sin\theta + \bar{k}z;$$

$$\bar{r}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \bar{i} \cos\theta + \bar{j} \sin\theta;$$

$$\bar{r}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\bar{i}\rho \sin\theta + \bar{j}\rho \cos\theta;$$

$$\bar{r}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^3} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Luând ca bază vectorii $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, care sunt ortogonali, componentele contravariante ale vitezei vor fi $\dot{\rho}$, $\dot{\theta}$, $\dot{z}$. Vom avea

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2;$$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

Dacă luăm ca bază sistemul format din versorii vectorilor $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, componentele vitezei vor fi, conform cu (9,VII):

$$v^1 = |\bar{r}_1|\dot{q}^1 = \dot{\rho}; \quad v^2 = |\bar{r}_2|\dot{q}^2 = \rho\dot{\theta}; \quad v^3 = |\bar{r}_3|\dot{q}^3 = \dot{z},$$

componentele covariante coincizând cu cele contravariante.

Prin urmare, dacă notăm cu $\bar{e}_\rho$, $\bar{e}_\theta$, $\bar{e}_z$ versorii ortogonali ai primei baze, vom avea

$$\bar{v} = \dot{\rho}\bar{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\bar{e}_\theta + \dot{z}\bar{e}_z.$$

O mărime geometrică, dedusă din viteză, este *viteza areolară*, care este un bivector. Ea se defineşte considerându-se bivectorul format de două raze vectoare vecine $\bar{r}$ şi $\bar{r}+\Delta\bar{r}$. Vom avea

$$(\bar{r}, \bar{r}+\Delta\bar{r}) = (\bar{r}, \bar{r}) + (\bar{r}, \Delta\bar{r}) = (\bar{r}, \Delta\bar{r}).$$

Acest bivector este reprezentat prin produsul vectorial $\bar{r}\times\Delta\bar{r}$. Vom numi *viteză areolară în raport cu centrul O*, mărimea

$$\bar{\mathfrak{B}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{2}\frac{\bar{r}\times\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}. \qquad (11,VII)$$

Se vede că viteza areolară poate fi considerată ca *dublul momentului vitezei în raport cu centrul O*. Componentele sale pe cele trei axe ale unui sistem cartezian ortogonal sunt

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}); \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}); \quad \mathfrak{B}_3 = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (12,VII)$$

## § 210. Acceleraţia unui punct mobil

O a doua mărime cinematică fundamentală, reprezentabilă printr'un vector, este acceleraţia, care este derivata în raport cu timpul a vectorului viteză. Vom avea deci

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \ddot{\bar{r}}.$$

Ţinând seama de expresia (1,VII) a vitezei, vom scrie

$$w = \frac{d}{dt}(v\bar{t}) = \frac{dv}{dt}\bar{t} + v\frac{d\bar{t}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

iar din formulele lui Frenet vom deduce

$$\bar{w} = \frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}. \qquad (13,VII)$$



Scanned with OKEN Scanner

Suntem astfel conduşi să legăm de mişcarea unui punct triedrul principal mobil, format din vectorii $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, la care vom raporta acceleraţia. Deoarece $\bar{w}$ nu are componente pe binormală, deducem imediat (fig. 200):

*Acceleraţia se găseşte în planul osculator la traiectorie în punctul mobil M.*

Ea este suma geometrică a vectorilor: $\frac{dv}{dt}\bar{t}$, numit *acceleraţie tangenţială* şi $\frac{v^2}{\rho}\bar{n}$, numit *acceleraţie normală* sau *centripetală.*

Componenta normală a acceleraţiei este totdeauna în concavitatea curbei, după cum rezultă din discuţia semnului curburii (§ 170).

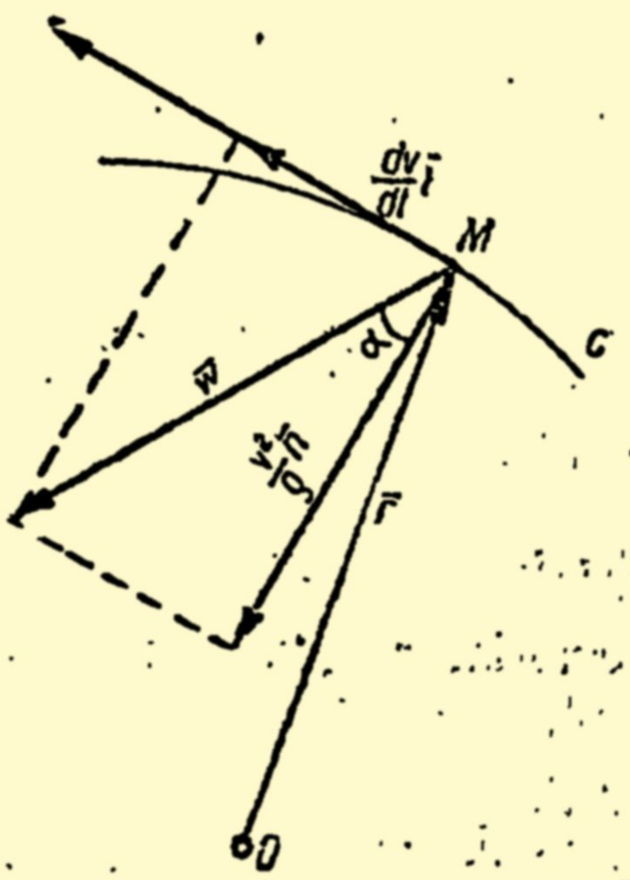



Fig. 200

Modulul acceleraţiei va fi

$$w=\sqrt{v^2+\frac{v^4}{\rho^2}}, \qquad (14,VII)$$

iar unghiul $\alpha$ format de $\bar{w}$ cu normala principală este dat de formula

$$\cos\alpha=\frac{\bar{w}\bar{n}}{w}=\frac{v^2}{\sqrt{\rho^2v^2+v^4}}.$$

Componenta acceleraţiei pe o direcţie variabilă în timp, de versor $\bar{p}(t)$ va fi $\bar{w}\bar{p}$ şi vom putea scrie

$$\overline{wp}=\frac{d}{dt}(\bar{v}\,\bar{p})-\bar{v}\frac{d\bar{p}}{dt}. \qquad (15,VII)$$

Dacă, în particular, luăm $\bar{p}=\bar{t}$, $\bar{n}$, regăsim acceleraţiile tangenţială şi normală.

Raportând acceleraţia la un triedru ortogonal fix $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, vom avea

$$\bar{w}=\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k}.$$

In studiul mişcării sistemelor de puncte materiale, raportarea acceleraţiei la un sistem de coordonate curbilinii joacă un rol foarte important, deoarece conduce la ecuaţiile Dinamicei analitice, stabilite de Lagrange.

Folosind un astfel de sistem, obţinem în fiecare punct al domeniului $D$ din spaţiu, în care acest sistem există, un sistem de coordonate local, format de triedrul $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ dat de (4,VII). Ca şi viteza, acceleraţia va avea în acest sistem cartezian oblic componente contravariante şi covariante, dar spre deosebire de viteză, *componentele covariante vor avea o expresie mai simplă.*

Fiind dat un vector $\bar{V}$, componentele sale contravariante şi covariante se obţin imediat prin formulele cunoscute

$$V^l=\bar{V}\bar{r}^l; \quad V_l=\bar{V}\bar{r}_l,$$

unde $\bar{r}^l$ sunt reciprocii vectorilor $\bar{r}_l$ şi vom avea

$$\bar{r}_l\bar{r}_j=g_{lj}; \quad \bar{r}^l\bar{r}^j=g^{lj}.$$

In cazul vectorului acceleraţie, componentele covariante vor fi

$$w_l=\bar{w}\,\bar{r}_l$$

Scanned with OKEN Scanner

și le vom putea calcula prin formula (15,VII), scriind

$$w_i = \bar{w}\bar{r}_i = \frac{d}{dt}(\bar{v}\,\bar{r}_i) - \bar{v}\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \bar{v}\frac{d\bar{r}_i}{dt}. \qquad (16,VII)$$

Fiindcă $\bar{r}_i$ nu este în general versor, vom obține componente proporționale cu cele ce corespund unei baze de versori și care sunt

$$\frac{w_i}{|\bar{r}_i|} = \frac{1}{|\bar{r}_i|}\left[\frac{d}{dt}(\bar{v}\,\bar{r}_i) - \bar{v}\frac{d\bar{r}_i}{dt}\right] = \frac{\bar{w}\,\bar{r}_i}{|\bar{r}_i|} \qquad (17,VII)$$

cu

$$|r_i| = \sqrt{g_{ii}}.$$

Să calculăm termenul $\bar{v}\frac{d\bar{r}_i}{dt}$ ținând seama că $\frac{d\bar{r}_i}{dt}$ este o derivată totală, în timpul mișcării, $q^i$ fiind funcții de timp:

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial q^i \partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial q^i \partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial q^i \partial q^3}\dot{q}^3 = \bar{r}_{ij}\dot{q}^j.$$

Insă, derivând parțial în raport cu $q^i$ expresia (5,VII) a vitezei, vom avea

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\bar{v} = \frac{\partial}{\partial q^i}(\bar{r}_1\dot{q}^1 + \bar{r}_2\dot{q}^2 + \bar{r}_3\dot{q}^3) = \bar{r}_{i1}\dot{q}^1 + \bar{r}_{i2}\dot{q}^2 + \bar{r}_{i3}\dot{q}^3 = \bar{r}_{ij}\dot{q}^j,$$

de unde relația

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial q^i}.$$

Revenind la termenul urmărit, vom putea scrie

$$\bar{v}\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial q^i}.$$

In aceste condiții, formula (16,VII), în care ținem seama de expresia (8,VII) a lui $v_i$, devine

$$w_i = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial\dot{q}^i}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial q^i}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial\dot{q}^i}\right) - \frac{\partial Q}{\partial q^i}\right], \qquad (18,VII)$$

unde $Q$ este forma pătratică (7,VII).

Componentele față de baza formată cu versorii bazei $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$, vor fi

$$\frac{1}{2|\bar{r}_i|}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial\dot{q}^i}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial q^i}\right] = \frac{w_i}{|\bar{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}w_i \quad \text{(fără sumare)} \qquad (19,VII)$$

Componentele contravariante sunt

$$w^i = g^{ij}w_i,$$

însă *în aplicații accelerația intervine, în general, prin componentele sale covariante* (18,VII) sau (19,VII), ultimele fiind proiecțiile sale ortogonale pe axele triedrului fundamental oblic $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$.[1])

---

[1]) Aceasta se vede din expresia lucrului mecanic, care este produsul scalar $\bar{F}d\bar{r}$. Deoarece $d\bar{r}$ este contravariant, $\bar{F}$ trebue să fie covariant.

Scanned with OKEN Scanner

Este interesant de observat modul natural în care aplicaţiile impun introducerea coordonatelor oblice şi considerarea componentelor contravariante şi covariante.

După cum am subliniat, vectorul în sine are caracter invariant; totuşi, în coordonate oblice, sau în general în coordonate curbilinii el se prezintă prin două feluri de componente. Aplicaţiile fizice impun alegerea unuia din aceste două feluri prin rolul pe care îl joacă în desfăşurarea unui fenomen. Astfel, *viteza are în aplicaţii caracter contravariant, pe când acceleraţia apare cel mai des ca un vector covariant de componente* (18,VII) *sau* (19,VII), *în coordonate generalizate.*

Facem observaţia că *expresia acceleraţiei în coordonate curbilinii se deduce dintr'o singură mărime* $v^2$, *deci din forma pătratică fundamentală* (7,VII), *prin care se măsoară elementul liniar* $ds^2$. Prin aceasta, fenomenul de mişcare este legat de Geometria diferenţială în coordonatele curbilinii $q^1, q, ^2q^3$.

Acceleraţia pune în evidenţă o altă mărime bivectorială, *acceleraţia areolară*, care este derivata vitezei areolare $\overline{\mathfrak{B}}$.

$$\overline{\mathfrak{W}} = \frac{d\overline{\mathfrak{B}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\bar{r}\times\bar{v}\right) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{r}}\times\bar{v}+\bar{r}\times\dot{\bar{v}}) = \frac{1}{2}(\bar{v}\times\bar{v}+\bar{r}\times\dot{\bar{v}})$$

de unde

$$\overline{\mathfrak{W}} = \frac{1}{2}(\bar{r}\times\overline{w}). \qquad (20,VII)$$

*Acceleraţia areolară are, ca şi viteza areolară, caracterul de moment:* este dublul momentului acceleraţiei în raport cu centrul $O$.

**Exemplu.** *Acceleraţia în coordonate polare.*
Vectorul de poziţie fiind

$$\bar{r} = r(\bar{i}\cos\theta\sin\varphi + \bar{j}\sin\theta\sin\varphi + \bar{k}\cos\varphi),$$

vom avea

$$\bar{r}_1 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial r} = \bar{i}\cos\theta\sin\varphi + \bar{j}\sin\theta\sin\varphi + \bar{k}\cos\varphi; \quad |\bar{r}_1| = 1;$$

$$\bar{r}_2 = r(\bar{i}\cos\theta\cos\varphi + \bar{j}\sin\theta\cos\varphi - \bar{k}\sin\varphi); \quad |\bar{r}_2| = r.$$

$$\bar{r}_3 = r(-\bar{i}\sin\theta\sin\varphi + \bar{j}\cos\theta\sin\varphi); \quad |\bar{r}_3| = r\sin\varphi;$$

Cum $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ sunt ortogonali, vom avea

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = \bar{r}_1^2 dr^2 + \bar{r}_2^2 d\varphi^2 + \bar{r}_3^2 d\theta^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\, d\theta^2;$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2.$$

Luând ca bază vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$, componentele covariante ale acceleraţiei, conform cu (18,VII), în care am pus

$$q^1 = r; \quad q^2 = \varphi; \quad q^3 = \theta,$$

vor fi

$$w_1 = \frac{d}{dt}(\dot{r}) - r\sin^2\varphi - r\dot{\varphi}^2;$$

$$w_2 = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) - r^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2;$$

$$w_3 = \frac{d}{dt}(r^2\sin^2\varphi\dot{\theta}),$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă luăm ca bază triedrul format cu versorii primei baze, componentele acceleraţiei vor fi

$$w_r=\ddot{r}-r\sin^2\varphi-r\dot{\varphi}^2;\quad w_\varphi=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})-r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2;$$

$$w_\theta=\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\varphi\dot{\theta}).$$

## § 211. Aplicaţii cinematice

**Aplicaţia 1.** *Vectorii alunecători şi viteza areolară.* Vectorul viteză $\bar{v}$ este un vector legat de punctul mobil, iar viteza areolară $\bar{\mathfrak{V}}$, ca moment, este legată de centrul $O$. Considerând $\bar{v}$ ca vector liber, $\bar{v}$ şi $\bar{V}$ pot fi interpretaţi drept coordonate ale unui vector alunecător aşezat pe tangenta la traiectorie în punctul mobil $M$;

$$\bar{v};\quad 2\bar{\mathfrak{V}}=(\bar{r}\times\bar{v}).$$

Deasemenea, acceleraţia şi acceleraţia areolară definesc un vector alunecător de coordonate

$$\bar{w};\quad 2\bar{\mathfrak{W}}=(\bar{r}\times\bar{w}).$$

Cum

$$\bar{w}=\dot{\bar{v}};\quad \bar{\mathfrak{W}}=\dot{\bar{\mathfrak{V}}},$$

putem spune că *derivata vectorului alunecător, definit de viteză, este vectorul alunecător, definit de acceleraţie.*

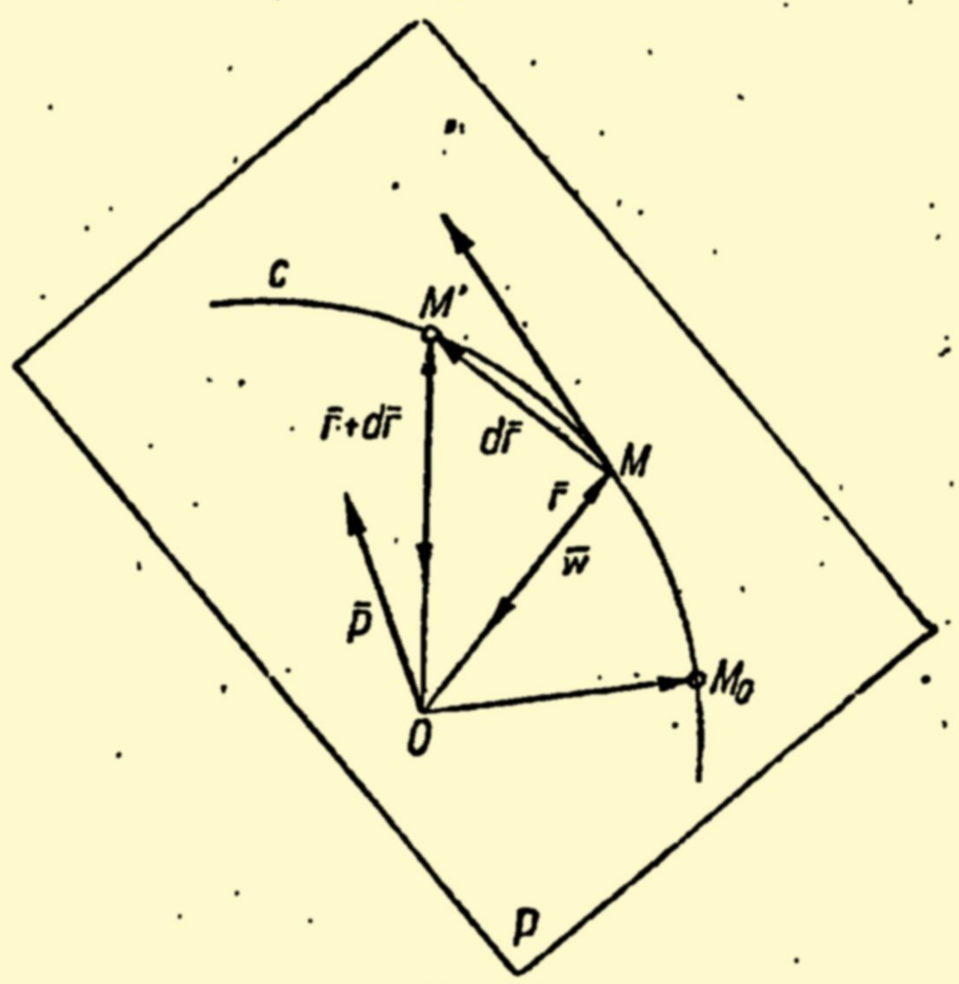


Fig. 201

**Aplicaţia 2.** *Mişcări centrale (keplериene).* Mişcarea unui punct, a cărui acceleraţie este un vector, care trece printr'un punct fix $O$, se numeşte *mişcare centrală sau keplerіană.* Este cazul mişcării planetelor după legile lui Kepler.

Alegând punctul $O$ ca reper (fig. 201), pentru ca acceleraţia $\bar{w}$ să aibă direcţia lui $\bar{r}$, este necesar şi suficient ca

$$\bar{r}\times\bar{w}=\bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=0.$$

Cum însă

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d\bar{r}}{dt}+\bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2},$$

condiţia de coliniaritate devine

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=0$$

şi se poate integra imediat, obţinând relaţia

$$\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{A}\qquad(21,\text{VII})$$

(unde $\bar{A}$ este un vector constant).

Comparând cu (11,VII), deducem proprietatea: *Viteza areolară în mişcările centrale este un bivector constant.*

Înmulţind scalar cu $\bar{r}$ ambii membri ai relaţiei (21,VII), avem:

$$\bar{A}\bar{r}=0,$$

deci: *Traiectoriile mișcărilor centrale sunt curbe plane, situate în plane care trec prin centrul O.*

Modulul produsului vectorial $\bar{r}\times d\bar{r}$ este dublul ariei triunghiului format de două raze vectoare vecine. Considerând aria $S$ cuprinsă între o rază inițială $OM$ și raza $OM'$, vom avea

$$dS=\frac{1}{2}\left|r\times d\bar{r}\right|,$$

deci

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left|\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right|=\frac{A}{2};\quad S=\frac{A}{2}\,t. \tag{22,VII}$$

Prin urmare: *Într'o mișcare centrală, aria descrisă în unitatea de timp este constantă.*

Această proprietate constitue legea ariilor în mișcarea kepleriană a planetelor și sub formă finită se enunță astfel: *aria descrisă de raza vectoare, începând dela o poziție inițială $OM_0$, este proporțională cu timpul.* Ea justifică introducerea noțiunii de viteză areolară, deoarece aceasta apare sub forma pseudo-scalară într'un fenomen atât de important ca mișcarea planetelor. Facem totodată observația că legea ariilor se prezintă sub forma bivectorială (21,VII), din care deducem și proprietatea tot atât de importantă a traiectoriilor planetelor de a fi curbe plane, planele eclipticelor trecând prin centrul de atracție $O$.

Aplicația 3. *Accelerația în mișcarea planetelor.* Problema principală a Mecanicei este determinarea mișcării din relațiile diferențiale ce leagă diversele mărimi fizice, care intervin în acest fenomen; dintre acestea accelerația este caracteristică. Se poate pune însă și problema inversă, de a determina legile diferențiale ale mișcării cunoscând o formă finită a ecuațiilor sale.

Astfel, se poate deduce legea newtoniană a atracției universale din legile mișcării kepleriene. Sub formă cinematică, problema constă în determinarea accelerației unei mișcări plane, traiectoria fiind o conică, viteza areolară în raport cu unul din focare fiind constantă.

Folosind notațiile consacrate, ecuația traiectoriei, care este o conică, va fi în coordonate polare

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}, \tag{23,VII}$$

unde $r$ este raza vectoare, $\theta$ — unghiul făcut cu o axă a conicei, $e$ — excentricitatea, iar $p$ — parametrul ei.

Ecuația vectorială a conicei va fi

$$\bar{r}=r(\bar{i}\cos\theta+\bar{j}\sin\theta),$$

unde $r$ este dat de (23,VII).

Vom avea

$$d\bar{r}=dr(\bar{i}\cos\theta+\bar{j}\sin\theta)+r(-\bar{i}\sin\theta+\bar{j}\cos\theta)\,d\theta;$$

$$\bar{r}\times d\bar{r}=\bar{k}r^2d\theta,$$

deci, ținând seama de reciproca legii ariilor (22,VII)

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left|\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{A}{2};$$

$$r^2\dot{\theta}=A. \tag{24,VII}$$

Componentele accelerației în coordonate polare se deduc din cele în coordonate cilindrice, luând $z=0$ și sunt:

$$w_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2;\qquad w_\theta=\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta}).$$

Ținând seama de (24,VII), vom avea $w_\theta=0$, ceeace arată că *accelerația trece prin focar.*

Pentru calculul lui $w_r$ în funcție de $\theta$, observăm că

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\,\dot{\theta}=\frac{A}{r^2}\,\frac{dr}{d\theta}=-A\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă ținem seama de legea ariilor (24,VII). Derivând încă odată în raport cu $t$, avem

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta},$$

de unde, folosind rezultatele precedente, deducem

$$\ddot{r} = -\frac{A^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

În același timp

$$r\dot{\theta}^2 = r\frac{A^2}{r^4} = \frac{A^2}{r^3},$$

ceeace conduce la expresia următoare pentru $w_r$ :

$$w_r = -\frac{A^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

Ținând seama de ecuația (23,VII) a traiectoriei, vom avea

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1+e\cos\theta}{p}\right) = -\frac{e}{p}\cos\theta$$

și cum

$$e\cos\theta = \frac{p}{r} - 1,$$

obținem relația

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

Expresia definitivă a lui $w_r$ va fi deci

$$w_r = -\frac{A^2}{p}\frac{1}{r^2},$$

Prin urmare, în mișcarea planetelor, accelerația trece prin focar și este invers proporțională cu pătratul distanței punctului mobil la centrul de atracție, conform cu legea lui Newton.

## B) APLICAȚII LA CINEMATICA SOLIDULUI

Vom considera corpul solid ca un sistem de puncte materiale nedeformabil, deci în care distanțele mutuale ale punctelor rămân invariabile. Un corp solid, care nu este continuu, poate fi complectat cu punctele unui domeniu al spațiului, astfel încât în Cinematică, orice corp solid poate fi considerat ca un mediu nedeformabil, având ca obiect geometric-element punctul[1]).

La un anumit moment punctele solidului coincid cu punctele unui domeniu al spațiului, astfel încât mișcarea solidului revine la coincidența succesivă a punctelor sale cu punctele mediului. Deplasarea solidului este, din acest punct

[1]) A se vedea *G. C. Suslov* Op. cit., Vol, I, p, 85. Acest tratat de mecanică rațională folosește metode vectoriale, pretutindeni unde sunt aplicabile în mod natural, dând astfel un exemplu remarcabil de posibilitățile acestor metode în studiul matematic al fenomenelor fizice.

Scanned with OKEN Scanner

de vedere, o corespondenţă între domeniile ocupate la două momente $t_1$ şi $t_2$, deci o transformare a domeniului $S_1$ în $S_2$. Această transformare depinde deci de parametrul $t$. Mulţimea tuturor transformărilor, care constitue mişcarea unui solid, este *o familie de transformări cu un parametru.*

In Cinematică se arată că solidul poate fi extins la întreg spaţiul, astfel încât mişcările corpurilor solide constitue o familie de transformări ale spaţiului în el însuşi. Când un mediu nedeformabil se mişcă în altul, putem considera şi invers, că al doilea mediu se mişcă în primul. Astfel, mişcarea unui corp ceresc în raport cu pământul, observată de pe acest corp, apare ca o mişcare a pământului în raport cu corpul considerat.

Cele două mişcări se numesc *directă* şi *inversă*, observatorul dintr'un mediu numind directă mişcarea celuilalt faţă de el şi inversă mişcarea sa faţă de cel de al doilea mediu.

Cele mai simple mişcări sunt translaţia şi rotaţia, o deplasare oarecare putând fi considerată ca rezultanta unei translaţii şi a unei rotaţii. Prin aceasta, însă, se stabileşte o trecere dela poziţia iniţială la cea finală, fără a ţine seama de poziţiile intermediare, deci, în general, această deplasare nu va corespunde fenomenului de mişcare în timp.

Cu toate acestea, dacă se consideră deplasarea într'un interval de timp arbitrar de mic $dt$, obţinem o aproximare a mişcării cu atât mai bună, cu cât $dt$ este mai mic. Prin însumarea acestor *deplasări elementare* şi folosind un proces de trecere la limită, corespunzând integrării unor ecuaţii diferenţiale, obţinem apoi formulele matematice ale transformărilor ce reprezintă mişcarea punctelor solidului, studiul complect al mişcărilor sub acţiunea forţelor formând obiectul Dinamicei.

## § 212. Translaţia şi noţiunea de grup de transformări

Dacă toate punctele spaţiului capătă aceeaşi deplasare, definită printr'un vector $\bar{V}$, spunem că un corp oarecare a executat *o translaţie.* Transformarea corespunzătoare este determinată prin formula

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{V}, \qquad (25,VII)$$

unde $\bar{r}, \bar{r}^*$ reprezintă vectorii de poziţie ai unui punct $M$, înainte şi după deplasare.

Dacă $\bar{\rho}$ este vectorul de poziţie al altui punct $N$, vom avea

$$\bar{\rho}^* - \bar{r}^* = \bar{\rho} - \bar{r},$$

deci dreapta $MN$ este paralelă cu $M^*N^*$, iar distanţa dintre cele două puncte rămâne invariantă prin translaţie.

Translaţia nu deformează deci corpurile şi este un exemplu de deplasare a corpurilor solide. Când ea se face în timp, avem un exemplu de mişcare a corpului solid.

Să presupunem că efectuăm două translaţii succesive. Vom avea

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{V}_1; \quad \bar{r}_2 = r_1 + \bar{V}_2,$$

deci

$$\bar{r}_2 = \bar{r} + (\bar{V}_1 + \bar{V}_2) = \bar{r} + \bar{W}. \qquad (26,VII)$$

Scanned with OKEN Scanner

Numind *produs* transformarea rezultantă a două transformări, vom putea spune: *Produsul a două translaţii este tot o translaţie.*

Din formula (25,VII) deducem

$$\bar{r}=\bar{r}^*-\overline{V}=\bar{r}^*+(-\overline{V}). \qquad (27,VII)$$

Considerând deci punctele solidului ca fixe şi punctele spaţiului ca mobile, adică mişcarea inversă, punctul $\bar{r}^*$ ajunge în punctul $\bar{r}$ printr'o translaţie de vector $-\overline{V}$.

Putem considera *inversa* unei mişcări şi în general, a unei transformări, ca transformarea care readuce punctele transformate $M^*$ în vechile poziţii $M$. Vom avea deci următoarea proprietate: *Inversa unei translaţii este tot o translaţie.*

Când o mulţime de transformări ale spaţiului are proprietăţile următoare:

1) *produsul a două transformări ale mulţimii este o transformare aparţinând mulţimii considerate;*

2) *fiecărei transformări din mulţime îi corespunde o transformare inversă, făcând parte din mulţime,*

spunem că acea mulţime de transformări constitue un *grup de transformări ale spaţiului.*

Prin urmare: *Translaţiile formează un grup de transformări ale spaţiului, numit grupul translaţiilor.*

Printre translaţii putem considera şi *transformarea identică*

$$\bar{r}^*=\bar{r},$$

care lasă nemişcate toate punctele spaţiului, deci grupul translaţiilor conţine şi translaţia nulă.

In general, *produsul a două transformări nu este comutativ,* ceeace înseamnă că, efectuând cele două transformări succesive în ambele moduri, obţinem două transformări diferite[1]). Când transformările unui grup sunt comutative, grupul se numeşte *abelian* sau *comutativ.*

---

[1]) Fie transformarea liniară nesingulară $A$.

$$\left.\begin{aligned} y^1&=a_1^1x^1+a_2^1x^2;\\ y^2&=a_1^2x^1+a_2^2x^2; \end{aligned}\right\}\quad (a_1^1a_2^2-a_1^2a_2^1\neq 0),$$

care stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele unui plan; fie deasemenea, în acelaşi plan, transformarea nesingulară $B$

$$\left.\begin{aligned} z^1&=b_1^1y^1+b_2^1y^2;\\ z^2&=b_1^2y^1+b_2^2y^2; \end{aligned}\right\}\quad (b_1^1b_2^2-b_1^2b_2^1\neq 0).$$

Dacă transformarea $A$ se aplică punctului $M(x^1, x^2)$, se obţine punctul $N=A(M)$; dacă transformarea $B$ se aplică punctului $N$, se obţine punctul $P$, dat de $P=B(N)=B[A(M)]$. Un calcul simplu ne arată că transformarea, care ne permite să trecem *direct* dela $M$ la $P$ este transformarea liniară nesingulară $C$

$$\begin{aligned} z^1&=c_1^1x^1+c_2^1x^2;\\ z^2&=c_1^2x^1+c_2^2x^2 \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

*Grupul translaţiilor este abelian.*

In adevăr, din

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{V}_2, \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{V}_2 = \bar{r} + (\bar{V}_1 + \bar{V}_2) \quad \text{şi} \quad \bar{r}_2' = \bar{r}_1' + \bar{V}_1 = \bar{r} + (\bar{V}_2 + \bar{V}_1)$$

deducem

$$\bar{r}_2' = \bar{r}_2$$

ca o consecinţă a comutativităţii adunării vectoriale.

In Cinematica solidului intervin translaţii elementare, când se consideră deplasările elementare ale punctelor spaţiului într'un interval de timp $dt$. Vom avea

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(t+dt) = \bar{r} + d\bar{r} = \bar{r} + \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \bar{r} + \bar{v}(t)\,dt.$$

Vectorul $\bar{v}(t)$ va fi viteza punctului la momentul $t$. Dacă această viteză este aceeaşi în toate punctele spaţiului

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{v}\,dt; \quad d\bar{r} = \bar{v}\,dt \qquad (28,\text{VII})$$

reprezintă o translaţie de vector $\bar{v}\,dt$, deci o *translaţie elementară* a spaţiului.

Compunerea acestor translaţii elementare va fi echivalentă cu compunerea vitezelor.

Considerând toate translaţiile elementare ale spaţiului ca o familie de transformări infinitesimale, definite prin formula (28,VII), obţinem un grup de *transformări infinitesimale* ale spaţiului.

## § 213. Rotaţia elementară

Când un punct $M$ se roteşte în jurul unei axe de versor $\bar{u}$, deplasarea elementară $\delta\bar{r}$ este aproximată prin vectorul $d\bar{r}$ tangent la cercul descris de $M$ (fig. 202). Să observăm că vectorul $\bar{u}$ este axial, deci este determinat printr'un bivector, deoarece depinde de orientarea spaţiului.

---

cu

$$c_1^1 = b_1^1 a_1^1 + b_2^1 a_1^2;$$
$$c_2^1 = b_1^1 a_2^1 + b_2^1 a_2^2;$$
$$c_1^2 = b_1^2 a_1^1 + b_2^2 a_1^2;$$
$$c_2^2 = b_1^2 a_2^1 + b_2^2 a_2^2,$$

sau, mai condensat, $c_j^i = b_k^i a_j^k$. Această transformare se numeşte produsul transformărilor $B$ şi $A$ şi se notează cu $BA$. Dacă transformările se fac în ordine inversă, un calcul analog ne arată că se obţine, plecând tot dela punctul $M$, un punct $Q = A[B(M)]$. Transformarea $\Gamma$, care permite trecerea directă dela $M$ la $Q$, este caracterizată de coeficienţii $\gamma_j^i$, care se calculează ca mai sus. Se obţine

$$\gamma_j^i = a_k^i b_j^k.$$

Numerele $\gamma_j^i$ sunt, în general, diferite de $c_j^i$, deci $BA \neq AB$, sau altfel spus, *grupul transformărilor liniare nesingulare este, în general, necomutativ.*

Vom avea deci

$$d\bar{r} = \lambda(\bar{u} \times \bar{r});$$

$$|d\bar{r}| = IM\, d\theta = r \sin\varphi\, d\theta$$

Cum pe de altă parte

$$|\bar{u} \times \bar{r}| = r \sin\varphi$$

în ipoteza că axa a fost orientată, astfel încât rotația să se facă în sensul pozitiv, vom putea scrie

$$d\bar{r} = d\theta\,(\bar{u} \times \bar{r}), \qquad (29,VII)$$

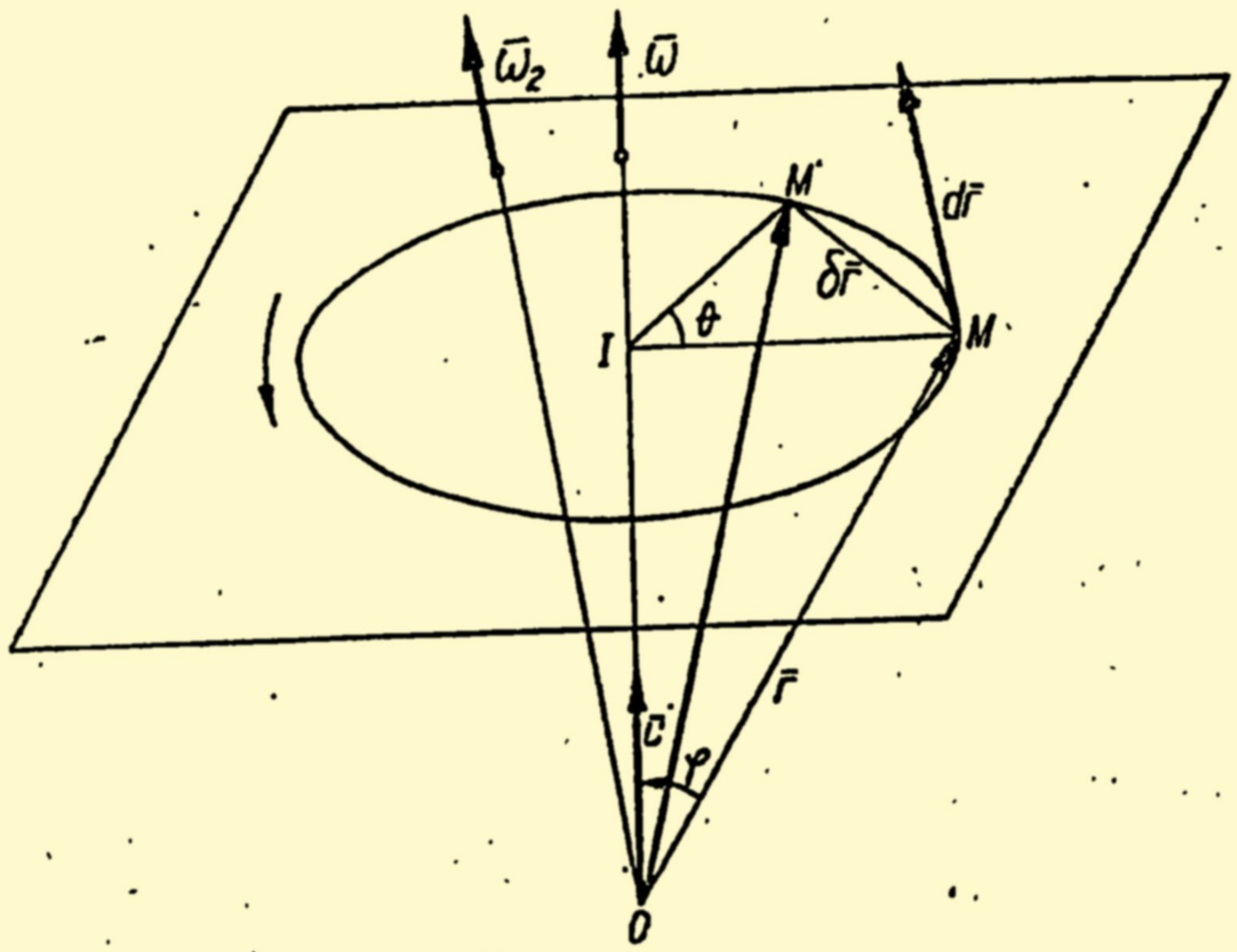



Fig. 202

deci deplasarea elementară este un dublu produs vectorial, adică un vector[1]). Deducem imediat

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\bar{u} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (30,VII)$$

punând

$$\bar{\omega} = \bar{u}\frac{d\theta}{dt} = \omega\bar{u}; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Vectorul axial $\bar{\omega}$ este numit *viteză unghiulară*, iar *viteza liniară* $\bar{v}$ este o mărime vectorială[2]). Deplasarea elementară se pune sub forma

$$\bar{r}^* = \bar{r} + d\theta\,(\bar{u} \times \bar{r}) = \bar{r} + (\bar{\omega} \times \bar{r})\,dt.$$

Să considerăm două rotații elementare, corespunzând la două amplitudini $d\theta_1$, $d\theta_2$ și efectuate în jurul a două axe concurente $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$. Scriind

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + d\theta_1\,(\bar{u}_1 \times \bar{r}); \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_1 + d\theta_2\,(\bar{u}_2 \times \bar{r}_1),$$

---

1) Caracterul vectorial al dublului produs vectorial a fost stabilit în mod special în Cap. III, B, Nota II.

2) $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ este un dublu produs vectorial, deci un vector, deoarece $\bar{\omega}$ este bivectr

produsul acestor rotaţii va fi

$$\bar{r}_2 = \bar{r} + d\theta_1 (\bar{u}_1 \times \bar{r}) + d\theta_2 \bar{u}_2 \times [\bar{r} + d\theta_1 (\bar{u}_1 \times \bar{r})] =$$
$$= \bar{r} + (d\theta_1 \bar{u}_1 + d\theta_2 \bar{u}_2) \times \bar{r} + d\theta_1 d\theta_2 \bar{u}_2 \times (\bar{u}_1 \times \bar{r}).$$

Neglijând termenii de ordin superior în $d\theta_1, d\theta_2$, deplasarea rezultantă devine

$$\bar{r}_2 = \bar{r} + (d\theta_1 \bar{u}_1 + d\theta_2 \bar{u}_2) \times \bar{r} = \bar{r} + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r} dt.$$

Deci: *Produsul a două rotaţii elementare, în jurul a două axe concurente, este tot o rotaţie elementară în jurul unei axe coplanare cu primele două.*

Vitezele de rotaţie se compun după regulile adunării bivectoriale, revenind la compunerea vectorilor viteze unghiulare $\bar{\omega}$. Este uşor de văzut că ordinea celor două rotaţii $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ este indiferentă după neglijarea termenilor de ordin superior, deci compunerea rotaţiilor elementare este comutativă.

Mişcarea inversă unei rotaţii va fi determinată prin expresia lui $\bar{r}$ în funcţie de $\bar{r}^*$. Vom avea

$$\bar{r} = \bar{r}^* - (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt = r^* - \bar{\omega} \times [\bar{r}^* - (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt] dt = r^* - (\bar{\omega} \times \bar{r}^*) dt +$$
$$+ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt^2 \simeq \bar{r}^* - (\bar{\omega} \times \bar{r}^*) dt = \bar{r}^* + (-\bar{\omega} \times \bar{r}^*) dt.$$

*Inversa unei rotaţii elementare este tot o rotaţie elementară în jurul axei* $-\bar{\omega}$.

In concluzie: *Rotaţiile elementare în jurul unor axe concurente formează un grup de transformări infinitesimale ale spaţiului, grup care este abelian.*

Facem observaţia că, deşi rotaţiile finite formează un grup *necomutativ*, această necomutativitate nu apare la infiniţii mici de ordinul întâi.

Caracterul grupal al rotaţiilor elementare rezultă din faptul că aceste deplasări sunt caracterizate prin bivectorii $\bar{\omega}$, care se compun, operaţia revenind la adunarea vitezelor unghiulare $\bar{\omega}$.

Verificarea fizică a acestei proprietăţi a vitezelor unghiulare se obţine prin *pendulul lui Foucault* (fig. 203).

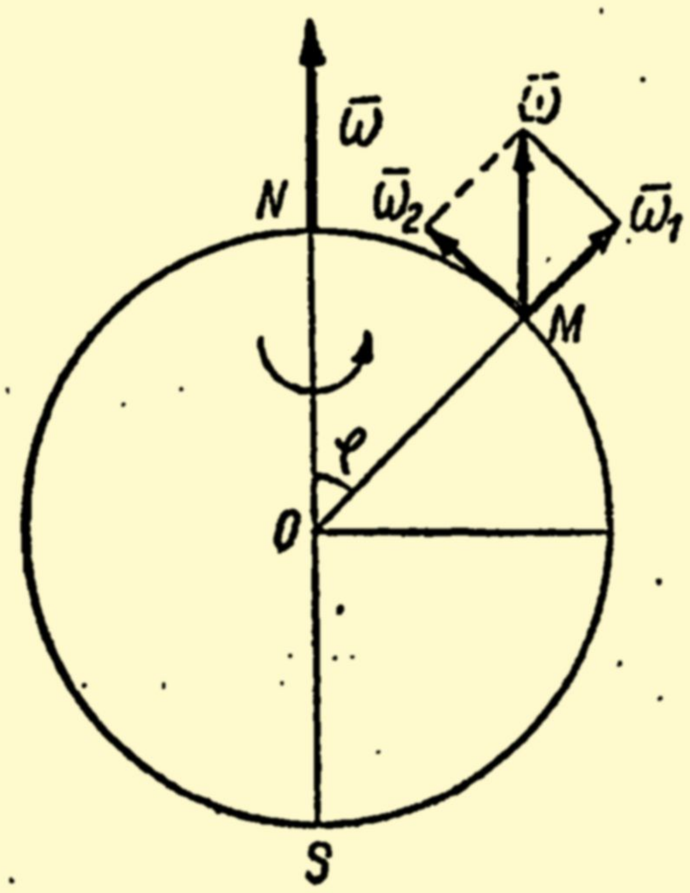


Fig. 203

Viteza de rotaţie a pământului fiind determinată prin vectorul $\bar{\omega} \times \bar{r}$. unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară, aşezat pe direcţia axei polilor şi de modul

$$\omega = \frac{2}{24\,[h]},$$

vom descompune pe $\bar{\omega}$ după direcţiile razei $OM$ şi tangentei la meridianul locului. Rotaţia unui corp, care ocupă domeniul lui $M$ şi este solidar legat de pământ nu poate fi observată. Dacă însă în apropierea lui $M$ există un pendul, planul, în care au loc oscilaţiile, nu se roteşte ca un corp solidar legat de pământ. Observatorul din $M$ va înregistra componenta $\bar{\omega}_1$ a vitezei unghiulare

a pământului sub forma unei rotații aparente a planului oscilațiilor în jurul verticalei locului. Mărimea vitezei unghiulare va fi

$$\omega_1 = \omega \cos \varphi = \frac{2\pi}{24\,[h]} \cos \varphi,$$

unde $\varphi$ este colatitudinea punctului $M$. Perioada pendulului lui Foucault va avea expresia

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{24\,[h]}{\cos \varphi}.$$

## § 214. Deplasarea elementară și mișcarea instantanee a solidului

Poziția unui corp solid în spațiu este determinată prin cunoașterea a trei puncte ale sale necoliniare $I$, $P$, $Q$ (fig. 204).

Dacă $O$ este un punct de reper, iar $M$ un punct oarecare al solidului $S$, vom nota:

$$\overline{OI} = \bar{r}_0; \quad \overline{IP} = \bar{p}; \quad \overline{IQ} = \bar{q}; \quad \overline{IM} = \bar{m}.$$

In timpul mișcării, distanțele mutuale ale punctelor lui $S$ rămânând invariante, vom avea

$$\bar{m}^2 = \text{const}; \quad \bar{p}^2 = \text{const}; \quad \bar{q}^2 = \text{const};$$

$$\bar{p}\bar{q} = \text{const}; \quad \bar{p}\bar{q}\bar{m} = \text{const}. \qquad (31,\text{VII})$$

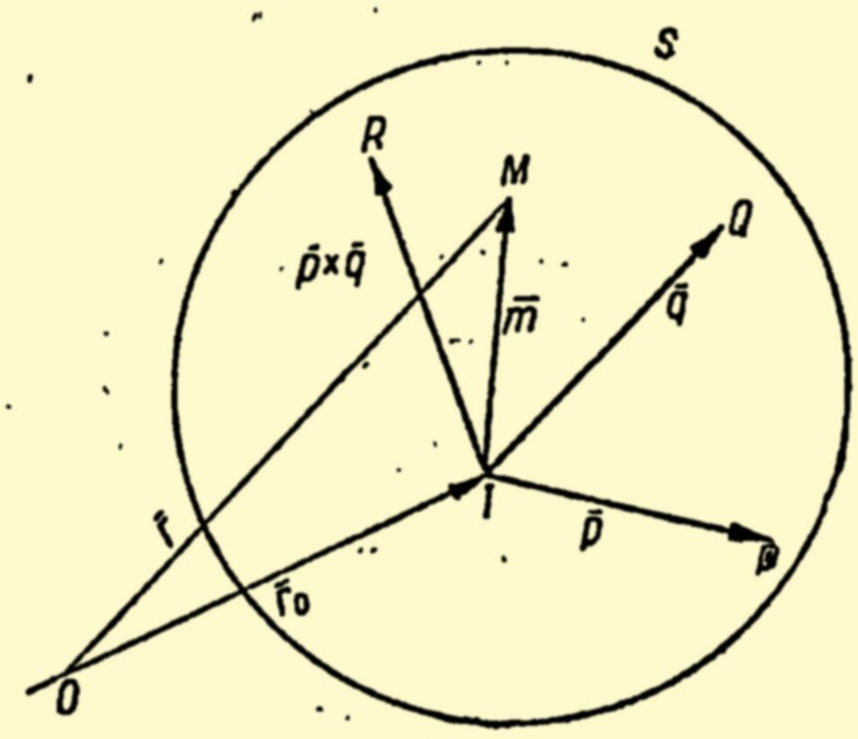



Fig. 204

Vom raporta punctele $M$ la un triedru fundamental indicat de fenomenul studiat și solidar cu corpul, format de vectorii $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{p}\times\bar{q} = \overline{IR}$.

Să calculăm deplasarea elementară $d\bar{r}$ a unui punct oarecare $M$, în funcție de deplasările $d\bar{r}_0, d\bar{p}, d\bar{q}$ ale vectorilor prin care este fixată poziția corpului. Pentru ușurința scrierii, vom calcula întâi derivatele în raport cu timpul: $\dot{\bar{p}}, \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{r}}$.

Practica arătând că deplasările simple ale corpurilor sunt translații și rotații, vom căuta să exprimăm deplasările elementare prin translații și rotații elementare.

Aplicând formula de desvoltare a dublului produs vectorial $(\dot{\bar{p}}\times\dot{\bar{q}})\times\bar{p}$, vom obține

$$(\dot{\bar{p}}\times\dot{\bar{q}})\times\bar{p} = \dot{\bar{q}}(\dot{\bar{p}}\bar{p}) - \dot{\bar{p}}(\dot{\bar{q}}\bar{p}).$$

Din relațiile (31,VII), însă, deducem prin derivare

$$\bar{p}\dot{\bar{p}} = 0; \quad \bar{q}\dot{\bar{q}} = 0; \quad \bar{p}\dot{\bar{q}} = -\bar{q}\dot{\bar{p}};$$

deci vom avea

$$(\dot{\bar{p}}\times\dot{\bar{q}})\times\bar{p} = (\dot{\bar{p}}\bar{q})\dot{\bar{p}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă

$$(\dot{\bar{p}}\bar{q}) \neq 0, \qquad (32,VII)$$

putem rezolva în raport cu $\dot{\bar{p}}$ şi vom avea

$$\dot{\bar{p}} = \frac{\dot{\bar{p}} \times \dot{\bar{q}}}{\dot{\bar{p}}\bar{q}} \times \bar{p} = \bar{\Omega} \times \bar{p},$$

notând cu $\bar{\Omega}$ vectorul

$$\bar{\Omega} = \frac{\dot{\bar{p}} \times \dot{\bar{q}}}{\dot{\bar{p}}\bar{q}}. \qquad (32',VII)$$

Permutând vectorii $\bar{p}$ şi $\bar{q}$ obţinem o formulă analoagă pentru $\dot{\bar{q}}$, astfel încât vom avea

$$\dot{\bar{p}} = \bar{\Omega} \times \bar{p}; \quad \dot{\bar{q}} = \bar{\Omega} \times \bar{q}, \qquad (33,VII)$$

ceeace arată că *vitezele* $\dot{\bar{p}}$ şi $\dot{\bar{q}}$ *sunt viteze liniare de rotaţie în jurul unei axe* $\bar{\Omega}$, *care trece prin I.*

Aceeaşi proprietate o are şi derivata $\dot{\bar{w}}$ a vectorului

$$\bar{w} = \bar{p} \times \bar{q}.$$

In adevăr, ţinând seamă de (33,VII)

$$\dot{\bar{w}} = \dot{\bar{p}} \times \bar{q} + p \times \dot{\bar{q}} = (\bar{\Omega} \times p) \times \bar{q} + \bar{p} \times (\bar{\Omega} \times \bar{q}) =$$
$$= \bar{p}(\bar{\Omega}\bar{q}) - \bar{\Omega}(\bar{p}\bar{q}) + \bar{\Omega}(\bar{p}\bar{q}) - \bar{q}(\bar{\Omega}\bar{p}) = \bar{\Omega} \times (\bar{p} \times \bar{q}). \qquad (34,VII)$$

Raportând punctul $M$ la triedrul nedegenerat $\bar{p}, \bar{q}, \bar{p} \times \bar{q}$, vom putea scrie

$$\bar{m} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{w},$$

unde $\alpha, \beta, \gamma$ sunt trei scalari constanţi, deoarece punctul $M$ este fix în corpul solid.

Derivând în raport cu $t$ şi ţinând seama de (33,VII) şi (34,VII), vom avea:

$$\dot{\bar{m}} = \alpha\dot{\bar{p}} + \beta\dot{\bar{q}} + \gamma\dot{\bar{w}} = \bar{\Omega} \times (\alpha\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{r}) = \bar{\Omega} \times \bar{m},$$

deci şi $\dot{\bar{m}}$ este o viteză de rotaţie în jurul aceleiaşi axe $\bar{\Omega}$, care trece prin $I$.

Cum însă

$$\bar{m} = \bar{r} - \bar{r}_0,$$

deducem

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{m}} = \dot{\bar{r}}_0 + (\bar{\Omega} \times \bar{m}),$$

ceeace arată că distribuţia de viteze în corpul solid este dată de formula

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + (\bar{\Omega} \times \bar{m}), \qquad (35,VII)$$

independentă de alegerea punctului de reper $O$. Formula analoagă pentru deplasarea elementară a unui punct $M$ al solidului va fi

$$d\bar{r} = d\bar{r}_0 + (\bar{\Omega} \times \bar{m})\, dt. \qquad (36,VII)$$

Scanned with OKEN Scanner

Interpretarea acestor formule este următoarea: *Deplasarea elementară a unui corp solid se descompune într'o translaţie elementară de vector* $\bar{v}_0 dt = d\bar{r}_0$ *şi o rotaţie elementară în jurul unei axe* $\bar{\Omega}$, *definită de bivectorul* $(\bar{\Omega} \times \bar{m})\, dt$[1]).

Impărţind cu $dt$ şi făcând pe $dt$ să tindă către zero, obţinem mişcarea instantanee a solidului, adică distribuţia de viteze în deplasarea elementară.

*Mişcarea instantanee a solidului este rezultanta unei translaţii cu viteza* $\bar{v}_0$ *şi a unei rotaţii în jurul unei axe* $\Omega$ *cu viteza unghiulară* $\bar{\Omega}$, *numită viteză unghiulară instantanee.*

Se poate arăta că formula (35,VII) este independentă de alegerea punctului $I$ şi a vectorilor $\bar{p}$ şi $\bar{q}$, viteza unghiulară instantanee $\bar{\Omega}$ fiind aceeaşi, iar viteza de translaţie $\bar{v}_0$ depinzând de alegerea lui $I$[2]).

Distribuţia de viteze în mişcarea instantanee poate fi obţinută considerând un sistem de vectori alunecători, având în raport cu punctul $I$ coordonatele $\bar{\Omega}$ şi $\bar{v}_0$. In acest caz, *viteza unui punct oarecare M este momentul rezultant al acestui sistem în raport cu punctul M. (110,IV).*

In adevăr, putem scrie

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\Omega} \times \bar{m} = \bar{v}_0 + \bar{\Omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_0).$$

Dacă $\bar{v}_0$ este momentul sistemului în raport cu $I$, iar $\bar{\Omega}$ rezultanta generală, $\bar{v}$ va fi momentul în raport cu $M$.

Cum $\bar{\Omega}$ constitue primul invariant, iar $\bar{\Omega}\bar{v}_0$ al doilea invariant al sistemului de vectori alunecători (§ 128), *proiecţia vitezei de translaţie pe viteza unghiulară este independentă de punctul I,* care se mai numeşte şi *pol.*

Dacă, în particular, solidul are un punct fix $I$, deplasarea sa elementară se reduce la o rotaţie elementară în jurul axei $\bar{\Omega}$. Distribuţia de viteze va fi

$$\bar{v} = \bar{\Omega} \times \bar{m}.$$

Punctele situate pe axa $\bar{\Omega}$ au vitezele nule la momentul $t$, iar axa $\bar{\Omega}$ se numeşte *axă instantanee de rotaţie.* In cazul unei deplasări generale, fiecărui pol $I$ îi va corespunde o axă instantanee $\bar{\Omega}$, dar toate aceste axe sunt paralele, iar vitezele unghiulare sunt aceleaşi.

---

[1]) Cum $\bar{\Omega}$ este el însuşi un produs vectorial, $(\bar{\Omega} \times \bar{m})$ este un vector; rotaţia nu depinde de orientarea spaţiului.

[2]) In adevăr, fie $J$ un alt punct al solidului; notăm $\overline{IJ} = \bar{\imath}$; $\overline{OJ} = \bar{\rho}_0$ şi $\overline{JM} = \bar{\mu}$. Relaţia (35,VII), scrisă pentru punctul $J$, ne dă

$$\dot{\bar{\rho}}_0 = \dot{\bar{r}}_0 + (\bar{\Omega} \times \bar{\imath}).$$

Scăzând această relaţie din relaţia (35,VII) şi ţinând seama că $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$ şi $\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_0$, rezultă că

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{\rho}}_0 + (\bar{\Omega} \times \bar{\mu}),$$

analoagă cu (35,VII), însă punctul de referinţă din solidul mobil este $J$. Rezultă totodată şi unicitatea axei $\bar{\Omega}$, căci dacă ar exista o altă axă $\bar{\Omega}_1$, am avea

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{\rho}}_0 + (\bar{\Omega}_1 \times \bar{\mu})$$

şi deci $(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_1) \times \bar{\mu} = 0$, *oricare ar fi vectorul* $\bar{\mu}$, ceeace atrage după sine că $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1$.

Scanned with OKEN Scanner

## § 215. Discuția mișcării instantanee

In considerațiile precedente am presupus, conform cu condiția (32,VII), că $\dot{\bar{p}}\bar{q} = -\bar{p}\dot{\bar{q}} \neq 0$. Dacă însă această condiție nu este îndeplinită, formulele (32′,VII), (33,VII) nu mai sunt aplicabile și este necesar să reluăm raționamentele făcute.

Relațiile

$$\dot{\bar{p}}\bar{q}=0; \quad \bar{p}\dot{\bar{q}}=0$$

pot avea loc într'una din ipotezele următoare:

a) $\dot{\bar{p}}\neq 0$; $\dot{\bar{q}}\neq 0$, deci $\dot{\bar{p}} \perp \bar{q}$ și $\dot{\bar{q}} \perp \bar{p}$;

b) $\dot{\bar{p}}=0$; $\dot{\bar{q}}\neq 0$, deci $\dot{\bar{q}} \perp \bar{p}$;

c) $\dot{\bar{p}}\neq 0$; $\dot{\bar{q}}=0$, deci $\dot{\bar{p}} \perp \bar{q}$;

d) $\dot{\bar{p}}=0$; $\dot{\bar{q}}=0$.

In ipoteza a), fiindcă $p^2=\text{const}$, avem $\bar{p}\dot{\bar{p}}=0$, deci $\dot{\bar{p}}$ este perpendicular pe $\bar{q}$ și $\bar{p}$, aceeași concluzie fiind valabilă și pentru $\dot{\bar{q}}$. Vom avea

$$\dot{\bar{p}}=\lambda(\bar{p}\times\bar{q}); \quad \dot{\bar{q}}=\mu(\bar{p}\times\bar{q}) \qquad (37,\text{VII})$$

$\lambda$ și $\mu$ fiind scalari variabili cu $t$ în timpul mișcării. Acești vectori reprezintă viteze de rotație, ca și în cazul nedegenerat, fiindcă putem scrie

$$\dot{\bar{p}}=(-\lambda\bar{q})\times\bar{p}=(\mu\bar{p}-\lambda\bar{q})\times\bar{p}=\bar{\Gamma}\times\bar{p};$$
$$\dot{\bar{q}}=(\mu\bar{p})\times\bar{q}=(\mu\bar{p}-\lambda\bar{q})\times\bar{q}=\bar{\Gamma}\times\bar{q},$$

unde

$$\bar{\Gamma}=\mu\bar{p}-\lambda\bar{q}. \qquad (38,\text{VII})$$

In același timp, vom avea, ca și în formula (34,VII)

$$\dot{\bar{w}}=\dot{\bar{p}}\times\bar{q}+\bar{p}\times\dot{\bar{q}}=\bar{\Gamma}\times(\bar{p}\times\bar{q})=\bar{\Gamma}\times\bar{w}.$$

Este deci suficient să substituim pe $\bar{\Gamma}$ lui $\bar{\Omega}$ în (35,VII) pentru a avea mișcarea instantanee corespunzătoare

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\Gamma}\times\overline{m}.$$

In ipotezele b) și c) vom lua respectiv $\lambda=0$, $\mu=0$ în formulele (37,VII) și formula (38,VII) va da $\bar{\Gamma}=\mu\bar{p}$; $\bar{\Gamma}=-\lambda\bar{q}$.

In rezumat, în primele trei ipoteze: *Mișcarea instantanee se compune tot dintr'o translație și o rotație, axa $\bar{\Omega}$ având o poziție particulară față de vectorii $\bar{p}$ și $\bar{q}$,* găsindu-se în planul $(\bar{p},\bar{q})$, sau fiind chiar coliniară cu unul din acești vectori.

In sfârșit în cazul d), vom avea

$$\lambda=0; \quad \mu=0; \quad \bar{\Gamma}=0;$$

formula (35,VII) se reduce la

$$\bar{v}=\bar{v}_0,$$

iar *mișcarea instantanee este o translație.*

Scanned with OKEN Scanner

Deplasările elementare pot fi compuse, având în vedere că rotaţiile elementare se fac în jurul aceluiaşi punct *I*, astfel încât produsul a două deplasări elementare este tot o deplasare elementară, ca şi inversa unei deplasări elementare. Putem deci spune: *Mulţimea deplasărilor elementare formează un grup de transformări infinitesimale ale spaţiului, numit grupul deplasărilor elementare.*

Am văzut că fiecărei mişcări instantanee i se asociază un torsor ale cărui coordonate vectoriale în raport cu un punct fix *I* al solidului sunt $(\bar{\Omega}, \bar{v}_0)$.

Pe de altă parte, introducând operaţia de adunare în mulţimea torsorilor constatăm (§ 126), că mulţimea torsorilor formează un grup faţă de această adunare. Când la fiecare element al unui grup corespunde un element şi unul singur al altui grup şi invers, astfel încât rezultantei operaţiei caracteristice din primul îi corespunde rezultanta operaţiei caracteristice din al doilea, cele două grupuri se numesc *isomorfe*. In acest caz, putem studia proprietăţile generale ale unuia din cele două grupuri cu ajutorul celuilalt.

Cum în grupul deplasărilor elementare intră şi deplasarea nulă, căreia îi corespunde torsorul nul, din observaţiile făcute deducem: *grupul deplasărilor elementare ale corpului solid este isomorf cu grupul torsorilor faţă de adunare.*

*Deasemenea, considerând translaţiile elementare, grupul lor este isomorf cu grupul vectorilor faţă de adunarea vectorială, iar grupul rotaţiilor elementare în jurul unui punct este isomorf cu grupul bivectorilor faţă de adunarea bivectorială.*

Noţiunea de grup, deşi abstractă, îşi are originea în cele mai fundamentale transformări sau operaţii cu elemente fizice şi se găseşte în structura celor mai importante fenomene fizice, care pot fi compuse prin repetare. Ea permite, de exemplu, ca din starea unui mediu la un anumit moment să deducem starea aceluiaşi mediu la un moment ulterior şi apoi luând acest moment ca iniţial, să deducem starea la un al treilea moment, ulterior primelor două, urmărind astfel fenomenul din aproape în aproape în desfăşurarea sa.

## § 216. Mişcarea instantanee elicoidală. Axa centrală. Centrul instantaneu

Interpretarea vitezelor în mişcarea instantanee ca o distribuţie de momente ale unui sistem de vectori alunecători, în raport cu punctele solidului, ne dă posibilitatea de a aplica teoria vectorilor alunecători la studiul acestei mişcări. Putem, de exemplu, căuta *axa centrală* a sistemului (§ 132), caracterizată ca locul punctelor al căror moment este minim.

Vitezele corespunzătoare vor fi minime şi vor avea direcţia axei, sau vor fi nule. Deplasarea elementară va fi în acest caz compusă dintr'o rotaţie elementară în jurul axei $\Omega$ şi o translaţie dealungul acestei axe.

Vom numi această mişcare instantanee *elicoidală*, iar axa centrală se va numi *axă a mişcării instantanee elicoidale.*

Ecuaţia vectorială a axei centrale *în mediul mobil* se obţine (126,IV), din relaţia

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\Omega} \times \bar{v}_0}{\Omega^2} + \lambda \bar{\Omega}, \qquad (39,IV)$$



Scanned with OKEN Scanner

unde $\lambda$ este un parametru. Când timpul variază, axa centrală se schimbă, atât în corpul solid cât şi în spaţiu, descriind în ambele medii câte o suprafaţă riglată.

Pentru a obţine ecuaţia vectorială a axei centrale în *mediul fix* va trebui să raportăm coordonatele vectoriale ale torsorului $(\bar{\Omega},\bar{v}_0)$ la un punct fix, de exemplu punctul $O$.

Momentul rezultant în punctul $O$ va fi

$$\bar{v}_O=\bar{v}_0+\bar{\Omega}\times(-\bar{r}_0)=\bar{v}_0-\bar{\Omega}\times\bar{r}_0,$$

deoarece vectorul de poziţie al lui $O$ în raport cu $I$ este $-\bar{r}_0$. Aplicând din nou formula (39,VII), în care torsorul are coordonatele $(\bar{\Omega},\bar{v}_0)$, ecuaţia axei centrale devine:

$$\bar{r}-\frac{\bar{\Omega}\times(\bar{v}_0-\bar{\Omega}\times\bar{r}_0)}{\Omega^2}=\lambda\bar{\Omega},$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al punctului curent faţă de $O$.

Cum însă

$$\bar{\Omega}\times(\bar{v}_0-\bar{\Omega}\times\bar{r}_0)=\bar{\Omega}\times\bar{v}_0-\bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_0)=\bar{\Omega}\times\bar{v}_0-\bar{\Omega}(\bar{\Omega}\bar{r}_0)+\bar{r}_0\Omega^2,$$

ecuaţia axei centrale raportată la reperul fix $O$ va fi

$$\bar{r}=r_0+\frac{\bar{\Omega}\times\bar{v}_0}{\Omega^2}-\mu\bar{\Omega}, \qquad (40,VII)$$

unde $\mu$ este un parametru legat de $\lambda$ prin relaţia

$$\mu=\lambda-\frac{\bar{\Omega}\bar{r}_0}{\Omega^2}.$$

*Mişcarea instantanee, în cazul când punctul $I$ este ales chiar pe axa centrală, este o mişcare elicoidală având ca axă, axa centrală. Un punct oarecare al solidului execută o rotaţie elementară şi o translaţie dealungul axei centrale proporţională cu rotaţia.*

In adevăr, viteza unui punct oarecare al axei, de vector $\bar{\rho}$, va fi dată de (35,VII) în care $\bar{m}$ are expresia (39,VII). Vom avea:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\Omega}\times\left(\frac{\bar{\Omega}\times\bar{v}_0}{\Omega^2}+\lambda\bar{\Omega}\right)=\frac{1}{\Omega^2}[\bar{\Omega}(\bar{\Omega}\bar{v}_0)-\bar{v}_0\Omega^2]+\bar{v}_0=\frac{\bar{\Omega}\bar{v}_0}{\Omega^2}\bar{\Omega}.$$

Cum $\bar{\Omega}\bar{v}_0$ şi $\Omega^2$ sunt invarianţi, $\bar{v}$ este independent de alegerea lui $I$.

Dacă alegem ca punct $I$ un punct al axei centrale, viteza unui punct oarecare $M$ al solidului va avea expresia

$$\bar{v}=\frac{(\bar{\Omega}\bar{v}_0)}{\Omega^2}\bar{\Omega}+\bar{\Omega}\times\bar{m}. \qquad (41,VII)$$

Se vede că translaţia $\frac{(\bar{\Omega}\bar{v}_0)}{\Omega^2}\bar{\Omega}$ este proporţională cu rotaţia $\bar{\Omega}$. In intervalul de timp $dt$, mişcarea solidului poate fi aproximată cu o mişcare elicoidală având ca axă axa centrală, translaţia efectuându-se dealungul acestei axe şi având ca vector $\frac{(\bar{\Omega}\bar{v}_0)^2}{\Omega^2}\bar{\Omega}dt$.

Scanned with OKEN Scanner

**Aplicaţia 1.** *Mişcarea elicoidală finită.* Să presupunem, în particular, că viteza în mişcarea instantanee elicoidală este constantă în timp, deci $\bar{\Omega}$ şi $\frac{\bar{\Omega}\bar{v}_0}{\Omega^2}=p$ sunt independente de $t$.

În acest caz, punctele axei centrale $\bar{\rho}$, având vitezele

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt}=\frac{(\bar{\Omega}\bar{v}_0)}{\Omega^2}\bar{\Omega}=p\bar{\Omega}=\text{const}$$

au ca traiectorie

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_0+\frac{(\bar{\Omega}\bar{v}_0)}{\Omega^2}\bar{\Omega}t;\quad \rho_0=\text{const}.$$

Axa centrală este deci fixă şi poate fi aleasă ca axă $Oz$. Viteza unui punct al solidului va fi dată de formula (41,VII) unde

$$\bar{m}=\bar{r}-\bar{\rho}=\bar{r}-\frac{(\bar{\Omega}\bar{v}_0)}{\Omega^2}t\Omega\bar{k},\ \text{cu}\ \rho_0=0;\quad \bar{\Omega}=\bar{k}\Omega$$

deci vom avea relaţia

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\Omega p\bar{k}+\Omega\bar{k}\times(\bar{r}-pt\Omega\bar{k}).$$

Traiectoriile punctelor $M$ vor fi date de integralele ecuaţiei diferenţiale vectoriale

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\Omega p\bar{k}+\Omega(\bar{k}\times\bar{r}).$$

Obţinem imediat o integrală primă înmulţind scalar cu $\bar{k}$:

$$\bar{k}\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{k}\bar{r})=p\Omega;\quad \bar{k}\bar{r}=z=\Omega pt+z_0.$$

O a doua integrală primă se găseşte înmulţind scalar cu $\bar{r}$:

$$\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}=\Omega p(\bar{k}\bar{r})=(\bar{k}\bar{r})\frac{d}{dt}(\bar{k}\bar{r}),$$

de unde

$$r^2=(\bar{k}\bar{r})^2+a^2=z^2+a^2,$$

$a$ fiind o constantă arbitrară, deci:

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2=a^2.$$

În sfârşit, o a treia integrală primă se obţine înmulţind scalar cu $\bar{k}\times\bar{r}$:

$$(\bar{k}\times\bar{r})\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{k}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\Omega(\bar{k}\times\bar{r})^2=\Omega[\bar{r}^2-(\bar{r}\bar{k})^2]=\Omega(x^2+y^2)=\Omega a^2,$$

de unde

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\Omega a^2.$$

Punând

$$x=a\cos\theta;\quad y=a\sin\theta,$$

deducem din această ultimă integrală

$$\frac{d\theta}{dt}=\Omega;\quad \theta=\Omega t+\theta_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile parametrice ale traiectoriilor vor fi

$$x=a\cos(\omega t+\theta_0);$$
$$y=a\sin(\omega t+\theta_0);$$
$$z=p\,\omega t+z_0;$$
$$h=2\pi p,$$

reprezentând elice cilindrice cu același pas $h$, descrise toate în același sens, depinzând de semnul lui $p$.

Demonstrația dată se poate adapta pentru cazul mai general[1]) când viteza în mișcarea elicoidală are numai direcția fixă:

$$\bar{\Omega}=\Omega(t)\,\bar{\omega} \quad \text{cu} \quad \bar{\omega}=\text{versor constant},$$

iar $p=$const., obținând ca traiectorii tot elice, însă mișcarea nu mai este uniformă.

**Aplicația 2.** *Centrul instantaneu de rotație.* Un caz particular de mișcare a corpului solid se obține când presupunem că axa instantanee rămâne paralelă cu o direcție fixă, iar viteza sa de translație în mișcarea elicoidală este nulă, deci $\bar{\Omega}\,\bar{v}_0=0$; $p=0$. Toate vitezele rămân perpendiculare pe axa $\bar{\Omega}$ și solidul se mișcă paralel cu un plan fix, perpendicular pe $\bar{\Omega}$. La fiecare moment punctele axei instantanee au viteze nule, astfel încât pe secțiunile plane în solid, perpendiculare pe axa mișcării instantanee elicoidale, punctul de intersecție al planului cu axa este fix la momentul considerat.

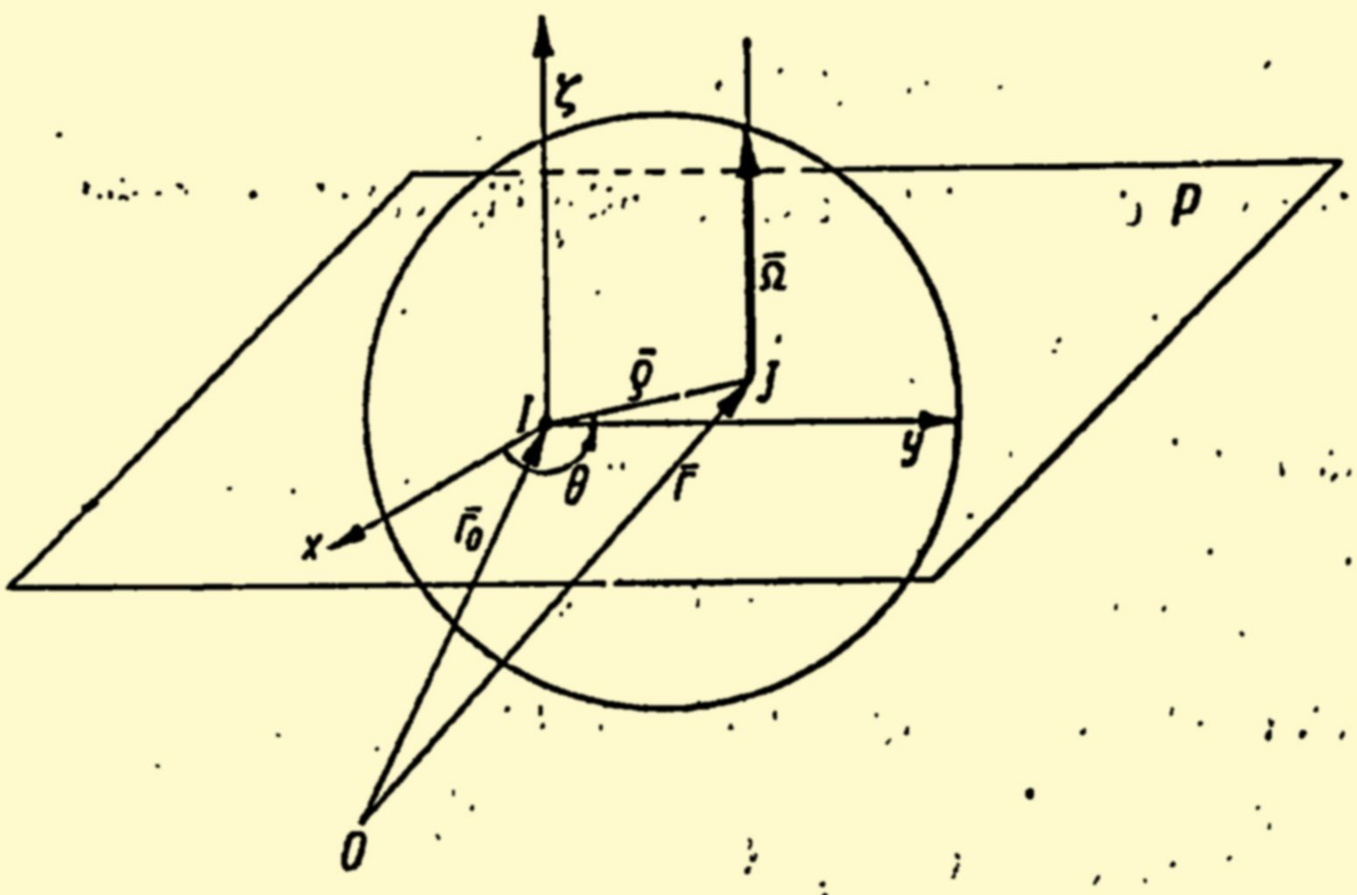



Fig. 205

Acest punct se numește *centru instantaneu de rotație.*

Notând cu $\bar{\rho}$ vectorul de poziție al centrului instantaneu $J$ în planul $P$ față de axele solidar legate de corp (fig. 205), viteza sa va fi nulă la momentul $t$, deci din formula (35,VII) deducem

$$0=\bar{v}_0+\bar{\Omega}\times\bar{\rho}.$$

Putem găsi pe $\bar{\rho}$ înmulțind vectorial cu $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega}\times\bar{v}_0+\bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{\rho})=\bar{\Omega}\times\bar{v}_0+\bar{\Omega}(\bar{\Omega}\bar{\rho})-\bar{\rho}\Omega^2=0.$$

Însă $\bar{\Omega}\bar{\rho}=0$, dacă alegem punctul $J$ chiar în planul $P$, deoarece $\bar{\rho}$ este perpendicular pe $\bar{\Omega}$. Deducem deci

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{\Omega}\times\bar{v}_0}{\Omega^2} \qquad (42,VII)$$

în sistemul mobil și

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\frac{\bar{\Omega}\times\bar{v}_0}{\Omega^2} \qquad (43,VII)$$

---

[1]) *G. C. Suslov*, Op. cit., vol. I. p. 111

Scanned with OKEN Scanner

în sistemul fix. Putem dealtfel alege centrul $O$ chiar în planul $P$, ceeace simplifică formulele în calculul componentelor pe axele de coordonate.

Luând axele $Oz$ şi $I\zeta$ paralele cu $\bar{\omega}$ şi notând cu $\theta$ unghiul făcut de $IJ$ cu $Ox$, vom avea

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}; \quad \bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{k}$$

Coordonatele centrului instantaneu $J$ în sistemul fix se deduc din (43,VII) punând

$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$$

$$\bar{v}_0 = \dot{x}_0\bar{i} + \dot{y}_0\bar{j} + \dot{z}_0\bar{k}.$$

Ele vor fi

$$x = x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\dot{\theta}}; \quad y = y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\dot{\theta}}; \quad z = 0. \tag{44,VII}$$

Pentru a obţine coordonatele lui $J$ în sistemul mobil, va trebui să exprimăm pe $\bar{v}_0$ în acest sistem.

Componentele vor fi

$$\dot{x}_0\cos\theta - \dot{y}_0\sin\theta; \quad -\dot{x}_0\sin\theta + \dot{y}_0\cos\theta; \quad 0,$$

iar $\bar{\omega}$ va avea componentele 0, 0, $\dot{\theta}$.

Dacă notăm cu $\xi$, $\eta$, $\zeta$ coordonatele lui $J$ în sistemul mobil, din formula (44,VII) vom deduce

$$\xi = \frac{\dot{x}_0\cos\theta - \dot{y}_0\sin\theta}{\dot{\theta}}; \quad \eta = \frac{\dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta}{\dot{\theta}}; \quad \zeta = 0. \tag{45,VII}$$

**Mişcarea instantanee a unui solid, paralelă cu un plan fix, se interpretează şi ca mişcarea instantanee a planului pe el însuşi, în Cinematica bidimensională, făcând abstracţie de faptul că planul figurilor este în spaţiul cu trei dimensiuni.**

## C. APLICAŢII LA DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

In Cinematică mişcarea corpurilor este considerată ca o transformare de obiecte geometrice, al căror caracter material apare numai din faptul că au o întindere şi că sunt în mişcare.

Pentru a trece la fenomenele dinamice, vom ţine seama că toate corpurile materiale se atrag între ele. O consecinţă a atracţiei universale este greutatea corpurilor, care la suprafaţa pământului variază cu locul în care este măsurată.

Cum însă acceleraţia gravităţii într'un loc dat este aceeaşi pentru căderea în vid a tuturor corpurilor, iar pe de altă parte se stabileşte experimental, că raportul dintre greutatea unui corp şi acceleraţia locului este independent de locul în care este calculat, valoarea $m$ a acestui raport este o mărime fizică, numită masa gravifică a corpului.

A doua mărime fizică fundamentală a Dinamicei, este forţa, legată de masă şi acceleraţie prin relaţia

$$\bar{F} = m\bar{w} \tag{46,VII}$$

numită *a doua lege a lui Newton* şi care stabileşte caracterul vectorial al forţei.

Scanned with OKEN Scanner

Când într'un domeniu din spațiu acționează în fiecare punct o forță determinată, mulțimea forțelor din acel domeniu se numește *câmp de forțe*. Cel mai obișnuit câmp de forțe este câmpul forțelor gravitaționale, dar fenomenele fizice pun în evidență și alte câmpuri, ca de exemplu, câmpul forțelor electrice, sau câmpul forțelor magnetice. Forța, care acționează într'un câmp asupra unității de masă, de sarcină, etc., se numește *intensitatea câmpului* în punctul considerat.

Pentru a putea obține rezultate simple, cel puțin într'o primă cercetare a fenomenelor dinamice, se consideră corpuri de dimensiuni reduse, arbitrar de mici, astfel încât determinarea poziției lor să poată reveni, cu destulă exactitate, la aceea a unui punct geometric. Un astfel de corp se numește *punct material*.

Unui punct material i se atașează o masă egală cu masa întregului corp pe care îl reprezintă, deci el nu este caracterizat numai prin poziția sa în spațiu, ca orice punct geometric, ci și prin scalarul masă.

## § 217. Relații între mărimile mecanice fundamentale. Integrale prime

Prin introducerea mărimilor masă și forță, alături de viteză și accelerație, din ecuația fundamentală a dinamicei (46,VII) decurg mai multe relații, constituind teoremele generale ale dinamicei, în care apar și alte mărimi derivate.

Numind *cantitatea de mișcare* (sau *impuls*) mărimea

$$\overline{H}=m\overline{v}, \tag{47,VII}$$

din relația

$$m\overline{w}=m\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\overline{v})=\overline{F}$$

deducem

$$\frac{d\overline{H}}{dt}=\overline{F}\,. \tag{48,VII}$$

Prin urmare: *Derivata cantității de mișcare în raport cu timpul este egală cu forța.*

Mărimea vectorială $\overline{F}dt$ se numește *impuls elementar al forței* $\overline{F}$.

Din (48,VII) deducem

$$\overline{F}dt=d\overline{H},$$

deci, integrând între două momente $t_1$ și $t_2$ în ipoteza că $\overline{F}=\overline{F}(t)$, avem

$$\int_{t_1}^{t_2}\overline{F}dt=\overline{H}(t_2)-\overline{H}(t_1), \tag{49,VII}$$

Numind integrala din primul membru *impuls total al forței* $\overline{F}$ în intervalul $(t_1, t_2)$, putem da teoremei cantității de mișcare forma următoare: *Impulsul total al forței într'un interval* $(t_1, t_2)$ *este egal cu variația cantității de mișcare în acel interval.*

In ipoteza că la momentul $t_1$ punctul material are viteza nulă și că forța este constantă în intervalul $(t_1, t_2)$, relația (49,VII) devine

$$\int_{t_1}^{t_2}\overline{F}dt=\overline{F}(t_2-t_1)=\overline{H}(t_2). \tag{50,VII}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, cantitatea de mişcare este egală chiar cu impulsul forţei în intervalul $(t_1, t_2)$. Această ipoteză poate fi realizată cu atât mai corect, cu cât intervalul este mai scurt şi cu cât forţa este mai mare. Se spune atunci că avem o *percusiune*, măsurată prin impulsul $\bar{F}(t_2-t_1)$.

Deaceea, cantitatea de mişcare este numită ea însăşi *impuls*, păstrându-se numele de percusiune pentru $\bar{F}(t_2-t_1)$.

In general, din relaţia (49,VII) rezultă că direcţia impulsului este diferită de aceea a forţei cu care nu se confundă decât în cazul forţei constante (50,VII), sau în cazul unei percusiuni. Momentul cantităţii de mişcare în raport cu un centru oarecare $O$ se numeşte *moment cinetic* în raport cu acel centru. Expresia sa este

$$\bar{K}=\bar{r}\times m\bar{v}, \qquad (51,VII)$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al punctului material $M$ faţă de centrul $O$.

Vom avea

$$\frac{d\bar{K}}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})=\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}+\bar{r}\times\frac{d}{dt}(m\bar{v})=\bar{r}\times\bar{F},$$

deci

$$\frac{d\bar{K}}{dt}=\bar{r}\times\bar{F}. \qquad (52,VII)$$

*Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic faţă de un centru O este egală cu momentul forţei în raport cu acest centru.*

Aceste două teoreme pot fi reunite într'una singură, dacă se consideră forţa ca un vector alunecător de coordonate vectoriale $\bar{F}$, $\bar{r}\times\bar{F}$ în raport cu $O$, constituind astfel un torsor.

Dacă şi impulsul $\bar{H}$ este considerat tot ca un vector alunecător de cordonate $\bar{H}$, $\bar{K}$ în raport cu $O$, vom putea calcula derivata torsorului $(\bar{H}, \bar{K})$ şi relaţiile (48,VII) şi (52,VII) vor conduce la teorema torsorului: *Derivata torsorului impulsului* $(\bar{H}, \bar{K})$ *este egală cu torsorul forţei.*

Deasemenea, considerând viteza areolară (11,VII) a punctului $M$, vom putea scrie

$$\bar{K}=\bar{r}\times m\bar{v}=m(\bar{r}\times\bar{v})=2m\bar{\mathfrak{V}},$$

de unde: *momentul cinetic în raport cu un punct este dublul produsului dintre masă şi viteza areolară în raport cu acelaşi punct.*

Teorema momentului cinetic exprimă prin relaţia

$$2m\bar{\mathfrak{W}}=\bar{r}\times\bar{F} \qquad (53,VII)$$

proprietatea că: *dublul produsului dintre acceleraţia areolară şi masă este egal cu momentul forţei.*

Cum $\mathfrak{W}$ este, prin definiţia sa (20,VII), o mărime bivectorială, *relaţia* (53,VII) *poate fi considerată ca o formă bivectorială a legii a doua a lui Newton.* Ea se mai numeşte şi *teorema ariilor.* Aceste relaţii vectoriale între mărimile dinamice fundamentale au caracter diferenţial. Problema principală a Dinamicei fiind determinarea mişcării, aceasta revine din punct de vedere matematic la

Scanned with OKEN Scanner

integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea. Uneori, integrarea este uşurată, când se cunosc unele integrale prime, deci unele expresii diferenţiale de ordinul întâi, care rămân constante dealungul traiectoriilor în timpul mişcării.

Teoremele generale conduc, uneori, la astfel de integrale prime, care au în acelaşi timp semnificaţia dinamică, pe care le-o dau mărimile ce intervin în relaţiile obţinute.

Astfel, dacă forţa este nulă în timpul mişcării, din relaţia (48,VII) deducem

$$\bar{H}=m\bar{v}=\bar{c},$$

unde $\bar{c}$ este un vector constant.

Uneori, forţa nu este nulă, dar rămâne perpendiculară pe o direcţie fixă. In acest caz, dacă $\bar{p}$ este versorul acestei direcţii, din (48,VII) deducem

$$\bar{p}\frac{d\bar{H}}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{p}\bar{H})=\bar{p}\bar{F}=0,$$

deci

$$\bar{p}\bar{H}=\bar{p}(m\bar{v})=m\bar{p}\bar{v}=a,$$

unde $a$ este o constantă. Proiecţia vitezei pe axa de versor $\bar{p}$ este constantă. Obţinem astfel o integrală primă scalară.

Deasemenea teorema momentului cinetic conduce la integrale prime, dacă momentul forţei în raport cu un punct fix $O$ este nul, ceeace revine la proprietatea că suportul forţei trece prin acel punct. Ne găsim în cazul *forţelor centrale*, a căror importanţă este considerabilă prin faptul că intervin în mişcarea planetelor.

Din (52,VII) deducem

$$\frac{d\bar{K}}{dt}=\bar{r}\times\bar{F}=0;\ \bar{K}=\bar{r}\times m\bar{v}=\bar{C};$$

deci o integrală primă vectorială, în care $\bar{C}$ este un vector constant. Inmulţind scalar cu $\bar{r}$, obţinem relaţia

$$\bar{C}\bar{r}=0,$$

din care rezultă că *traiectoria este plană şi se găseşte în planul ce trece prin O, perpendicular pe* $\bar{C}$.

Vom putea obţine o integrală primă şi în cazul când momentul forţei în raport cu o axă este nul, deci când $\bar{p}(\bar{r}\times\bar{F})=0$. Vom avea

$$\bar{p}\frac{d\bar{K}}{dt}=\bar{p}(\bar{r}\times\bar{F})=0;\ \frac{d}{dt}(\bar{p}\bar{K})=0;$$

$$\bar{p}\bar{K}=\bar{p}(\bar{r}\times m\bar{v})=m(\bar{p}\bar{r}\bar{v})=b,$$

deci o integrală primă scalară.

In cazul când obţinem două integrale prime ale momentului cinetic, deci când momentul forţei este nul în raport cu două axe, vom avea

$$\bar{p}(\bar{r}\times\bar{F})=0;\quad\bar{q}(\bar{r}\times\bar{F})=0,$$

deci

$$\bar{r}\times\bar{F}=\lambda(\bar{p}\times\bar{q}),$$

unde $\lambda$ este un scalar.

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că atât $\bar{r}$, cât şi $\bar{F}$ sunt perpendiculari pe vectorul fix $\bar{p}\times\bar{q}$ şi cum $\bar{r}$ are originea fixă, *traiectoria se va găsi în planul determinat de* $\bar{p}$ *şi* $\bar{q}$, *trecând prin* $O$, care va conţine şi forţa $\bar{F}$, deci va fi o curbă plană.

Teorema momentului cinetic arată că viteza areolară este constantă şi deci că *mişcarea se face după legea ariilor, dacă forţa este centrală.*

Metodele vectoriale ne permit deci să deducem dintr'o singură relaţie, legea lui Newton, o serie de proprietăţi generale ale mişcării, interpretând în termeni fizici relaţiile dintre mărimile scalare şi vectoriale ce se pot obţine din ea prin operaţii simple de Algebră şi Analiză vectorială. Aceste relaţii conduc la proprietăţi ale fenomenului de mişcare prin faptul că sunt independente de alegerea unui anumit sistem de referinţă cartezian.

## § 218. Energia şi lucrul mecanic

Prezentarea unora din noţiunile de bază ale Mecanicei în cadrul acestor aplicaţii urmăreşte, nu aprofundarea acestor noţiuni, care se găsesc în toate cursurile de specialitate, ci demonstraţia tezei că, atât Calculul vectorial, cât şi orice alt mijloc de calcul matematic, sunt justificate prin aplicaţiile lor. Operaţiile Algebrei şi Analizei vectoriale în sine, sunt sterile, când sunt efectuate cu simboluri lipsite de semnificaţii. Dacă, însă, o mărime fizică sau geometrică este reprezentabilă prin unul din aceste simboluri, relaţiile matematice, corespunzătoare proprietăţilor sale celor mai caracteristice, permit, cu ajutorul operaţiilor calculului respectiv, să deducem noi proprietăţi ale acelei mărimi pe calc teoretică. Deaceea, aplicaţiile de faţă urmăresc prezentarea unui număr de chestiuni tratate în legătură unele cu altele, fără a epuiza un capitol, dar în acelaşi timp evitând simpla înşirare de probleme de Calcul vectorial, în care mărimile fizice sau geometrice nu sunt decât nume date unor vectori sau scalari, în cursul unor calcule din ce în ce mai ingenioase.

Astfel, când o forţă $\bar{F}$ acţionează asupra unui punct material $M$, producând o deplasare $\Delta\bar{r}$, spunem că forţa efectuează un *lucru mecanic*, măsurat prin produsul scalar $\bar{F}\Delta\bar{r}$. Deoarece forţa este variabilă, iar deplasarea $\Delta\bar{r}$ între două puncte se poate face într'o infinitate de moduri, vom obţine o măsură mai justă a mărimii lucru mecanic, considerând o deplasare mai mică. Vom numi *lucru mecanic elementar* mărimea fizică reprezentată prin produsul scalar

$$\bar{F}d\bar{r},$$

unde $d\bar{r}$ este o deplasare arbitrar de mică *pe o direcţie determinată.*

Ecuaţia fundamentală a Dinamicei (46,VII) ne permite, ca şi în cazurile precedente, să stabilim între această nouă mărime şi cele anterior introduse o relaţie simplă. Inmulţind în ambii membri scalar cu $d\bar{r}$, vom avea

$$m\,\bar{w}d\bar{r}=\bar{F}\,d\bar{r},$$

de unde

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r}=m\,\frac{d\bar{r}}{dt}d\bar{v}=m\bar{v}d\bar{v}=\bar{F}d\bar{r},$$

deci

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}d\bar{r}. \qquad (54,VII)$$

Expresia

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (55,VII)$$

este un scalar obţinut prin produsul dintre $m$ şi $\frac{1}{2}v^2=\frac{Q}{2}$. Mărimea $Q$ a fost întâlnită în Cinematică în calculul acceleraţiilor în coordonate curbilinii, formula (19,VII).

Vom numi mărimea scalară *T energie cinetică* a punctului material de masă $m$ şi de viteză $\bar{v}$.

Relaţia obţinută (54,VII) exprimă următoarea proprietate: *Diferenţiala energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic elementar al forţei, care lucrează asupra lui.*

Vom nota prin $\delta\Omega$ lucrul mecanic elementar, punând deci

$$\delta\Omega=\bar{F}\,d\bar{r}. \qquad (56,VII)$$

Această expresie are sens când forţa este definită în $M$. Cum însă, după deplasare forţa nu încetează să existe; chiar dacă se anulează într'un interval de timp extrem de mic, ea trebue să fie definită în domeniul lui $M$ pe o curbă, pe o suprafaţă, sau pe întreg domeniul spaţial. Când există un câmp de forţe $\bar{F}$, vom avea o funcţie vectorială de punct

$$\bar{F}=\bar{F}(M)=\bar{F}(\bar{r}),$$

iar produsul scalar (56,VII) se va putea scrie raportat la un sistem de axe carteziene ortogonale:

$$\delta\Omega=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

unde $X, Y, Z$ sunt funcţii de $x, y, z$.

Această expresie *nu este în general o diferenţială totală exactă*, astfel încât $\delta\Omega$ nu reprezintă o diferenţială exactă. In cazul când deplasarea $d\bar{r}$ se face pe o suprafaţă reprezentată parametric, forţa fiind definită pe această suprafaţă, vom putea scrie

$$\delta\Omega=A\,du+B\,dv$$

şi vom observa că nici această expresie nu este în general o diferenţială exactă. Numai în cazul când deplasarea se face pe o curbă, dealungul căreia forţa este definită în funcţie de un parametru $u$, vom putea scrie

$$\delta\Omega=\bar{F}[\bar{r}(u)]\,\bar{r}'(u)\,du=C(u)\,du$$

şi deci $\delta\Omega$ va fi o diferenţială exactă dealungul curbei.

Să presupunem că deplasarea punctului $M$ se face în timp pe o traiectorie $\Gamma$ (fig. 206), pe care alegem ca parametru pe $t$. Vom numi *lucru mecanic total* dealungul arcului $M_1M_2$ expresia

$$\Omega_{M_1}^{M_2}=\int_{M_1}^{M_2}\bar{F}\,d\bar{r}. \qquad (57,VII)$$

Această integrală vectorială se reduce la o integrală curbilinie obişnuită, dacă notăm

$$d\bar{r}=\frac{d\bar{r}}{ds}\,ds$$

Scanned with OKEN Scanner

și la o integrală obișnuită în raport cu $t$, dacă ținem seama de reprezentarea parametrică a curbei $\Gamma$. Vom avea

$$\Omega=\int_{M_1}^{M_2}\bar{F}\,d\bar{r}=\int_{M_1}^{M_2}\bar{F}[\bar{r}\,(t)]\,\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}C\,(t)\,dt.$$

Să integrăm ambii membri ai relației (54,VII) între limite corespunzătoare momentelor $t_0$ și $t$. Vom avea:

$$T-T_0=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{M_0}^{M}\bar{F}\,d\bar{r}=\Omega_{M_0}^{M}. \qquad (58,VII)$$

Obținem astfel *teorema energiei cinetice* sub formă finită. *Variația energiei cinetice a unui punct material $M$ într'un interval de timp $(t_0, t)$ este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța, care acționează punctul $M$ dealungul arcului de traiectorie parcurs în același interval de timp.*

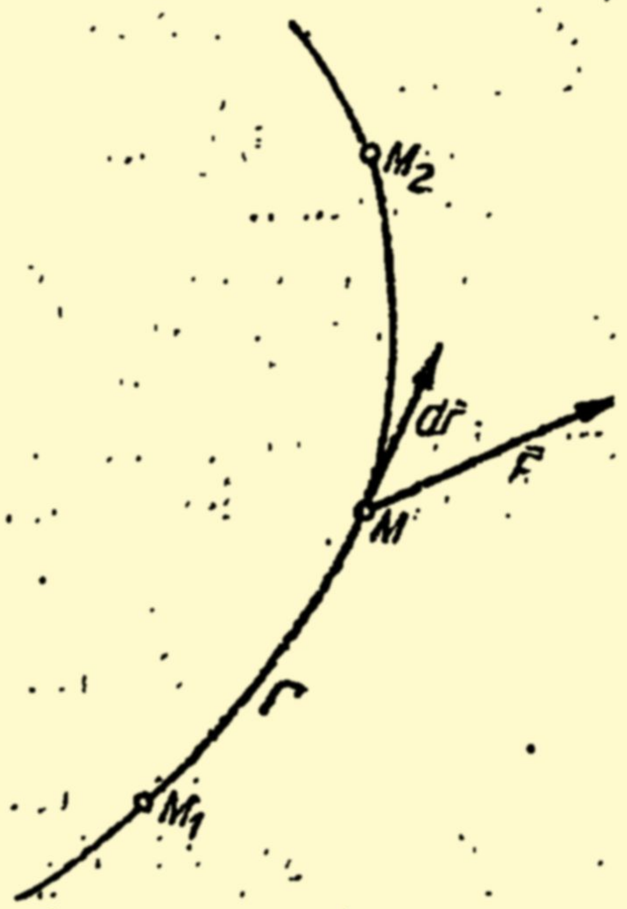



Fig. 206

Lucrul mecanic al unei forțe depinde, în general, de toate valorile luate de forța $\bar{F}$ dealungul arcului de curbă, adică de drumul pe care este transportată dela $M_0$ la $M$. Să presupunem că mișcarea are loc într'un câmp de forțe și că urmărim deplasarea punctului pe diversele arce de curbă continue cu tangenta continuă (înafară poate de un număr finit de puncte).

Când componentele lui $\bar{F}$ într'un sistem cartezian sunt derivatele parțiale ale unei funcții $U(x,y,z)$, spunem că forța este *conservativă* și numim $U(x,y,z)$ *funcție de forță*. In acest caz, avem:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y};\qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (59,VII)$$

Funcția

$$V=-U \qquad (60,VII$$

se numește *potențial*, iar despre forțele câmpului $\bar{F}$ se spune că *derivă dintr'un potențial*.

*In cazul forțelor conservative, lucrul mecanic nu depinde de arcul de curbă $M_0M$, ci numai de extremitățile sale.*

Această proprietate se stabilește imediat observând că

$$\bar{F}\,d\bar{r}=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy+\frac{\partial U}{\partial z}\,dz=dU,$$

deci

$$\int_{M_0}^{M}\bar{F}\,d\bar{r}=\int_{M_0}^{M}dU=\int_{M_0}^{M}\frac{dU}{dt}\,dt=U\,(x,y,z)-U\,(x_0,y_0,z_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Intr'un câmp de forţe conservativ, teorema energiei conduce la o nouă integrală primă a ecuaţiilor de mişcare. In adevăr, din (54,VII) deducem

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT = \bar{F}\,d\bar{r} = dU,$$

de unde

$$\frac{mv^2}{2} = T = U + h,$$

unde $h$ este o constantă arbitrară, numită *constanta energiei.*

Introducând potenţialul $V$, integrala energiei se pune sub una din formele următoare:

$$T = U + h; \qquad T + V = h. \tag{61,VII}$$

Se dă potenţialului $V$ şi numele de *energie potenţială,* iar suma $T + V$ a energiilor cinetică şi potenţială se numeşte *energie totală* a punctului material. Formula (61,VII) conduce la următoarea propoziţie, numită *legea conservării energiei:*

*Intr'un câmp de forţe conservative energia totală a punctului material este constantă.*

In toate aceste consideraţii, funcţia de forţă este presupusă uniformă, deci pornind cu o valoare a sa $U_0$ din punctul $M_0$ pe un drum oarecare, ajungem în $M$ totdeauna cu aceeaşi valoare $U(M)$. In acest caz, punctul material ajunge în $M$ cu aceeaşi energie cinetică şi deci cu aceeaşi valoare $v$ a vitezei, pe orice drum.

## § 219. Aplicaţii ale teoremelor generale

1 **Energia intr'un câmp de forţe centrale, funcţie de distanţă.** Fie un punct material $M$ supus acţiunii unor forţe centrale $\bar{F}_k$ având ca centre $n$ puncte fixe $A_1, A_2, \ldots, A_n$, intensităţile $F_k$ fiind funcţii de distanţele $\rho_k = A_kM$. Notând cu $\bar{r}$, $\bar{r}_k$ vectorii de poziţie ai punctelor $M$, $A_k$ în raport cu un centru arbitrar $O$, vom putea scrie

$$\bar{F}_k = F_k(\rho_k)\,\frac{\bar{r}-\bar{r}_k}{\rho_k}; \qquad \rho_k = |\bar{r}-\bar{r}_k|,$$

funcţiile $F_k$ putând fi pozitive sau negative.

Forţa care acţionează asupra lui $M$, va fi

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k\,\frac{\bar{r}-\bar{r}_k}{\rho_k},$$

iar lucrul mecanic elementar, pentru o deplasare $d\bar{r}$, va fi

$$\delta\Omega = \bar{F}\,d\bar{r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{\rho_k}(\bar{r}-\bar{r}_k)\,dr.$$

Cum însă

$$(\bar{r}-\bar{r}_k)^2 = \rho_k^2, \text{ deci } (\bar{r}-\bar{r}_k)\,d\bar{r} = \rho_k\,d\rho_k,$$

expresia lucrului mecanic elementar devine

$$\delta \Omega = \sum_{k=1}^{n} F_k (\rho_k)\, d\rho_k$$

și este o diferențială exactă, funcția de forță fiind

$$U = \sum_{k=1}^{n} \int F_k (\rho_k)\, d\rho_k + c. \qquad (62,VII)$$

Câmpul forțelor $F$ este conservativ și deci avem integrala energiei

$$T = \sum_{k=1}^{n} \int F_k (\rho_k)\, d\rho_k + h.$$

Această distribuție de forțe conține numeroase cazuri particulare importante:

a) *Atracția newtoniană* pentru

$$F_k = -\frac{\mu^2 m_k}{\rho_k^2}; \qquad U = \mu \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{\rho_k} + c,$$

cu potențialul newtonian

$$V = -\mu \sum_{k=1}^{h} \frac{m_k}{\rho_k} + c. \qquad (63,VII)$$

b) *Atracția sau repulsia proporțională cu distanța* pentru

$$F_k = \mp \mu m_k \rho_k; \qquad \bar{F}_k = \mp \mu m_k (\bar{r} - \bar{r}_k);$$

$$U = \mp \frac{\mu^2}{2} \sum_{k-1}^{n} m_k \rho_k^2 + c. \qquad (64,VII)$$

În cazul atracției avem *forțe elastice.*

c) *Forța constantă* $\bar{F} = \bar{c}$; $n = 1$,
centrul unic $A_1$ fiind situat la infinit pe o direcție fixă. Un calcul direct va da

$$\bar{F}\, d\bar{r} = \bar{c}\, d\bar{r} = d(\bar{c}\bar{r});$$

$$U = \bar{c}\bar{r} + a.$$

d) *Gravitatea* pentru

$$\bar{c} = -mg\bar{k}$$

într'un sistem local, în care $\bar{k}$ este versorul verticalei ascendente. Vom avea

$$U = -mgz + a; \qquad V = mgz + a.$$

2. Mișcarea unei particule electrizate într'un câmp magnetic și elastic. Fiind dată o particulă materială de masă $m$, purtând o sarcină electrică $-e$ și supusă acțiunii unei forțe repulsive $\mu\bar{r}$ într'un câmp magnetic $\bar{H}$ constant, se cere mișcarea acestei particule.

Forța magnetică ce acționează asupra particulei fiind[1] $\frac{e}{c}(\bar{H} \times \dot{\bar{r}})$, ecuația de mișcare ce rezultă din (47,VII), va fi:

$$m\ddot{\bar{r}} = \mu\bar{r} + \frac{e}{c}(\bar{H} \times \dot{\bar{r}}) \qquad (65,VII)$$

---

[1]) În sistemul de unități Gauss.

Vom căuta integralele prime care rezultă din teoremele generale. Deoarece

$$\bar{F}d\bar{r} = \mu\bar{r}d\bar{r} + \frac{e}{c}(\bar{H}\times\dot{\bar{r}})d\bar{r} = \mu\bar{r}d\bar{r} = \frac{\mu}{2}d(r^2),$$

vom avea

$$U = \frac{\mu}{2}r^2$$

și integrala energiei (61,VII) va fi:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\mu r^2}{2} + \alpha m; \quad mv^2 = \mu r^2 + 2\alpha m. \tag{66,VII}$$

Înmulțind scalar cu $\bar{H}$ ambii membri ai ecuației (65,VII), obținem relația

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\bar{H}\bar{r}) = \mu(\bar{H}\bar{r}), \tag{67,VII}$$

din care rezultă că mișcarea proiecției particulei pe $\bar{H}$ poate fi studiată separat. Integrând ecuația de ordinul al doilea cu coeficienți constanți (67,VII), vom avea

$$\bar{H}\bar{r} = C_1e^{pt} + C_2e^{-pt}; \quad p = \sqrt{\frac{\mu}{m}}. \tag{68,VII}$$

Descompunând pe $\bar{r}$ în două componente ortogonale după direcția lui $\bar{H}$ și o perpendiculară pe aceasta, vom scrie

$$\bar{r} = \frac{(\bar{r}\bar{H})}{H^2}\bar{H} + \bar{\rho}. \tag{69,VII}$$

Vectorul $\bar{\rho}$ va descrie o traiectorie în planul dus prin origine, perpendicular pe $\bar{H}$ și va reprezenta proiecția mișcării pe acest plan. Introducând expresia (69,VII) a lui $\bar{r}$ în ecuația (65,VII) vom avea

$$m\ddot{\bar{\rho}} = \mu\bar{\rho} + \frac{e}{c}(\bar{H}\times\dot{\bar{\rho}}) \quad \text{cu} \quad \bar{H}\bar{\rho} = 0, \tag{70,VII}$$

componenta pe $H$ conducând la ecuația (67,VII).

Să aplicăm teorema momentului cinetic mișcării (70,VII). Vom avea

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\bar{\rho}\times m\dot{\bar{\rho}}) = \frac{e}{c}\bar{\rho}\times(\bar{H}\times\dot{\bar{\rho}}) = \frac{e}{c}\left[\bar{H}(\bar{\rho}\dot{\bar{\rho}}) - \dot{\bar{\rho}}(\bar{H}\bar{\rho})\right] = \frac{e}{c}\bar{H}(\bar{\rho}\dot{\bar{\rho}}).$$

Membrul al doilea fiind o derivată exactă, deducem

$$\bar{K} = \bar{\rho}\times m\dot{\bar{\rho}} = \frac{e}{2c}\bar{H}\rho^2 + \ddot{\beta}m \tag{71,VII}$$

Este ușor de văzut că integrala energiei pentru mișcarea lui $\bar{\rho}$ are forma (66,VII), în care $\bar{r}$ se înlocuește prin $\bar{\rho}$. Avem astfel două integrale prime pentru mișcarea în planul perpendicular pe $\bar{H}$.

Dacă folosim coordonatele polare în acest plan, vom putea scrie

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{i}\cos\theta + \bar{j}\sin\theta); \quad \bar{H} = H\bar{k}$$

și vom deduce

$$\dot{\bar{\rho}}\times\dot{\bar{\rho}} = \rho^2\dot{\theta}\bar{k}; \quad \dot{\bar{\rho}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât ecuațiile (66,VII) și (71,VII) devin

$$m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2\right)=\mu\rho^2+2\alpha m;$$

$$m\rho^2\dot{\theta}=\frac{eH}{2c}\rho^2+\beta m.$$

Punând

$$\frac{eH}{2mc}=\omega$$

și eliminând $\dot{\theta}$, obținem următoarea ecuație diferențială în $\rho$

$$\rho^2\dot{\rho}^2+(\omega\rho^2+\beta)^2=p^2\rho^4+2\alpha\rho^2,$$

sau desvoltând:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\rho^2}{dt}\right)^2=(p^2-\omega^2)\rho^4+2(\alpha-\beta\omega)\rho^2-\beta^2. \qquad (72,VII)$$

Separând variabilele, obținem ecuația

$$\frac{d\rho^2}{\pm 2\sqrt{(p^2-\omega^2)\rho^4+2(\alpha-\beta\omega)\rho^2-\beta^2}}=dt$$

integrabilă printr'o cuadratură.

Existența traiectoriilor reale rezultă din discuția semnului trinomului dela numitor și depinde și de datele inițiale prin $\alpha$ și $\beta$. Odată determinat $\rho^2$, vom obține pe $\theta$ deasemenea printr'o cuadratură.

Este interesant de observat că traiectoria este plană în cazul când la momentul inițial $\bar{r}_0$ și $\dot{\bar{r}}_0$ sunt perpendiculari pe $\bar{H}$, deci când punctul pleacă din planul perpendicular pe câmpul magnetic dus prin centrul forței elastice cu o viteză în acest plan.

În adevăr, din ecuația (68,VII), dacă $\bar{H}\bar{r}_0=0$; $\bar{H}\dot{\bar{r}}_0=0$, deducem imediat

$$C_1=0;\quad C_2=0;\quad \bar{H}\bar{r}=0.$$

Mișcarea are loc în planul considerat și se confundă cu mișcarea componentei $\dot{\bar{\rho}}$, dată de (70,VII).

Deasemenea, din ecuația (72,VII) deducem că mișcarea *poate* fi circulară. In adevăr, această ecuație admite integrala $\rho^2=\lambda^2=\text{const}$, unde $\lambda$ este o rădăcină reală a ecuației

$$(p^2-\omega^2)\rho^4+2(\alpha-\beta\omega)\rho^2-\beta^2=0.$$

In acest caz

$$\theta=\left(\omega+\frac{\beta}{\lambda^2}\right)t+\theta_0,$$

deci mișcarea este uniformă. Aceeași observație este valabilă și în cazul când mișcarea are componenta $\bar{H}\bar{r}\neq 0$, pentru proiecția sa pe planul considerat.

**3. Problema lui Kepler.** Ne propunem să studiem problema mișcării unei mase materiale $m$, lansate cu o viteză inițială dată, în câmpul de atracție pe care-l creează o masă $M$. Vom presupune, la început, că masa $M$ este cu mult mai mare decât masa $m$, astfel încât corpul de masă $M$ să poată fi considerat ca fix, iar mișcarea, studiată în jurul acestuia. Se recunoaște aici problema mișcării planetelor în jurul soarelui.

Luând centrul de greutate $S$ al masei $M$ drept origine, forța de atracție exercitată asupra centrului de greutate $T$ al masei $m$ este

$$\bar{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r} \quad \text{(legea atracției universale a lui Newton),} \qquad (73,VII)$$

unde $\bar{r}=\overline{ST}$, iar $G$ o constantă universală.

Ecuaţia mişcării, în virtutea celei de a doua legi fundamentale a Dinamicei, va fi

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{F}, \qquad (74,VII)$$

sau

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=-\mu^2\frac{\bar{r}}{r^3}, \qquad (75,VII)$$

unde

$$\mu^2=GM. \qquad (76,VII)$$

Înainte de a începe integrarea ecuaţiei diferenţiale vectoriale (75,VII) menţionăm că ea reprezintă în acelaşi timp ecuaţia diferenţială vectorială a mişcării unui electron în câmpul electrostatic al nucleului central. În adevăr, notând, în acest caz, cu $Q$ sarcina pozitivă a nucleului central, cu $|e|=-e$ valoarea absolută a sarcinii electronului, cu $m$ masa electronului, folosind un sistem electrostatic de unităţi, forţa de atracţie este

$$\Phi=-\frac{Q|e|}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}\ \text{(legea lui Coulomb)}, \qquad (77,VII)$$

iar ecuaţia mişcării electronului este tot ecuaţia (75,VII) unde, de astă dată,

$$\mu^2=\frac{Q|e|}{m}.$$

Ecuaţia (75,VII) ne arată că acceleraţia mişcării trece mereu prin $S$, deci luând momentul ei faţă de $S$, avem

$$\bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=0;\ \text{deci}\ \ \frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=0,$$

sau, integrând

$$\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{c}, \qquad (78,VII)$$

$\bar{c}$ fiind un vector fix. Notând cu $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$ poziţia iniţială şi viteza iniţială a punctului $T$, avem

$$\bar{c}=\bar{r}_0\times\bar{v}_0. \qquad (79,VII)$$

Rezultă de aici că $T$ se mişcă într'un plan $E$, perpendicular pe $\bar{c}$ (fig. 207).

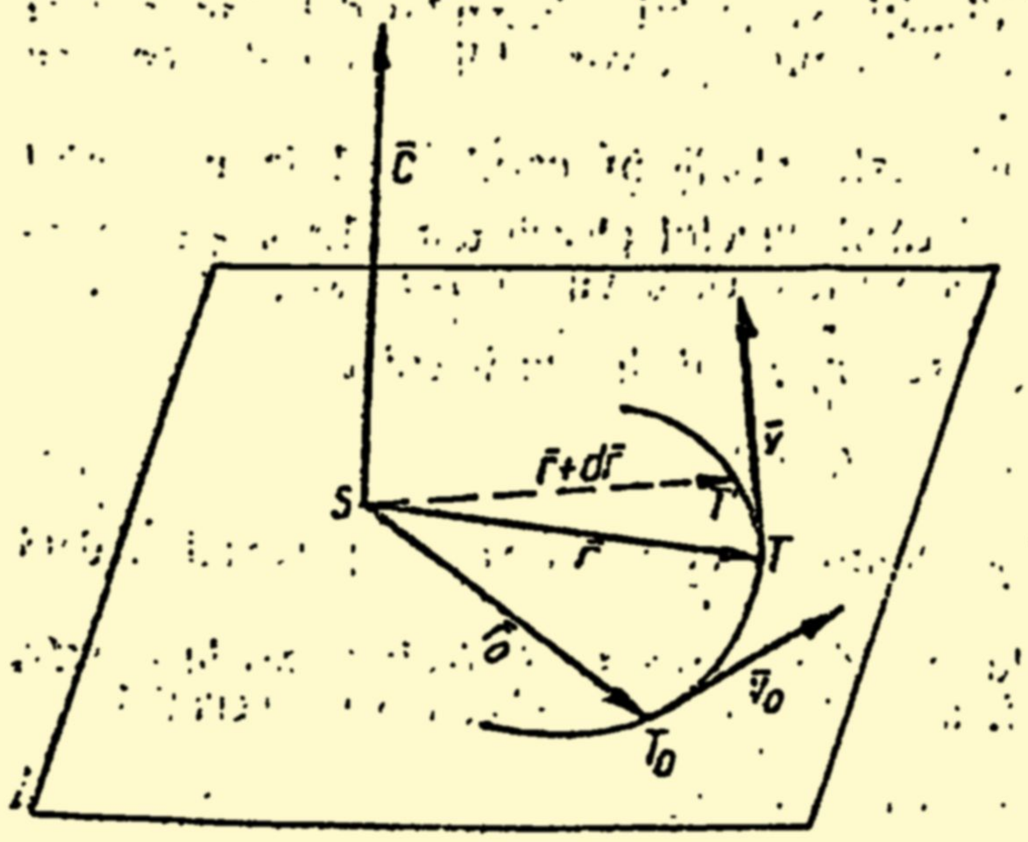


Fig. 207

Apoi

$$\bar{r}\times d\bar{r}=\bar{c}\,dt, \qquad (80,VII)$$

deci, notând cu $d\sigma$ aria infinitezimală determinată de

$$\bar{r}=\overline{ST};\quad \bar{r}+d\bar{r}=\overline{ST'}$$

şi de arcul $TT'$, avem

$$2d\sigma=c\,dt, \qquad (81,VII)$$

deci

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{c}{2}, \qquad (82,VII)$$

adică viteza areolară a razei vectoare $ST$ este constantă; altfel spus, raza vectoare $\overline{ST}$ descrie arii egale în timpuri egale (*legea a doua a lui Kepler*). Pentru a determina vectorul viteză în fiecare moment, precum şi forma curbei, adică vectorul $\bar{r}$ în fiecare moment, înmulţim vectorial ecuaţiile (75,VII) cu (78,VII) şi obţinem

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\bar{c}=-\frac{\mu^2}{r^3}\left[\bar{r}\times\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)\right], \qquad (83,VII)$$

Desvoltând dublul produs vectorial și ținând seama că $\bar{r}\,d\bar{r}=r\,dr$, avem (vezi și § 150 derivata versorului)

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\bar{c}=\mu^2\left[\frac{1}{r}\frac{d\bar{r}}{dt}+\bar{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\mu^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) \qquad (84,VII)$$

deci, integrând ecuația (84,VII), obținem

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{c}=\mu^2\frac{\bar{r}}{r}=\bar{d}, \qquad (85,VII)$$

unde $\bar{d}$ este un vector din planul $E$ (fig. 208). În funcție de condițiile inițiale, relația (85,VII) ne dă

$$\bar{d}=\mu^2\frac{\bar{r}_0}{r_0}-(\bar{v}_0\times\bar{c}). \qquad (86,VII)$$

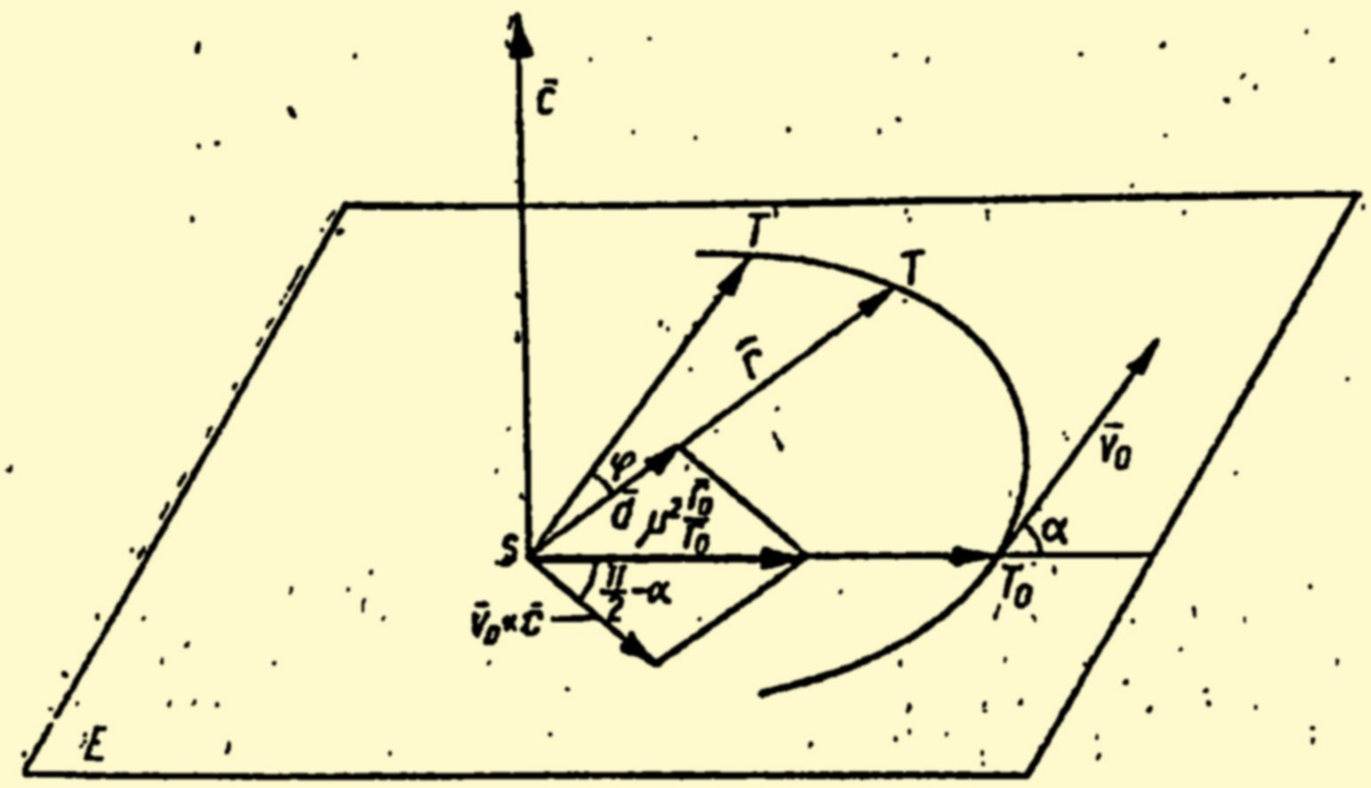



Fig. 208

Relația (86,VII) ne arată că

$$d=\mu^2\sqrt{1+\frac{v_0^2r_0^2\sin^2\alpha}{\mu^4}\left(v_0^2-\frac{2\mu^2}{r_0}\right)}. \qquad (87,VII)$$

Din relația (85,VII) putem deduce imediat vectorul viteză $\frac{d\bar{r}}{dt}$, dacă înmulțim vectorial la stânga cu $\bar{c}$. În acest caz, avem

$$\bar{c}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{c}\right)=\mu^2\left(\bar{c}\times\frac{\bar{r}}{r}\right)-(\bar{c}\times\bar{d}),$$

sau, desvoltând dublul produs vectorial și ținând seama că $\bar{c}$ și $\frac{d\bar{r}}{dt}$ sunt vectori perpendiculari, avem

$$c^2\frac{d\bar{r}}{dt}=\mu^2\left(\bar{c}\times\frac{\bar{r}}{r}\right)-(\bar{c}\times\bar{d}). \qquad (88,VII)$$

Relația (88,VII) determină în fiecare moment viteza într'un punct oarecare al traiectoriei. Astfel, ea arată că *hodograful mișcării este un cerc*. În adevăr, această relație se mai poate scrie

$$\frac{d\bar{r}}{dt}-\frac{1}{c^2}(\bar{d}\times\bar{c})=\frac{\mu^2}{c}\left(\frac{\bar{c}}{c}\times\frac{\bar{r}}{r}\right), \qquad (88',VII)$$

de unde rezultă că pătratul modulului (norma) vectorului

$$\bar{\lambda}=\frac{d\bar{r}}{dt}-\frac{1}{c^2}(\bar{d}\times\bar{c})$$

este egal cu $\frac{\mu^4}{c^2}$, deci hodograful este un cerc cu raza

$$R=\frac{\mu^2}{c} \qquad (89,VII)$$

$\$$ cu centrul $\Omega$ determinat de vectorul

$$\bar{h}=\frac{1}{c^2}(\bar{d}\times\bar{c}). \qquad (90,VII)$$

Pentru a determina traiectoria, este suficient să înmulțim relația (88,VII) vectorial cu $\bar{r}$, adică să luăm momentele vectorilor din această relație în raport cu $S$. Efectuând dublele produse vectoriale, care apar astfel în membrul al doilea, obținem

$$\bar{c}c^2=\bar{c}(\mu^2 r-\bar{r}\bar{d}), \qquad (91,VII)$$

de unde rezultă că

$$\mu^2 r-\bar{r}\bar{d}=c^2, \qquad (92,VII)$$

adică, notând cu $\varphi$ unghiul $(\bar{d},\bar{r})$, avem

$$r=\frac{c^2}{\mu^2-d\cos\varphi}=\frac{p}{1-k\cos\varphi}r \qquad (93,VII)$$

unde s'a notat

$$p=\frac{c^2}{\mu^2} \quad \text{și} \quad k=\frac{d}{\mu^2}. \qquad (94,VII)$$

Rezultă de aici că traiectoria este o conică având punctul $S$ ca focar și vectorul $\bar{d}$ ca direcție a unei axe (*prima lege a lui Kepler*) și anume o elipsă pentru $k<1$, o hiperbolă pentru $k>1$ și o parabolă pentru $k=1$ ($p$ este parametrul și $k$ excentricitatea conicei).

Rezultatele acestei discuții admit o interpretare geometrică simplă cu ajutorul hodografului mișcării. Luând $S$ ca pol al hodografului, s'a arătat că acesta este un cerc de rază $R=\frac{\mu^2}{c}$, centrul său $\Omega$ fiind determinat de vectorul $\overline{S\Omega}=\frac{1}{c^2}(\bar{d}\times\bar{c})$ [formulele (89,VII) și (90,VII)].

Dacă $S$ este în interiorul cercului, avem $S\Omega<R$ sau — ținând seamă că vectorii $\bar{d}$ și $\bar{c}$ sunt perpendiculari —

$$\frac{\mu^2}{c}<\frac{dc}{c^2}, \quad \text{de unde} \quad k=\frac{d}{\mu^2}<1,$$

și deci traiectoria este o elipsă. Dacă $S$ este pe cerc, traiectoria este o parabolă și în sfârșit, dacă $S$ este exterior cercului, traiectoria este o hiperbolă.

Ținând seama de relația (87,VII), rezultă, deasemenea, următoarele în funcție de viteza inițială $v_0$:

$$\left.\begin{aligned} &v_0<\mu\sqrt{\frac{2}{r_0}}, \text{ traiectoria este o elipsă;}\\ &v_0=\mu\sqrt{\frac{2}{r_0}} \text{ traiectoria este o parabolă;}\\ &v_0>\mu\sqrt{\frac{2}{r_0}} \text{ traiectoria este o hiperbolă.}\end{aligned}\right\} \qquad (95,VII)$$

Când traiectoria este o elipsă — cazul planetelor — se poate verifica cu ușurință și legea a treia a lui Kepler. Notând cu $\Sigma$ aria elipsei și cu $\tau$ timpul de revoluție, adică timpul necesar punctului $T$ pentru a descrie elipsa, avem, în baza relației (82,VII).

$$\Sigma=\frac{c}{2}\tau. \qquad (96,VII)$$

Scanned with OKEN Scanner

Notând cu $a$ și $b$ semiaxele elipsei avem, făcând succesiv $\varphi=0$ și $\varphi=\pi$ în ecuația (93,VII)

$$|\overline{SA}|=\frac{p}{1-k};\quad |\overline{SP}|=\frac{p}{1+k}, \tag{97,VII}$$

unde $A$ și $P$ sunt capetele axei mari a elipsei și deci

$$a=\frac{1}{2}\left(|\overline{SP}|+|\overline{SA}|\right)=\frac{p}{1-k^2}; \tag{98,VII}$$

apoi

$$|\overline{SA}|\cdot|\overline{SP}|=b^2=\frac{p^2}{1-k^2}, \tag{99,VII}$$

deci aria elipsei este

$$\Sigma=\pi ab=\frac{\pi p^2}{(1-k^2)^{3/2}}. \tag{100,VII}$$

Înlocuind în relația (96,VII), ridicată în prealabil la pătrat, avem

$$\tau^2=\frac{p^3}{(1-k^2)^3}\cdot\frac{4\pi^2 p}{c^2}$$

sau

$$\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu^2}=\frac{4\pi^2}{GM}, \tag{101,VII}$$

adică *legea a treia a lui Kepler*: pătratele timpurilor de revoluție sunt direct proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale elipselor descrise.

**4. Problema celor două corpuri.** Un studiu mai atent arată că raportul $\tau^2/a^3$ nu este o constantă universală și prin urmare legea a treia a lui Kepler, în forma (101,VII) nu este absolut exactă. In adevăr, să considerăm un sistem fix (sau în translație uniformă față de un sistem fix) și să notăm cu $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ vectorii de poziție ai centrelor $S$ și $T$ ai maselor $M$ și $m$ față de centrul $O$ al sistemului de referință. Punând

$$\bar{r}=\overline{ST},$$

vom avea

$$M\frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}=G\frac{Mm}{r^2}\,\frac{\bar{r}}{r} \tag{102,VII}$$

și

$$m\frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2}=-G\frac{Mm}{r^2}\,\frac{\bar{r}}{r}. \tag{103,VII}$$

Deoarece

$$\bar{r}=\bar{r}_2-\bar{r}_1,$$

avem și

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2}-\frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}, \tag{104,VII}$$

Simplificând și scăzând, membru cu membru, ecuațiile (103,VII) și (102,VII), se obține

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=-\frac{G(M+m)}{r^2}\,\frac{\bar{r}}{r}, \tag{105,VII}$$

ecuație care diferă de ecuația (75,VII) prin înlocuirea expresiei $GM$ prin $G(M+m)$. Concluziile trase până aici *sunt deci valabile în privința mișcării relative* a punctului $T$ față de $S$. Legea a treia a lui Kepler va lua însă forma

$$\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(M+m)}. \tag{106,VII}$$

Se vede că raportul $\tau^2/a^3$ nu este o constantă universală, ci diferă dela o planetă la alta. Deosebirea este însă foarte mică, deoarece $m$ este neglijabil față de $M$.

Notând cu $\bar{\rho}$ vectorul de poziție al centrului de masă $O$ al sistemului de mase $M$, $m$, avem

$$\bar{\rho}(M+m)=m\bar{r}_2+M\bar{r}_1, \tag{107,VII}$$

de unde se deduce, ținând seama de ecuațiile (102,VII) și (103,VII) că

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}=0, \tag{108,VII}$$

deci centrul de greutate este sau, fix, sau în mișcare rectilinie și uniformă față de un sistem fix. Dacă se ia acest centru de greutate ca origine a sistemului de referință, avem

$$\bar{r}_1=-\frac{m}{M+m}\bar{r}; \tag{109,VII}$$

$$\bar{r}_2=\frac{M}{M+m}\bar{r}. \tag{110,VII}$$

Urmează de aici că traiectoriile lui $S$ și $T$, față de acest sistem, sunt tot elipse (ne limităm la cazul când $S$ este centrul soarelui și $T$ al unei planete), și anume că elipsa descrisă de $T$ în acest sistem este aproape indentică cu aceea descrisă de $T$ în mișcarea sa relativă față de $S$, iar elipsa descrisă de $S$ în jurul lui $O$ este foarte mică și descrisă în sens invers.

*Se vede că problema celor două corpuri nu diferă esențial de problema mișcării unui corp în jurul celuilalt, considerat ca fix.*

**Observație.** Expresia modulului vitezei în funcție de raza vectoare se obține imediat, dacă se aplică teorema energiei cinetice. Avem

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}d\bar{r}=-G\frac{Mm}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}d\bar{r},$$

însă

$$rdr=\bar{r}d\bar{r};$$

deci

$$\frac{1}{2}dv^2=-GM\frac{dr}{r^2}=\mu^2 d\frac{1}{r}.$$

Astfel:

$$v^2-v_0^2=2\mu^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right), \tag{111,VII}$$

sau

$$v=\sqrt{v_0^2+2\mu^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}. \tag{112,VII}$$

Se poate verifica și cu ajutorul acestei formule că traiectoria nu poate avea puncte la infinit, deci nu poate fi decât o elipsă, dacă $v_0^2<\frac{2\mu^2}{r_0}$.

## § 220. Mișcarea punctului material, fără frecare, pe o curbă fixă

In cele ce precedă, punctul material a fost considerat liber în spațiu, putând să se miște fără a fi supus vreunei legături. In cazul când punctul este obligat să se miște pe o suprafață sau pe o curbă, mișcarea sa poate fi considerată ca aceea a unui punct liber prin introducerea unei *reacțiuni*. Vom examina cazul unui punct ce se mișcă pe o curbă perfect netedă. Se arată că forța de reacțiune este atunci normală la curbă.

Scanned with OKEN Scanner

Condiţiile cinematice diferenţiale ale mişcării nu depind de reacţiune, deoarece ele decurg din traiectoria parcursă în timp, astfel încât vom putea determina vitezele şi acceleraţiile prin aceleaşi formule şi în cazul când *o traiectorie dată* este parcursă de un punct liber sau constrâns.

Notând cu $\bar{r}=\bar{r}(t)$ ecuaţia vectorială a acestei traiectorii, obţinem pentru viteză şi acceleraţie expresiile:

$$\bar{v}=v\bar{t};$$

$$\bar{w}=\frac{dv}{dt}\bar{t}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n},$$

conform cu formulele (1,VII) şi (13,VII).

In cazul când punctul este obligat să descrie traiectoria sa, dacă notăm cu $\bar{R}$ reacţiunea, ecuaţia fundamentală a Dinamicei devine

$$m\bar{w}=\bar{F}+\bar{R}. \qquad (113,VII)$$

Dacă raportăm această mişcare la triedrul principal, vom scrie

$$\bar{F}=\bar{t}F_t+\bar{n}F_n+\bar{b}F_b;$$

$$\bar{R}=\bar{t}R_t+\bar{n}R_n+\bar{b}R_b=\bar{n}R_n+\bar{b}R_b,$$

deoarece $R_t=0$.

Introducând expresiile lui $\bar{w}, \bar{F}, \bar{R}$ în ecuaţia (113,VII), obţinem relaţiile:

$$m\frac{dv}{dt}=F_t;$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=F_n+R_n; \qquad (114,VII)$$

$$0=F_b+R_b,$$

din care deducem componentele reacţiunii

$$R_n=\frac{mv^2}{\rho}-F_n; \quad R_b=-F_b. \qquad (115,VII)$$

Curba fiind cunoscută, prima ecuaţie se poate scrie

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_t$$

şi *determină arcul s în funcţie de t, deci mişcarea pe traiectorie.*

In adevăr, forţa $\bar{F}$ fiind o funcţie de punctul $M$ de pe curbă, de viteza sa şi de $t$, va avea o expresie de forma

$$\bar{F}=\bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t).$$

Luând ca parametru pe curbă arcul $s$, şi ţinând seamă de expresia lui $\bar{v}$, forţa se va putea pune sub forma:

$$\bar{F}=\bar{F}\left(s, \frac{ds}{dt}, t\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât mișcarea pe traiectorie va fi definită prin ecuația diferențială de ordinul al doilea de formă normală

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t\left(s, \frac{ds}{dt}, t\right). \qquad (116,VII)$$

Formulele (115,VII) vor determina componentele reacțiunii care, după integrarea ecuației (116,VII), vor fi cunoscute în funcție de $t$ în fiecare punct al traiectoriei.

In cazul unei traiectorii plane și în ipoteza că forța este în planul curbei, vom avea $F_b = 0$ și din (115,VII) vom deduce $R_b = 0$, deci reacțiunea va fi pe normala traiectoriei în planul curbei. Aceeași proprietate sub o formă mai generală se găsește în cazul când forța este permanent în planul osculator al traiectoriei: *reacțiunea va avea direcția normalei principale în fiecare punct.*

Ecuațiile (114,VII) rezultă din raportarea legii fundamentale a Dinamicei la un sistem de referință local, *atașat traiectoriei.* Ele reduc dificultățile la integrarea unei singure ecuații, care leagă arcul $s$ de timpul $t$. Ecuația (116,VII) poate servi ca lege de mișcare rectilinie, dacă stabilim o corespondență biunivocă între traiectorie și o dreaptă și reprezintă mișcarea imaginii $M'$, corespunzătoare punctului $M$ de abscisă curbilinie $s$.

In fond, *prin introducerea triedrului mobil, am obținut pentru un punct material cu un grad de libertate o singură ecuație de mișcare, iar aceasta are semnificația unei ecuații de mișcare pe o dreaptă, deci într'un mediu cu o dimensiune.*

Folosind orice sistem de coordonate, din ecuația vectorială (113,VII) vom obține trei ecuații, în care vor apărea cele trei coordonate ale punctului $M$. Cum aceste coordonate sunt funcții de un parametru, aceste ecuații vor stabili relații diferențiale între parametrul curbei și timp, dar vor conține și componentele reacțiunii. Pentru a evita apariția uneia din componente ea, trebue să fie normală direcției axei respective a triedrului de referință. Cum însă reacțiunea este normală la traiectorie, direcția sa se schimbă în fiecare punct, ceeace arată limpede că *pentru a obține într'un sistem de referință ecuații de mișcare, din care una să nu conțină componentele reacțiunii, este necesar și suficient să se utilizeze un sistem de coordonate curbilinii, în care traiectoria este o curbă coordonată.*

Cum orice curbă continuă, cu tangentă continuă, poate fi înglobată într'un sistem de coordonate curbilinii, ca intersecție de două suprafețe coordonate, într'o infinitate de moduri, dacă presupunem ales un astfel de sistem de coordonate, vom putea pune ecuațiile curbei sub forma

$$q^2 = c^2; \quad q^3 = c^3,$$

$q^1$ reprezentând coordonata variabilă pe traiectorie.

Orice sistem de coordonate curbilinii introduce în fiecare punct un reper local, format de vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$. Componenta reacțiunii pe tangenta la traiectorie fiind nulă, ea nu va interveni în ecuația relativă la proiecțiile pe $\bar{r}_1$.

Folosind componentele accelerației în coordonate curbilinii (19,VII), ecuația fundamentală (114,VII) se va scrie pentru prima componentă

$$\frac{m}{2\sqrt{g_{11}}}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}^1} - \frac{\partial v^2}{\partial q^1}\right] = F_1,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $F_1$ reprezintă componenta covariantă a forţei pe direcţia $\bar{r}_1$:

$$\bar{F}_1 = \bar{F}\frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1|} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\bar{F}\bar{r}_1.$$

Expresia lucrului mecanic elementar ne dă imediat componentele forţei pe direcţiile $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$:

$$\delta\mathfrak{L} = \bar{F}\,\overline{dr} = \bar{F}(\bar{r}_1\,dq^1 + \bar{r}_2\,dq^2 + \bar{r}_3\,dq^3) = F_1\,dq^1 + F_2\,dq^2 + F_3\,dq^3$$

numite şi *componentele generalizate ale forţei.*

Observăm că factorul $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ se reduce în ambii membri, astfel încât obţinem aceleaşi ecuaţii când luăm ca bază $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ sau versorii $\frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1|}, \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2|}, \frac{\bar{r}_3}{|\bar{r}_3|}$.

Introducând expresia energiei cinetice $T$, şi notând reacţiunea prin $\bar{N}$, ecuaţiile de mişcare vor fi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^1} = F_1;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^2} = F_2 + N_2; \qquad (117,VII)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^3} = F_3 + N_3.$$

Ca şi în cazul raportării la triedrul mobil, prima ecuaţie determină mişcarea; iar ultimele două reacţiunea. Este important să subliniem pe acest exemplu simplu posibilitatea de a separa, printr'o alegere a sistemului de referinţă, determinarea mişcării cu ajutorul forţelor date de calculul reacţiunii. Ea se datoreşte faptului că mişcarea se face pe o curbă, deci într'un spaţiu cu o dimensiune, pe care reacţiunea fiind normală, are o componentă nulă. Această idee stă la baza teoriei lui Lagrange asupra mişcării sistemelor materiale.

Teorema energiei în mişcarea pe o curbă conduce la acelaşi rezultat. In adevăr, vom avea:

$$d\frac{mv^2}{2} = (\bar{F} + \bar{N})\,d\bar{r}$$

pentru o deplasare elementară a punctului material, considerat ca liber. Cum însă mişcarea se va face pe o curbă dată, $\bar{N}\,d\bar{r} = 0$ şi deci

$$d\frac{mv^2}{2} = \bar{F}\,d\bar{r} \qquad (118,VII)$$

ca şi cum punctul s'ar mişca exclusiv sub acţiunea forţei $\bar{F}$. Se poate arăta dealtfel că ecuaţia (118,VII) este echivalentă cu prima ecuaţie (117,VII), când deplasarea se face pe curba coordonată

$$q^2 = c^2; \quad q^3 = c^3; \quad dq^2 = 0; \quad dq^3 = 0.$$

Prin urmare: *In cazul când nu urmărim determinarea reacţiunii, teorema energiei determină mişcarea pe curbă.*

## § 221. Mişcarea unui punct material, fără frecare, pe o suprafaţă fixă

Ca şi în cazul mişcărilor pe o curbă, dacă introducem reacţiunea $\bar{N}$, normală la suprafaţă, când nu există frecare, ecuaţia vectorială a mişcării va fi

$$m\bar{w}=F+\bar{N}.$$

Notând cu $\bar{n}$ versorul normalei la suprafaţa $S$, cu $\bar{t},\bar{n},\bar{b}$ versorii fundamentali într'un punct curent al traiectoriei $\Gamma$, viteza şi acceleraţia vor avea expresiile

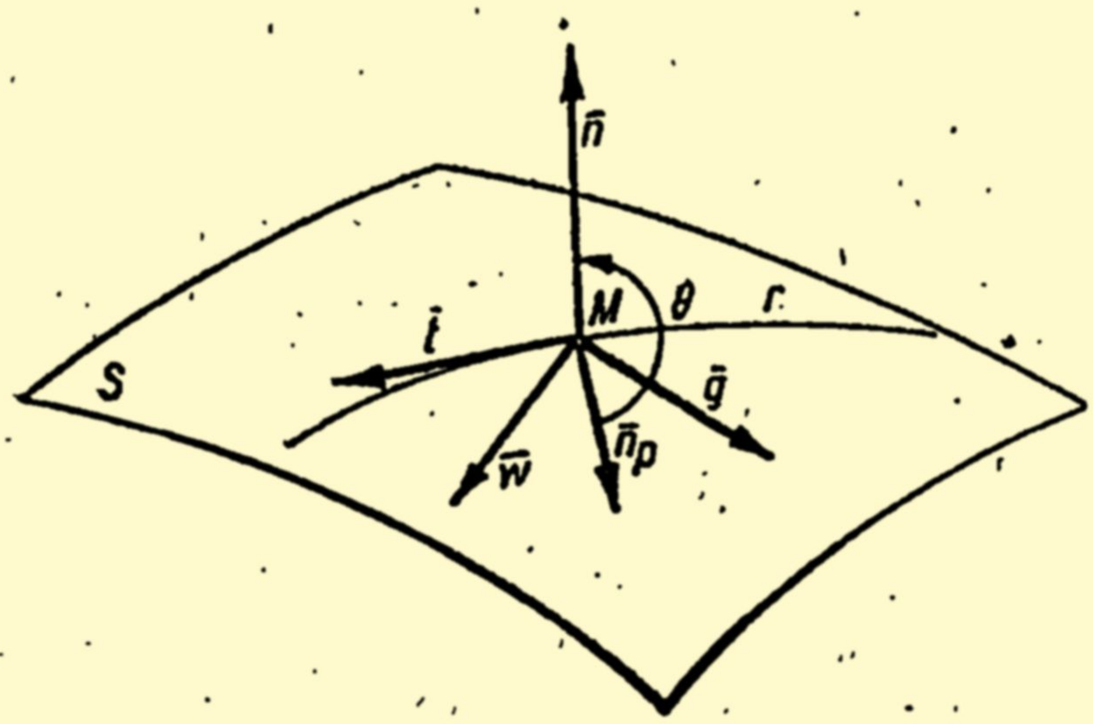



Fig. 209

$$\bar{v}=v\bar{t};\quad \bar{w}=\frac{dv}{dt}\bar{t}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n}_p,$$

astfel încât mişcarea va fi dată de ecuaţia

$$m\left(\frac{dv}{dt}\bar{t}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n}_p\right)=\bar{F}+\bar{N}. \qquad (119,VII)$$

Vom putea ataşa un triedru mobil traiectoriei, însă cum reacţiunea este normală la $S$, pentru a obţine ecuaţii în care $\bar{N}$ nu intervine, una din muchiile triedrului trebue să fie normală la suprafaţa $S$. Rezultă că un triedru mobil, legat atât de traiectorie, cât şi de suprafaţa pe care are loc mişcarea va fi $\bar{n}$, $\bar{t}$, $\bar{g}$, unde

$$g=\bar{n}\times t$$

este un versor din planul tangent perpendicular pe $\bar{t}$ şi astfel încât triedrul $\bar{n},\bar{t},\bar{g}$ să fie drept (fig. 209).

Notând cu $F_n,F_t,F_g$, şi $N_n,N_t,N_g$ componentele lui $\bar{F}$ şi $\bar{N}$ pe acest triedru mobil, numit *triedrul lui Darboux*, ecuaţiile de mişcare se vor obţine înmulţind ambii membri ai ecuaţiei (119,VII) pe rând cu $\bar{t},\bar{g},\bar{n}$ şi ţinând seama că

$$N_t=0;\quad N_g=0$$

Vom obţine astfel ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt}&=F_t;\\ m\frac{v^2}{\rho}\bar{n}_p\bar{g}&=F_g;\\ m\frac{v^2}{\rho}\bar{n}_p\bar{n}&=F_n+N_n. \end{aligned}\right\} \qquad (120,VII)$$

Primele două, independente de $\bar{N}$, vor determina mişcarea pe suprafaţă, iar ultima va da reacţiunea. Aceste ecuaţii pun în joc proprietăţi geometrice

ale curbelor trasate pe o suprafaţă şi evident proprietăţi ale suprafeţei însăşi, ca şi în cazul mişcării pe o curbă. Vectorul $\bar{g}$ se numeşte *normala geodezică* a curbei $\Gamma$ în $M$. Dacă notăm cu $\theta$ unghiul format de normala principală $\bar{n}_p$ cu normala la suprafaţă $\bar{n}$, vom avea

$$\bar{n}_p \bar{n} = \cos\theta; \quad \bar{n}_p \bar{g} = \sin\theta,$$

deoarece $\bar{n}, \bar{n}_p$ şi $\bar{g}$ sunt în planul normal la traiectorie în $M$.

Expresiile

$$\frac{1}{R} = \frac{n_p n}{\rho} = \frac{\cos\theta}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho_g} = \frac{n_p g}{\rho} = \frac{\sin\theta}{\rho} \qquad (121,VII)$$

poartă numele de *curbură normală a suprafeţei* pe direcţia $\bar{t}$, respectiv *curbură geodezică a curbei* $\Gamma$.

Cu aceste noţiuni şi notaţii ecuaţiile (120,VII) devin

$$m\dot{v} = F_t; \quad m\frac{v^2}{\rho_g} F_g; \qquad (122,VII)$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n.$$

*Ele pun în evidenţă strânsa legătură dintre structura geometrică a unei suprafeţe şi fenomenele de mişcare pe această suprafaţă*, observaţie valabilă şi pentru curbe, şi care permite interpretarea geometrică a mişcărilor şi în cazul general al unui sistem material. *Folosind un spaţiu reprezentativ cu n dimensiuni, mişcarea sistemului cu n grade de libertate poate fi considerată ca mişcarea unui singur punct material pe o varietate curbă n-dimensională.*

Mişcarea pe o suprafaţă poate fi studiată folosind, ca şi pentru curbe, un sistem de coordonate curbilinii, în care suprafaţa $S$ este o suprafaţă coordonată $q^3 = \text{const}$. Se vor obţine trei ecuaţii de mişcare, din care numai una va conţine componenta normală $N_n$ a reacţiunii, celelalte două determinând mişcarea pe $S$.

Dacă nu urmărim determinarea reacţiunii, *putem găsi ecuaţiile de mişcare pe o suprafaţă oarecare S, dată prin reprezentarea sa parametrică vectorială:*

$$\bar{r} = \bar{r}(p, q).$$

In adevăr, dacă mişcarea are loc pe o curbă $\Gamma$ de pe $S$, ecuaţiile parametrice ale traiectoriei în coordonatele curbilinii $p, q$ vor fi de forma

$$p = p(t); \quad q = q(t).$$

Vectorul viteză va fi

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\bar{r}(p(t), \quad q(t)) = \bar{r}_p \frac{dp}{dt} + \bar{r}_q \frac{dq}{dt} = \bar{r}_p \dot{p} + \bar{r}_q \dot{q}. \qquad (123,VII)$$

Vom alege ca triedru de referinţă triedrul format de $\bar{n}, \bar{r}_p, \bar{r}_q$ şi vom considera numai *componentele covariante*, deci proiecţiile ortogonale pe $\bar{r}_p, r_q$, înlăturând astfel întroducerea reacţiunii. Vom nota

$$v_p = \bar{v}\bar{r}_p; \quad v_q = \bar{v}\bar{r}_q.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinând seama de (122,VII) şi de notaţia lui Gauss

$$E=\bar{r}_p^2;\quad F=\bar{r}_p\bar{r}_q;\quad G=\bar{r}_q^2,$$

vom avea

$$v_p=E\dot{p}+F\dot{q};\quad v_q=F\dot{p}+G\dot{q}.$$

Introducând expresia lui $v^2$ prin forma pătratică

$$Q=\bar{v}^2=(\bar{r}_p\dot{p}+\bar{r}_q\dot{q})^2=E\dot{p}^2+2F\dot{p}\dot{q}+G\dot{q}^2, \qquad (124,VII)$$

componentele vitezei vor deveni

$$v_p=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial\dot{p}};\quad v_q=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial\dot{q}}. \qquad (125,VII)$$

Componentele covariante ale acceleraţiei vor fi

$$w_p=\bar{\omega}\bar{r}_p;\quad w_q=\bar{\omega}\bar{r}_q$$

şi se vor obţine prin derivarea în raport cu $t$ a componentelor vitezei. Vom avea

$$\frac{dv_p}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{v}\bar{r}_p)=\bar{\omega}\bar{r}_p+\bar{v}\frac{d\bar{r}_p}{dt};$$
$$\frac{dv_q}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar{v}\bar{r}_q)=\bar{\omega}\bar{r}_q+\bar{v}\frac{d\bar{r}_q}{dt}. \qquad (126,VII)$$

Calculul derivatelor $\frac{d\bar{r}_p}{dt}$, $\frac{d\bar{r}_q}{dt}$ a fost făcut anterior (§ 210). Vom avea:

$$\frac{d\bar{r}_p}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial p}\right)=\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial p^2}\dot{p}+\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial p\partial q}\dot{q}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial p};\quad \frac{d\bar{r}_q}{dt}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial q},$$

ţinând seamă de (121,VII).

Din (126,VII) şi (125,VII), vom deduce apoi

$$\bar{w}_p=\bar{\omega}\bar{r}_p=\frac{dv_p}{dt}-\bar{v}\frac{d\bar{r}_p}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial\dot{p}}\right)-\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial p}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial\dot{p}}\right)-\frac{\partial Q}{\partial p}\right]$$
$$\bar{w}_q=\bar{\omega}\bar{r}_q=\frac{dv_q}{dt}-\bar{v}\frac{d\bar{r}_q}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial\dot{q}}\right)-\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial q}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial Q}{\partial q}\right]. \qquad (127,VII)$$

Observând că

$$T=\frac{mQ}{2},$$

putem introduce energia cinetică în expresiile (127,VII), astfel încât din ecuaţia fundamentală, prin înmulţire scalară cu $\bar{r}_p$, $\bar{r}_q$, vom deduce componentele covariante ale forţelor pe planul tangent.

Ecuaţiile de mişcare pe suprafaţă vor fi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{p}}\right)-\frac{\partial T}{\partial p}=F_p;$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=F_q; \qquad (128,VII)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuații, pe care le regăsim în toate cazurile în care punem în evidență numărul gradelor de libertate ale punctului prin parametri care variază independent, se numesc *ecuațiile lui Lagrange.* Facem observația că *ele pot fi scrise fără să ținem seama că suprafața este scufundată în spațiul cu trei dimensiuni,* deoarece conțin numai elemente calculabile cu ajutorul primei forme fundamentele, cum rezultă din expresia lui $T$:

$$T = \frac{mQ}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left[E\dot{p}^2 + 2F\dot{p}\dot{q} + G\dot{q}^2\right],$$

iar $F_p$, $F_q$ sunt componentele forței pe două direcții de pe suprafață, deci reprezintă împreună componenta tangențială a forței date.

Mișcarea se face ca și cum punctul s'ar deplasa liber în funcție de cei doi parametri $p$ și $q$ pe suprafața $S$ sub acțiunea unei forțe tangențiale $F_t$.

Din relația

$$d\frac{mv^2}{2} = (\bar{F} + \bar{N})\,d\bar{r} = \bar{F}\,d\bar{r} = (F_p\bar{r}_p + F_q\bar{r}_q + F_n\bar{n})\,d\bar{r} = (F_p\bar{r}_p + F_q\bar{r}_q)\,d\bar{r}$$

deducem că teorema energiei se aplică forței tangențiale $\bar{F}_t$, astfel încât vom avea

$$dT = \bar{F}_t d\bar{r}, \qquad (129,VII)$$

deci mișcarea poate fi considerată ca autonomă pe o varietate cu două dimensiuni, tot așa cum mișcările plane pot fi determinate, fără a ține seama că planul este în spațiu.

## § 222. Traiectorii geodezice pe o suprafață

Când un punct material se mișcă liber în spațiu, fără ca asupra lui să acționeze vreo forță, mișcarea sa este rectilinie și uniformă, sau se reduce la repaus, în baza principiului inerției. Aceeași proprietate o regăsim și pentru mișcările plane sau rectilinii, considerate ca niște cazuri particulare ale mișcării în spațiu.

Dacă un punct se mișcă pe o suprafață fixă, fără frecare, sub acțiunea unei forțe normale la suprafață, componenta tangențială $\bar{F}_t = 0$. Din observațiile făcute asupra autonomiei mișcărilor pe o suprafață sub acțiunea forțelor tangențiale, deducem că vom obține un caz de mișcare, analog mișcării rectilinii și uniforme din spațiu, din plan, sau de pe o dreaptă.

Traiectoriile mișcării, în cazul când componenta tangențială a forței este nulă, se numesc *geodezice ale suprafeței* (§ 198).

Ecuațiile de mișcare pe geodezice sunt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial T}{\partial p} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \qquad (130,VII)$$

iar teorema energiei devine

$$T = h; \quad v = \sqrt{\frac{2h}{m}}, \qquad (131,VII)$$

deci *mișcarea este uniformă pe geodezice.*

Geodezicele, care se substitue traiectoriilor rectilinii pe o suprafaţă curbă, au numeroase proprietăţi geometrice, prin care se stabileşte analogia lor cu dreptele.

Din relaţiile între mărimile cinematice $\bar{v}$ şi $\bar{w}$, rezultă relaţii geometrice pentru traiectorii. Astfel, să calculăm versorul normalei geodezice $\bar{g}$, folosind viteza. Vom avea

$$\bar{g}=\bar{n}\times\bar{t}=\bar{n}\times\frac{d\bar{r}}{ds}=\frac{1}{v}(\bar{n}\times\bar{v})=\frac{1}{v\sqrt{EG-F^2}}(\bar{r}_p\times\bar{r}_q)\times\bar{v}.$$

Dublul produs $(\bar{r}_p\times\bar{r}_q)\times\bar{v}$ se poate însă exprima astfel:

$$(\bar{r}_p\times\bar{r}_q)\times\bar{v}=(\bar{r}_p\times\bar{r}_q)\times(\bar{r}_p\dot{p}+\bar{r}_q\dot{q})=(\bar{r}_p\times\bar{r}_q)\times\bar{r}_p\dot{p}+(\bar{r}_p\times\bar{r}_q)\times\bar{r}_q\dot{q}=$$
$$=(E\bar{r}_q-F\bar{r}_p)\dot{p}+(F\bar{r}_q-G\bar{r}_p)\dot{q}=v_p\bar{r}_q-v_q\bar{r}_p$$

dacă ţinem seama de (124,VII) şi (125,VII). Deducem imediat:

$$\bar{g}=\frac{1}{vW}(v_p\bar{r}_q-v_q\bar{r}_p);\quad W=\sqrt{EG-F^2}.$$

Să calculăm unghiul acceleraţiei cu normala geodezică prin produsul scalar

$$\bar{g}\bar{w}=\bar{g}\left(\dot{\bar{v}}\bar{t}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n}_p\right)=\frac{v^2}{\rho}\bar{g}\bar{n}_p=\frac{v^2}{\rho_g}=\frac{a^2}{\rho}\sin\theta$$

în virtutea formulelor (121,VII). Inlocuind pe $\bar{g}$ prin valoarea sa, vom avea

$$\bar{g}\bar{w}=\frac{1}{vW}(v_p\bar{r}_q-v_q\bar{r}_p)\bar{w}=\frac{1}{vW}(v_pw_q-v_qw_p)=\frac{v^2}{\rho_g}=\frac{v^2}{\rho}\sin\theta.$$

Deducem imediat o *expresie a curburii geodezice* şi alta a unghiului $\theta$, format de normala principală a traiectoriei cu normala la suprafaţă:

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{1}{v^3W}(v_pw_q-v_q\dot{w}_p);$$
$$\sin\theta=\frac{\rho}{v^3W}(v_pw_q-v_qw_p). \qquad (132,VII)$$

In cazul mişcărilor pe o suprafaţă, fără forţa tangenţială $\bar{F}_t$, vom avea conform cu ecuaţiile (130,VII)

$$w_p=0;\quad w_q=0.$$

şi vom deduce din (132,VII)

$$\frac{1}{\rho_g}=0;\quad \theta=0.$$

Prin urmare: *Curbura geodezică a geodezicelor unei suprafeţe este nulă.* Deoarece $\theta$ este nul, normala principală are direcţia normalei la suprafaţă, deci planul osculator este normal: *Dealungul geodezicelor, planul osculator este normal la suprafaţă* (§ 198).

## EXERCIŢII

**1.** Pentru cazul unei mişcări plane, să se găsească expresia vitezei şi acceleraţiei unui punct mobil, în coordonate eliptice plane:

$$x=a\cos u\,\mathrm{ch}\,v;$$
$$y=a\sin u\,\mathrm{sh}\,v; \qquad (a>0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Transformarea stabilește o corespondență biunivocă între punctele interioare domeniului $0 \leq u < 2\pi$; $-\infty < v < +\infty$ și planul $(x, y)$. Curbele $dv = 0$ sunt elipse omofocale, iar $du = 0$ hiperbole omofocale, ortogonale primelor. Notând $q^1 = u$ și $q^2 = v$, avem $g_{11} = \bar{r}_1 \bar{r}_1 = a^2 \operatorname{ch}^2 v$; $g_{12} = \bar{r}_1 \bar{r}_2 = 0$ și $g_{22} = \bar{r}_2 \bar{r}_2 = a^2 \operatorname{ch}^2 v$. Dacă $\bar{e}_u$ și $\bar{e}_v$ sunt versorii bazei, avem

$$\bar{v} = a \operatorname{ch} v \, (\dot{u}^2 \bar{e}_u + \dot{v} \bar{e}_v).$$

Aplicând formulele (18,VII) și (19,VII) formei pătratice

$$Q = g_{11} \dot{u}^2 + 2 g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2$$

rezultă imediat că

$$\bar{w} = a \left\{ (\ddot{u} \operatorname{ch} v + 2 \dot{u} \dot{v} \operatorname{sh} v) \bar{e}_u + [\ddot{v} \operatorname{ch} v + 2 \dot{v}^2 \operatorname{sh} v - (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \operatorname{sh} v] \bar{e}_v \right\}$$

2. Să se rezolve aceeași problemă în cazul când se utilizează coordonatele parabolice

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}; \quad y = uv.$$

Indicație. Avem

$$g_{11} = g_{22} = u^2 + v^2 \quad \text{și} \quad g_{12} = 0,$$

deci

$$\bar{v} = \sqrt{u^2 + v^2} (\dot{u} \bar{e}_u + \dot{v} \bar{e}_v), \text{ etc.}$$

3. Se consideră în spațiul cu trei dimensiuni sistemul de coordonate dat de transformarea

$$x = \rho \cos \theta;$$
$$y = \rho \sin \theta;$$
$$z = \rho \varphi,$$

denumit sistem de coordonate conice. Să se scrie expresia vitezei și a accelerației în acest sistem.

Indicație. Suprafețele de coordonate sunt:

| | | |
|---|---|---|
| planele | $x \operatorname{tg} \theta = y$ | pentru $d\theta = 0$; |
| cilindrii | $x^2 + y^2 = \rho^2$ | pentru $d\rho = 0$; |
| conurile | $(x^2 + y^2) \varphi^2 - z^2 = 0$ | pentru $d\varphi = 0$. |

Acest sistem *nu* este triplu ortogonal. Un calcul simplu ne arată că (s'a notat $q^1 = \rho$ $q^2 = \theta$; $q^3 = \varphi$)

$$g_{11} = (1 + \varphi)^2 \quad g_{22} = \rho^2; \quad g_{33} = \rho^2;$$
$$g_{13} = \rho\varphi; \qquad g_{12} = g_{23} = 0.$$

4. Suprafețele reprezentate de ecuația

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0,$$

unde $a > b > c > 0$ și $\lambda$ este un parametru variabil, sunt cuadrice omofocale. Prin fiecare punct din spațiu trec trei suprafețe ale acestei familii, un elipsoid, un hiperboloid cu două pânze și un hiperboloid riglat, cu alte cuvinte fiecărui sistem $(x, y, z)$ îi corespund trei valori pentru $\lambda$, și anume $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Să se verifice că

$$x^2 = \frac{(\lambda_3 - a)(a - \lambda_2)(a - \lambda_1)}{(a - b)(a - c)};$$

$$y^2 = \frac{(\lambda_3 - b)(\lambda_2 - b)(b - \lambda_1)}{(a - b)(b - c)};$$

$$z^2 = \frac{(\lambda_3 - c)(\lambda_2 - c)(\lambda_1 - c)}{(a - c)(b - c)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se găsească expresia vitezei și accelerației în coordonate eliptice $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$.

Indicație. Sistemul este triplu ortogonal. Se găsește că

$$g_{11} = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)};$$

$$g_{22} = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-a)(\lambda_2-b)(\lambda_2-c)};$$

$$g_{33} = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)}{(\lambda_3-a)(\lambda_3-b)(\lambda_3-c)};$$

$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0.$$

5. Fie $\bar{r}(t) = \bar{i}\,a\cos t + \bar{j}\,b\sin t + \bar{k}\,c\cos t$, unde $a$, $b$, $c$ sunt constante, vectorul de poziție al unui punct mobil. Să se arate că traiectoria punctului este o curbă plană. Care este condiția necesară și suficientă pentru ca $[\bar{r}(t) + \bar{r}(t)]^2$ să fie constant?

Indicație. Bivectorul viteză areolară are drept vector reprezentativ pe

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a\cos t & b\sin t & c\cos t \\ -a\sin t & b\cos t & -c\sin t \end{vmatrix} = b(\bar{k}a - \bar{i}ct),$$

ar produsul scalar din problemă are drept valoare

$$(a^2+b^2+c^2) - \sin 2t\,(a^2+c^2-b^2).$$

Condiția cerută este $a^2 + c^2 = b^2$.

6. Dacă un punct mobil descrie o circumferință și dacă accelerația este mereu îndreptată către un punct fix $A$ al circumferinței, accelerația este invers proporțională cu a cincea putere a distanței dela $A$ la punctul mobil.

Indicație. Luând ca origine $A$ și ca axă polară $AO$ (unde $O$ este centrul cercului de rază $R$), componentele accelerației sunt

$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ și $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$. Ultima componentă este nulă, deci $\rho^2\dot{\theta} = A$. Pentru a calcula prima, ne servim de relațiile:

$$\rho = 2R\cos\theta;\quad \dot{\rho} = -2R\sin\theta;\quad \dot{\theta} = -2R\sin\theta\,\frac{A}{\rho^2};$$

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0 \quad \text{și} \quad \ddot{\rho} = -2R\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\cdot\ddot{\theta}.$$

Se va găsi că

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{8A^2R^2}{\rho^5}.$$

7. Să se determine vectorul viteză, accelerația, precum și curbura și torsiunea traiectoriei

$$\bar{r}(t) = \bar{i}\,a(t-\sin t) + \bar{j}\,t + \bar{k}\,a(1-\cos t).$$

Indicație. Curba este trasată pe un cilindru, care are ca bază o cicloidă. Pentru calculele din problemă se vor aplica formulele curburii și torsiunii, precum și formulele (1,VII) și (13,VII).

8. Fie $\bar{r}(t) = t\bar{a} + \bar{a}\times\bar{p}(t)$ vectorul de poziție al unui punct mobil, unde $\bar{a}$ este un versor fix, iar $\bar{p}(t)$ un versor perpendicular pe $\bar{a}$ și a cărui viteză unghiulară este constantă. Să se arate că:

Scanned with OKEN Scanner

a) viteza punctului mobil face un unghi constant cu versorul $\bar{a}$; ce fel de curbă descrie deci punctul mobil?

b) accelerația este perpendiculară pe $\bar{a}$;

c) arcul curbei este o funcție liniară de $t$;

Ce se poate spune despre raportul dintre curbura și torsiunea curbei?

Indicație. Se va găsi că traiectoria este o elice, căreia i se vor aplica proprietățile generale ale elicelor.

9. Un solid se mișcă în jurul unui punct fix $O$ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}(t)$. Fie $M$ un punct variabil față de solidul dat. Să se calculeze viteza și accelerația lui $M$ față de un sistem fix.

Indicație. Notând cu $\bar{r}$ vectorul de poziție al lui $M$ față de sistemul fix și cu $\bar{r}_1$ vectorul de poziție al aceluiași punct față de sistemul mobil, avem $\dot{\bar{r}}=\dot{\bar{r}}_1+\bar{\omega}\times\bar{r}_1$. Vectorul accelerație $\bar{a}_1$ față de sistemul mobil este viteza vectorului $\dot{\bar{r}}_1$, deci $\bar{a}_1=\ddot{\bar{r}}_1+\bar{\omega}\times\bar{r}_1$. Formula precedentă ne dă imediat

$$\bar{a}=\ddot{\bar{r}}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_1+\bar{\omega}\times\bar{r}_1\right)+\bar{\omega}\times\left(\dot{\bar{r}}_1+\bar{\omega}\times\bar{r}_1\right)=\ddot{\bar{r}}_1+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}_1+2\bar{\omega}\times\dot{\bar{r}}_1+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_1).$$

10. Pe un solid mobil se iau două puncte $I$ și $M$. Notând cu $\bar{\omega}$ vectorul viteză de rotație instantanee a solidului, să se găsească legătura dintre accelerațiile punctelor $I$ și $M$.

Indicație. Plecând dela formula (35,VII), avem

$$\bar{W}_M=\bar{W}_I+\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\overline{IM})=\bar{W}_I+(\dot{\bar{\omega}}\times\overline{IM})+\bar{\omega}\times(\bar{V}_M-\bar{V}_I)=\bar{W}_I+(\dot{\bar{\omega}}\times\overline{IM})+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\overline{IM}).$$

11. Un câine $A$ urmărește un câine $B$, $B$ urmărește un câine $C$, iar $C$ urmărește câinele $A$ (în fiecare moment viteza lui $A$ trece prin $B$, a lui $B$ prin $C$ și a lui $C$ prin $A$).

Să se demonstreze că oricare ar fi pozițiile și vitezele celor trei câini, produsul razelor de curbură ale traiectoriilor lor este în fiecare moment, egal cu cubul diametrului cercului ce trece prin $A, B, C$.

Indicație. Dacă $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ și $\bar{v}_C$ sunt vitezele câinilor $A$, $B$ și $C$, vom avea:

$$\bar{v}_A=\lambda\overline{AB};\quad \bar{v}_B=\mu\overline{BC};\quad \bar{v}_C=\nu\overline{CA},$$

iar

$$\bar{\Gamma}_A=\frac{d\bar{v}_A}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\overline{AB}+\lambda\mu\overline{BC}-\lambda^2\overline{AB},\quad \text{etc.}$$

Calculând produsul vectorial dintre $\bar{\Gamma}_A$ și $\overline{AB}$, $\bar{\Gamma}_B$ și $\overline{BC}$, $\bar{\Gamma}_C$ și $\overline{CA}$, măsurând proiecțiile vectoriale pe o aceeași axă $Oz$ și notând $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, obținem:

$$\frac{v_A^2}{\rho_A}c=-2\lambda\mu s\quad (s \text{ fiind suprafața triunghiului } ABC)$$

de unde

$$\rho_A=-\frac{\lambda}{2\mu}\frac{c^3}{s};\qquad \rho_B=\cdots$$

Ținând seama că $s=\frac{abc}{4R}$, avem $\rho_A\rho_B\rho_C=-(2R)^2$.

12. Să se determine mișcarea plană, în care avem la fiecare moment:

$$v^2+\gamma^2=a^2+b^2;\quad v\gamma\sin\alpha=ab,$$

unde $v$, $\gamma$ sunt modulele vectorilor viteză și accelerație, $\alpha$ unghiul dintre ei și $ab$ constante date.

Indicație. Notând cu $\bar{A}$ și $\bar{B}$ doi vectori perpendiculari de module $a$, $b$, și cu $\bar{V}$, $\bar{\Gamma}$ vectorii viteză și accelerație ai punctului mobil $M$, relațiile date se scriu:

$$\bar{V}^2+\bar{\Gamma}^2=A^2+B^2;\quad \bar{V}\times\bar{\Gamma}=\bar{A}\times B.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivând aceste relații, obținem

$$\bar{\Gamma}\left(\bar{V}+\frac{d\bar{\Gamma}}{dt}\right)=0 \quad \text{și} \quad \bar{V}\times\frac{d\bar{\Gamma}}{dt}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{d\bar{\Gamma}}{dt}=\lambda\bar{V};$$

$$(\lambda+1)(\bar{\Gamma}\cdot\bar{V})=0,$$

de unde $\lambda=-1$, sau $\bar{\Gamma}\cdot\bar{V}=0$, deci $\frac{d^2\bar{V}}{dt^2}+\bar{V}=0$, sau $\bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt}=0$.

**13.** Trei puncte materiale $O$, $M$, $M'$ de mase $\mu$, $m$ și $m'$ se atrag două câte două, proporțional cu masele și distanțele lor. Punctul $O$ este fix, $M$ și $M'$ fiind libere. Să se arate că:

a) accelerația punctului $G$, centrul de greutate al sistemului de puncte $M$ și $M'$, nu depinde decât de poziția punctului $G$. Să se deducă legea generală de mișcare a punctului $G$;

b) aceeași chestiune pentru punctul $R$, al patrulea vârf al paralelogramului $OM'MR$;

c) mișcarea lui $M$ și $M'$ poate fi definită prin compunerea a două mișcări vibratorii eliptice simple. Când această mișcare este periodică?

d) Să se calculeze într'un interval de timp oarecare, în funcție de pozițiile lui $G$ și $R$, la începutul și la sfârșitul acestui interval, lucrul mecanic total al forțelor, care acționează asupra sistemului de puncte $O$, $M$, $M'$;

e) Să se trateze cazul particular $\mu=2$; $m=m'=3$. Originea coordonatelor este în $O$. La momentul zero, $M$ și $M'$ sunt situate pe $Ox$ cu abscisele 3 și 1, amândouă cu vitezele de modul 4, paralele respectiv cu $Oy$ și $Ox$. Axele de coordonate sunt perpendiculare.

Indicație. a) Deducem din legile de mișcare ale lui $\overline{OM}$ și $\overline{OM}'$, observând că $(m+m')\overline{OG}=m\overline{OM}+m'\overline{OM}'$,

$$\frac{d^2\overline{OG}}{dt^2}+\mu\overline{OG}=0; \quad \overline{OG}=\bar{A}\cos\omega t+\bar{B}\sin\omega t\ldots$$

b) Se procedează ca la punctul a), ținând seama că:

$$\overline{OR}=\overline{OM}-\overline{OM}';$$

$$\frac{d^2\overline{OR}}{dt^2}=-(m+m'+\mu)\overline{OR};$$

$$\overline{OR}=\bar{A}_1\cos\omega' t+\bar{B}_1\sin\omega' t.$$

c) Din relațiile $m\overline{OM}+m'\overline{OM}'=(m+m')\overline{OG}$ și $\overline{OM}-\overline{OM}'=\overline{OR}$, deducem

$$\overline{OM}=\overline{OG}+\frac{m'}{m+m'}\overline{OR}; \quad \overline{OM}'=\overline{OG}-\frac{m}{m+m'}\overline{OR}.$$

d) Lucrul mecanic al forțelor aplicate lui $O$ este nul, iar al forțelor aplicate lui $M$ și $M'$ este

$$d\tau=-(\mu m\overline{OM}+mm'\overline{M'M})\,d\overline{OM}-(\mu m'\overline{OM}'+mm'\overline{MM'})\,d\overline{OM}'=$$

$$=-\mu\frac{m}{2}d(\overline{OM}^2)-\frac{\mu m'}{2}d(\overline{OM}'^2)-\frac{mm'}{2}d(\overline{MM}'^2),$$

de unde, integrând și exprimând toți vectorii în funcție de $\overline{OR}$ și $\overline{OG}$:

$$\tau=-\frac{\mu(m+m')}{2}(\overline{OG}_1^2-\overline{OG}_0^2)-\frac{(\mu+m+m')(mm')}{2(m+m')}(\overline{OR}_1^2-\overline{OR}_0^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

**14.** Să se studieze mișcarea unei particule electrizate $M$, de masă 1 și de sarcină $c$ (în unități Gauss), deplasându-se cu frecare în aer și supusă unui câmp magnetic constant $\bar{H}$; $\bar{v}$ fiind viteza lui $M$, și $k$ un scalar pozitiv, constant, forța care lucrează asupra lui $M$ este:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad \text{cu} \quad \bar{F}_1 = \bar{H} \times \bar{v}; \quad \bar{F}_2 = -k\bar{v}:$$

a) Să se calculeze mărimea vitezei în funcție de timp și să se deducă legea spațiilor;

b) să să scrie ecuațiile diferențiale de mișcare ale punctului $M$;

c) să se determine traiectoria punctului $M$;

d) Ce devine rezultatul, dacă $\bar{H} = 0$ sau $k = 0$?

e) Punctul $M$ descrie o curbă $C$. Să se exprime în funcție de timp arcul $s$ al curbei $C$ parcursă de $M$.

**Indicație.** Inmulțind scalar cu $\bar{v}$ relația:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{H} \times \bar{v} - k\bar{v} \text{ și integrând, obținem:}$$

$$v^2 = Ae^{-2kt}.$$

Integrând $\frac{ds}{dt} = v$, obținem $s = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + c.$

b) $d^2\frac{\overline{OM}}{dt^2} = \bar{H} \times \frac{d\overline{OM}}{dt} - k\frac{d\overline{OM}}{dt}.$

c) Se integrează ținând seamă că $\bar{H}$ și $k$ sunt constanți

$$\frac{d\overline{OM}}{dt} - \bar{H} \times \overline{OM} + k\overline{OM} = -\bar{H} \times \overline{OB} + k\overline{OB}$$

$\left(B \text{ fiind punctul de abscisă curbilinie } \frac{v_0}{k}\right)$, sau $\frac{\overline{dOM}}{dt} - \bar{H} \times \overline{BM} + k\overline{BM} = 0.$

Traiectoria lui $M$ este trasată pe un con de rotație de axă $Bz_1$, paralelă cu $Oz$ și de generatoare $BM_0$.

d) Se obține $s = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$.



Scanned with OKEN Scanner

# TABLA DE MATERII

## ANALIZA VECTORIALĂ


**Cap. V. Bazele Analizei vectoriale. Funcţii scalare şi vectoriale . 3**

§ 140. Mărimi fizice variabile . . . . . 3
§ 141. Mărimi scalare şi vectoriale variabile . . . . 5
§ 142. Funcţii scalare şi vectoriale de o variabilă scalară . 7
§ 143. Funcţii vectoriale şi scalare de mai multe variabile . 9
§ 144. Limite vectoriale . . . . . 12
§ 145. Limite de funcţii de o variabilă scalară . . . 16
§ 146. Continuitatea şi discontinuitatea funcţiilor vectoriale 19
§ 147. Derivata unui vector variabil $\overline{V}(t)$ . . . . . 22
§ 148. Reprezentarea carteziană a derivatei şi diferenţialei 24
§ 149. Extensiunea regulilor de derivare . . . . 27
§ 150. Aplicaţii ale derivatei unei funcţii vectoriale . . 29
§ 151. Derivate vectoriale succesive . . . . . 33
§ 152. Formula lui Taylor . . . . . 34
§ 153. Funcţii vectoriale de mai multe variabile scalare . 36
§ 154. Funcţii vectoriale compuse. Derivate totale . . 40
§ 155. Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile . . . . . 42
§ 156. Integrale vectoriale . . . . . 43
§ 157. Ecuaţii diferenţiale vectoriale . . . . . 48
* § 158. Limite în spaţiul afin . . . . . 55
* § 159. Limite de funcţii vectoriale de o variabilă scalară . 57
* § 160. Funcţii de punct în spaţiul afin . . . . . 60
* § 161. Continuitate în spaţiul afin . . . . . 63
* § 162. Derivate şi diferenţiale în spaţiul afin . . . 66
* § 163. Derivarea mărimilor tensoriale în spaţiul afin . . 71
* § 164. Aplicaţii. Operatori diferenţiali în spaţiul afin . . 76
Exerciţii . . . . . 81

**Cap. VI. Metoda vectorială în geometria diferenţială . . . . 83**

*A. Curbe în spaţiu* . . . . . 83

§ 165. Reprezentarea vectorială a curbelor . . . . 83
§ 166. Proprietăţi locale. Elementul de arc şi vectorul tangent elementar . . . . . 86
§ 167. Abscisa curbilinie şi orientarea curbelor . . . 88
§ 168. Reprezentările parametrice şi reprezentarea carteziană 90
§ 169. Planul osculator . . . . . 94
§ 170. Normala principală şi curbura . . . . . 98
§ 171. Binormala şi torsiunea . . . . . 103
§ 172. Triedrul principal şi curbura totală . . . . 106
§ 173. Formulele lui Frenet . . . . . 107
§ 174. Indicatoarele sferice şi rotaţia triedrului principal . 109
§ 175. Semnificaţia cinematică a formulelor lui Frenet . 111
§ 176. Expresiile curburii şi torsiunii . . . . . 113


Scanned with OKEN Scanner

§ 177. Formulele lui Frenet pentru curbe plane . . . 116
§ 178. Ecuaţiile canonice ale unei curbe . . . . . 118
§ 179. Ecuaţiile intrinseci ale unei curbe . . . . . 122
§ 180. Demonstraţia vectorială a ecuaţiilor intrinseci . . 125
§ 181. Noţiuni asupra contactului . . . . . 127
§ 182. Osculaţia . . . . . 132
§ 183. Centrul de curbură şi sfera osculatoare . . . 133
Exerciţii . . . . . 137

B. *Suprafeţe în spaţiu* . . . . . 145

§ 184. Reprezentarea vectorială a suprafeţelor . . . 145
§ 185. Reprezentarea parametrică şi curbele coordonate . 148
§ 186. Proprietăţi locale. Deplasări elementare. Tangentă. Plan tangent . . . . . 151
§ 187. Elementul liniar şi prima formă metrică fundamentală 154
§ 188. Elementul de arie . . . . . 158
§ 189. Orientarea suprafeţelor bilatere . . . . . 160
§ 190. Elementul de suprafaţă orientat şi normala orientată 163
§ 191. Variaţia normalei orientate şi a doua formă metrică fundamentală . . . . . 165
§ 192. Suprafeţe generate de curbe . . . . . 170
§ 193. Infăşurătoarea unei familii de curbe cu un parametru. Puncte singulare pe suprafeţe . . . . . 172
§ 194. Suprafeţe riglate. . . . . 175
§ 195. Suprafeţe generate de elemente de contact. Infăşurătoare . . . . . 179
§ 196. Infăşurătoarele familiilor de suprafeţe cu un parametru . . . . . 183
§ 197. Suprafeţe desfăşurabile . . . . . 187
§ 198. Desfăşurabile asociate curbelor din spaţiu . . . 191
§ 199. Aplicaţii. Evolute şi evolvente ale unei curbe . . 196
§ 200. Infăşurătoare de suprafeţe cu doi parametri . . . 199
Exerciţii . . . . . 203

C. *Spaţiul şi varietăţile sale în coordonate curbilinii* . . . 207

§ 201. Coordonate curbilinii în spaţiu . . . . . 207
§ 202. Sisteme de referinţă carteziene locale . . . . . 212
§ 203. Baze reciproce în spaţiul local. Gradient . . . 215
§ 204. Elementul de volum şi elementul liniar al spaţiului 218
§ 205. Coordonate curbilinii în notaţia tensorială . . . 221
§ 206. Geometria în spaţiile locale . . . . . 225
§ 207. Suprafeţe şi curbe în coordonate curbilinii . . . 229
Exerciţii . . . . . 233

Cap. VII. **Metoda vectorială în Mecanica raţională. Mişcări şi mărimi mecanice** . . . . . 235

§ 208. Mărimi geometrice în fenomenele fizice . . . . 235

A. *Aplicaţii la Cinematica punctului material* . . . . . 237

§ 209. Viteza unui punct mobil . . . . . 237
§ 210. Acceleraţia unui punct mobil . . . . . 241
§ 211. Aplicaţii cinematice . . . . . 245

B. *Aplicaţii la Cinematica solidului*. . . . . 247

§ 212. Translaţia şi noţiunea de grup de transformări . 247
§ 213. Rotaţia elementară . . . . . 250
§ 214. Deplasarea elementară şi mişcarea instantanee a solidului . . . . . 253
§ 215. Discuţia mişcării instantanee . . . . . 256
§ 216. Mişcarea instantanee elicoidală. Axa centrală. Centrul instantaneu . . . . . 257

Scanned with OKEN Scanner

C. *Aplicații la Dinamica punctului material* . . . . . 261
§ 217. Relații între mărimile mecanice fundamentale. Integrale prime . . . . . 262
§ 218. Energia și lucrul mecanic . . . . . 265
§ 219. Aplicații ale teoremelor generale . . . . . 268
§ 220. Mișcarea punctului material, fără frecare, pe o curbă fixă . . . . . 276
§ 221. Mișcarea punctului material, fără frecare, pe o suprafață fixă . . . . . 280
§ 222. Traiectorii geodezice pe o suprafață . . . . . 283
Exerciții . . . . . 291
**Indice alfabetic al volumelor I și II** . . . . . 291

Scanned with OKEN Scanner

Responsabil de carte : Moscovici M.
Tehnoredactor : Kivu N.
Corector resp. : Perieţianu V.

*Dat la cules 5.12.1953. Bun de tipar 28.1.1954. Hârtia Velină 70/100/16. 65 g/m³. Coli editoriale 24,80. Coli tipar 18,75. Preţul unui exemplar broşat lei 9,67, legat ½ în pânză lei 12,77. C-da 291 B-A. 04574/1953.*
*Pentru bibliotecile mici, indicele de clasificare 512.*
*Pentru bibliotecile mari, indicele de clasificare 512.9.*

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Timişoara, Str. Popa Şapcă 8. Timişoara — R. P. R.

Scanned with OKEN Scanner

# ERATA

| Pag. | Rând | In loc de | Se va citi | Din vina |
|---|---|---|---|---|
| 81 | 6 | $=\theta$ | $=0$ | Tipografiei |
| 82 | 8 | $\overline{a}\overline{i}+$ | $a\overline{i}+$ | Editurii |
| 128 | 11 | $\frac{t-t_0}{2!}\overline{r}''(t_0)$ | $\frac{(t-t_0)^2}{2!}\overline{r}''(t_0)$ | Tipografiei |
| 130 | 3 jos | $\frac{(t-t_0)}{2!}\overline{r}''(t_0)$ | $\frac{(t-t_0)^2}{2!}\overline{r}''(t_0)$ | Editurii |
| 169 | 10 „ | $T\frac{\overline{n}_u}{\rho^u}+$ | $T\frac{\overline{n}_u}{\rho_u}$ | Tipografiei |
| 170 | 4 | $-p_{\varrho}v\operatorname{ctg}\varphi=0$ | $p\rho_{\varphi}\operatorname{ctg}\varphi=0$ | „ |
| 171 | 12 | în $D$ domeniul $D$ | în domeniul $D$ | Editurii |
| 199 | 6 jos | de clasa $C_r$). | de clasa $C^r$). | Tipografiei |
| 205 | 9 „ | $\rho=\bar{\sigma}(s)$ | $\bar{\rho}=\bar{\rho}(s)$ | „ |
| 245 | 8 | $\overline{V}$ | $\overline{\mathfrak{v}}$ | Editurii |
| 250 | 3 | $\overline{r}_1'\leqq\overline{r}+\overline{V}_2,$ $\overline{r}_2=\overline{r}_1+\overline{V}_2\approx\overline{r}+(\overline{V}_1+\overline{V}_2)$ | $\overline{r}_1'=\overline{r}+\overline{V}_2;$ $\overline{r}_2=\overline{r}_1+\overline{V}_2=\overline{r}+(\overline{V}_1+\overline{V}_2)$ | Tipografiei |
| 253 | 5 jos | $=\dot{\bar{q}}(\dot{\bar{p}}\dot{\bar{p}})-$ | $=\dot{\bar{q}}(\dot{\bar{p}}\dot{\bar{p}})-$ | „ |
| 281 | 12 | $m\frac{v^2}{\rho_g}F_g;$ | $m\frac{v^2}{\rho_g}=F_g$ | „ |



Scanned with OKEN Scanner